УДК 517.95:519.86

В. А. Стоян, Д. А. Голодюк

Ідентифікаційно-псевдоінверсний підхід до побудови математичних моделей лінійних дискретно спостережуваних розподілених просторово-часових систем

(Представлено академіком НАН України В. С. Дейнекою)

Будується інтегральна залежність дискретно визначеної функції стану просторово розподіленої динамічної системи від початково-крайових та поточних зовнішньодинамічних збурюючих факторів. Побудована математична модель системи за середньоквадратичним критерієм узгоджується з дискретно спостережуваним початково-крайовим станом системи та неперервно визначеною функцією розподілених зовнішньодинамічних збурень, які супроводжують динамічну систему.

Дослідження просторово розподілених динамічних систем при умові неповноти даних про зовнішньодинамічну обстановку, яка їх супроводжує, приводить до некоректних постановок початково-крайових задач математичної фізики. Псевдоінверсні підходи [1, 2] до математичного моделювання розв'язку таких задач, запропоновані в [3] та розв'язані в [4, 5], вимагають наявності інтегральної математичної моделі процесу. Проблема побудови останньої може бути вирішена для процесів, динаміка яких описана диференціально або допускає спостереження за станом процесу та розподіленим зовнішньодинамічним збуренням, яке йому відповідає в необмеженій просторово-часовій області. З урахуванням того, що практична реалізація першого підходу пов'язана з обчисленням одно- та багатократних контурних інтегралів, а використання другого обмежене технічними можливостями постановки експерименту, нижче буде запропоновано новий, вільний від цих недоліків, ідентифікаційний псевдоінверсний підхід до подолання проблеми. З використанням результатів лінійної алгебри [6, 7], узагальнених в роботах [8, 9], та ідей [10] з ідентифікації алгебраїчно перетворюючих систем буде розв'язана задача побудови математичної моделі розподіленого динамічного процесу, дискретно спостережуваного в обмеженій просторово-часовій області, яка може бути базовою для вирішення проблеми математичного моделювання [4, 5] динаміки цього процесу в прямій та оберненій постановках.

1. Розглянемо розподілений у просторовій області

$$S_0 = \{x \colon x = (x_1, \ldots, x_\nu) \in \mathbb{R}^\nu\}$$

динамічний процес, стан якого на часовому інтервалі $0 \leqslant t \leqslant T$ визначається функцією $y(s)$ $(s = (x,t) \in S_0^T)$.

Будемо виходити з того, що залежність функції $y(s)$ від функції зовнішньо розподілених просторово-часових збурень $u(s)$ $(s \in S_0^T)$, які розглядуваний процес супроводжують, визначається диференціальним рівнянням у частинних похідних або, що еквівалентно, інтегральною моделлю [4, 5] вигляду

$$y(s) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(s - s')u(s')\,ds', \tag{1}$$

де

$$G(s - s') = \frac{1}{(2\pi)^{\nu+1}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{L(i\lambda)} e^{i\left(\sum\limits_{j=1}^{\nu} \lambda_j (x_j - x'_j) + \mu(t - t')\right)} d\lambda d\mu \; - \tag{2}$$

функція Гріна розглядуваного просторово-часового процесу для випадку, коли $s \in \mathbb{R}^{\nu+1}$; $L(\partial_s)(\partial_s = (\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_\nu}, \partial_t))$ — лінійний диференціальний оператор, такий, що

$$L(\partial_s)y(s) = u(s), \tag{3}$$

i — уявна одиниця, $\lambda = \lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$, а $d\lambda = d\lambda_1 \cdots d\lambda_\nu$.

Враховуючи проблеми реалізації формули (2) для динамічних процесів, описаних диференціальним співвідношенням (3), та необхідність мати модель вигляду (1) для процесів, які важко формалізуються диференціально, розглянемо задачу побудови вектор-функції

$$\overline{G}(s') = \mathrm{col}(G(s_l - s'),\ l = \overline{1, L}), \tag{4}$$

яка значення $y_l = y(s_l)$ $(l = \overline{1, L})$ функції стану $y(s)$ в точках $s_l \in S_0^T$ $(l = \overline{1, L})$ визначає через розподілені зовнішньодинамічні збурення $u(s)$.

Грунтуючись на спостережуваних значеннях $\overline{y}^{(i)}$ $(i = \overline{1, n})$ вектора $\overline{y} = \mathrm{col}(y_l,\ l = \overline{1, L})$, які відповідають функціям $u^{(i)}(s)$ $(i = \overline{1, n})$ зовнішньодинамічних збурень відповідно, при умові, що на стан $y(s)$ розглядуваного процесу інші (початкові та крайові) зовнішньодинамічні фактори не впливають (область S_0^T тимчасово необмежена), вектор-функцію $\overline{G}(s)$ визначимо співвідношеннями

$$\overline{y}^{(i)} = \int\limits_{S_0^T} \overline{G}(s)u^{(i)}(s)\,ds \qquad (i = \overline{1, n}) \tag{5}$$

або (що еквівалентно)

$$Y = \int\limits_{S_0^T} \overline{G}(s)U(s)\,ds, \tag{6}$$

де

$$Y = (\overline{y}^{(1)}, \ldots, \overline{y}^{(n)}), \qquad U(s) = (u^{(1)}(s), \ldots, u^{(n)}(s)).$$

Позначивши через $y_{(j)}^T$ та $g_j(s)$ $(j = \overline{1, L})$ рядки матриці Y та елементи стовпця-функції $\overline{G}(s)$, з (6) отримуємо такі інтегральні співвідношення для знаходження функцій $g_j(s)$:

$$\int\limits_{S_0^T} U^T(s)g_j(s)\,ds = y_{(j)} \qquad (j = \overline{1, L}). \tag{7}$$

Псевдообертаючи [9] (7), з точністю [4, 5]

$$\varepsilon_j^2 = \min_{g_j(s)} \left\| \int\limits_{S_0^T} U^T(s) g_j(s)\,ds - y_{(j)} \right\|^2 = y_{(j)}^T y_{(j)} - y_{(j)}^T P_2 P_2^+ y_{(j)},$$

де знаком "+" позначена операція псевдообернення матриці

$$P_2 = \int\limits_{S_0^T} U^T(s) U(s)\,ds \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

знаходимо компоненти

$$g_j(s) = U(s) P_2^+ y_{(j)} + v_j(s) - U(s) P_2^+ U_j \qquad (j = \overline{1, L}) \tag{8}$$

вектор-функції $\overline{G}(s)$. Тут $v_j(s)$ — довільна інтегровна в S_0^T функція, що тотожно рівна нулю, якщо

$$\lim_{N\to\infty} \det \left[\sum_{i=1}^{n} u^{(i)}(s_j) u^{(i)}(s_k) \right]_{j,k=1}^{j,k=N} > 0$$

при довільних s_j, $s_k \in S_0^T$ $(j = \overline{1, N};\ k = \overline{1, N})$, а

$$U_j = \int\limits_{S_0^T} U^T(s) v_j(s)\,ds.$$

2. Розглянемо задачу побудови вектор-функції $\overline{G}(s)$ для випадку, коли досліджуваний процес протікає в обмеженій просторово-часовій області S_0^T. У цьому випадку на стан $y(s)$ процесу, крім визначених вище функцій $u^{(i)}(s)$ $(i = \overline{1, n})$ розподілених просторово-часових збурень у кожному із n експериментів, впливатимуть початково-крайові зовнішньодинамічні збурення.

Останнє означає, що значення компонент y_l $(l = \overline{1, L})$ вектора $\overline{y}$ спостережень за станом розглядуваного процесу визначатиметься сумою

$$\overline{y} = \overline{y}_\infty + \overline{y}_0 + \overline{y}_\Gamma, \tag{9}$$

складові $\overline{y}_\infty$, $\overline{y}_0$ та $\overline{y}_\Gamma$ якої відповідають дії розподілених в S_0^T та наявних при $t = 0$ і на контурі Γ зовнішньодинамічних збурюючих факторів.

Розглядаючи знайдену вище вектор-функцію $\overline{G}(s)$ як нульове $G_0(s)$ наближення до визначеного згідно з (1) обернення моделі (3) на системі доступних для спостереження стану точок $s_1, \ldots, s_L$, складові $\overline{y}_\infty$, $\overline{y}_0$ та $\overline{y}_\Gamma$, які відповідають цим точкам в (9), визначимо співвідношеннями

$$\overline{y}_\infty = \int\limits_{S_0^T} G_0(s) u(s)\,ds, \tag{10}$$

$$\overline{y}_0 = \int\limits_{S^0} G_0(s) u_0(s)\, ds, \tag{11}$$

$$\overline{y}_\Gamma = \int\limits_{S^\Gamma} G_0(s) u_\Gamma(s)\, ds, \tag{12}$$

функції $u_0(s)$ ($s \in S^0 = S_0 \times (-\infty, 0]$) та $u_\Gamma(s)$ ($s \in S^\Gamma = (\mathbb{R}^\nu \setminus S_0) \times [0, T]$), в яких виберемо з умови середньоквадратичного моделювання початково-крайових збурень, тобто з умови, щоб

$$\int\limits_{S^0} G_0(s) u_0^{(i)}(s)\, ds + \int\limits_{S^\Gamma} G_0(s) u_\Gamma^{(i)}(s)\, ds = \overline{Y}^{(i)} \tag{13}$$

при $i = \overline{1, n}$ та

$$\overline{Y}^{(i)} = \overline{y}^{(i)} - \int\limits_{S_0^T} G_0(s) u^{(i)}(s)\, ds.$$

Позначивши через

$$\overline{u}(s) = \begin{pmatrix} u_0(s), s \in S^0 \\ u_\Gamma(s), s \in S^\Gamma \end{pmatrix},$$

$$A(s) = ((G_0(s), s \in S^0), (G_0(s), s \in S^\Gamma)),$$

задачу середньоквадратичного обернення системи (13) зведемо до знаходження вектор-функції $\overline{u}^{(i)}(s)$ такої, щоб

$$\overline{u}^{(i)}(s) = \arg \min_{u_0(s), u_\Gamma(s)} \left\| \int A(s) \overline{u}(s) - \overline{Y}^{(i)} \right\|^2. \tag{14}$$

Зауважимо, що інтегрування в (14) виконується за областю зміни аргументу s матричної та векторної функцій $A(s)$ та $\overline{u}(s)$.

Розв'язком (14), знайденим з точністю

$$\varepsilon_i^2 = \min_{u_0^{(i)}(s), u_\Gamma^{(i)}(s)} \left\| \int A(s) \overline{u}^{(i)}(s) - \overline{Y}^{(i)} \right\|^2 = (\overline{Y}^{(i)})^T \overline{Y}^{(i)} - (\overline{Y}^{(i)})^T P P^+ \overline{Y}^{(i)},$$

де

$$P = \int\limits_{S^0} G_0(s) G_0^T(s)\, ds + \int\limits_{S^\Gamma} G_0(s) G_0^T(s)\, ds,$$

буде

$$\overline{u}^{(i)}(s) = A^T(s) P^+ \overline{Y}^{(i)} + \overline{v}^{(i)}(s) - A^T(s) P^+ A_v^{(i)}$$

за довільних інтегровних в області визначення аргументу вектор-функцій

$$\overline{v}^{(i)}(s) = \begin{pmatrix} v_0^{(i)}(s), s \in S^0 \\ v_\Gamma^{(i)}(s), s \in S^\Gamma \end{pmatrix}$$

при

$$A_v^{(i)} = \int\limits_{S^0} G_0(s) v_0^{(i)}(s)\, ds + \int\limits_{S^\Gamma} G_0(s) v_\Gamma^{(i)}(s)\, ds,$$

звідки

$$u_0^{(i)}(s) = G_0^T(s) P^+ \overline{Y}^{(i)} + v_0^{(i)}(s) - G_0^T(s) P^+ A_v^{(i)}, \tag{15}$$

$$u_\Gamma^{(i)}(s) = G_0^T(s) P^+ \overline{Y}^{(i)} + v_\Gamma^{(i)}(s) - G_0^T(s) P^+ A_v^{(i)}. \tag{16}$$

З урахуванням (15), (16) знаходимо, що вплив початково-крайових збурень на стан $y(s)$ досліджуваного процесу в точках $s_1, \ldots, s_L$ спостережень за ним визначатиметься компонентами векторів

$$\overline{y}_0^{(i)} = \int\limits_{S^0} G_0(s) u_0^{(i)}(s)\, ds \qquad (i = \overline{1, n}), \tag{17}$$

$$\overline{y}_\Gamma^{(i)} = \int\limits_{S^\Gamma} G_0(s) u_\Gamma^{(i)}(s)\, ds \qquad (i = \overline{1, n}). \tag{18}$$

3. Розглянемо варіант побудови наступного (першого) наближення $G_1(s)$ до визначення ядра $\overline{G}(s)$ спостережуваного, згідно з (5), в області S_0^T розподіленого просторово-часового процесу (3). Будемо виходити з того, що наближення це (аналогічно (5)) визначатиметься співвідношенням

$$\widetilde{y}^{(i)} = \int\limits_{S_0^T} G_1(s) u^{(i)}(s)\, ds \qquad (i = \overline{1, n}), \tag{19}$$

в якому при визначеному вище спостереженні $\overline{y}^{(i)}$ за станом $y(s)$ досліджуваного процесу та визначених згідно з (17), (18) векторах $\overline{y}_0^{(i)}$ та $\overline{y}_\Gamma^{(i)}$

$$\widetilde{y}^{(i)} = \overline{y}^{(i)} - \overline{y}_0^{(i)} - \overline{y}_\Gamma^{(i)} \qquad (i = \overline{1, n}).$$

З (19) аналогічно (8) з точністю

$$\varepsilon_j^2 = \min_{g_{1j}(s)} \left\| \int\limits_{S_0^T} U^T(s) g_{1j}(s)\, ds - \widetilde{y}_{(j)} \right\|^2 = \widetilde{y}_{(j)}^T \widetilde{y}_{(j)} - \widetilde{y}_{(j)}^T P_2 P_2^+ \widetilde{y}_{(j)} \qquad (j = \overline{1, L}),$$

де $U(s)$ та P_2 — збігаються з визначеними у (8), а

$$(\widetilde{y}_{(1)}, \ldots, \widetilde{y}_{(L)})^T = \widetilde{Y} = (\widetilde{y}^{(1)}, \ldots, \widetilde{y}^{(n)}),$$

знаходимо компоненти

$$g_{1j}(s) = U(s)P_2^+\widetilde{y}_{(j)} + v_j(s) - U(s)P_2^+U_j \qquad (j = \overline{1, L})$$

вектор-функції $G_1(s)$, а далі — і саму вектор-функцію

$$G_1(s) = \widetilde{Y}P_2^+U^T(s) + V(s) - \widetilde{U}P_2^+U^T(s) \qquad (s \in S_0^T). \tag{20}$$

Тут $v_j(s)$ $(j = \overline{1, n})$ — набір довільних інтегровних в S_0^T функцій, тотожно рівних нулю, якщо

$$\lim_{N\to\infty} \det\left[\sum_{i=1}^{n} u^{(i)}(s_j)u^{(i)}(s_k)\right]_{j,k=1}^{j,k=N} > 0$$

при довільних $s_j,\ s_k \in S_0^T$ $(j = \overline{1, N};\ k = \overline{1, N})$, а

$$V(s) = \mathrm{col}(v_j^T(s),\ j = \overline{1, L}), \qquad \widetilde{U} = \int\limits_{S_0^T} V(s)U(s)\,ds, \qquad \widetilde{Y} = \mathrm{col}(\widetilde{y}_{(j)}^T,\ j = \overline{1, L}).$$

Знайдене згідно з (20) перше наближення $G_1(s)$ до вектор-функції $\overline{G}(s)$, будучи використаним замість $G_0(s)$ в описаному вище алгоритмі, дозволить знайти наступне (друге) наближення до неї. Алгоритм уточнення вектор-функції $G(s)$ може бути повторений багатократно.

Критерієм виходу з ітераційного повторення алгоритму може бути середньоквадратична оцінка близькості двох послідовних наближень до шуканої вектор-функції $\overline{G}(s)$, або середньоквадратична узгодженість знайденої з її використанням функції стану $y(s)$ зі спостережуваними значеннями y_l $(l = \overline{1, L})$ цієї функції.

1. *Кириченко Н. Ф.* Псевдообращение матриц и их рекуррентность в задачах моделирования и управления // Пробл. управления и информатики. – 1995. – № 1. – С. 114–127.
2. *Кириченко Н. Ф., Стоян В. А.* Аналитическое представление матричных и интегральных линейных преобразований // Кибернетика и систем. анализ. – 1998. – № 3. – С. 90–104.
3. *Стоян В. А.* Об одном подходе к исследованию начально-краевых задач матфизики // Пробл. управления и информатики. – 1998. – № 1. – С. 79–86.
4. *Скопецький В. В., Стоян В. А., Кривонос Ю. Г.* Математичне моделювання прямих та обернених задач динаміки систем з розподіленими параметрами. – Київ: Наук. думка, 2001. – 361 с.
5. *Скопецький В. В., Стоян В. А., Зваридчук В. Б.* Математичне моделювання динаміки розподілених просторово-часових процесів. – Київ: Сталь, 2008. – 316 с.
6. *Альберт А.* Регрессия, псевдоинверсия, рекурентное оценивание. – Москва: Наука, 1977. – 305 с.
7. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – Москва: Наука, 1966. – 576 с.
8. *Кириченко Н. Ф.* Рекуррентность операций псевдоообращения в задачах идентификации и синтеза матриц // Кибернетика и вычислит. техника. – 1994. – № 104. – С. 17–21.
9. *Кириченко Н. Ф., Стоян В. А.* Построение общего решения начально-краевых задач, задач наблюдения и терминального управления для систем с распределенными параметрами // Электромагн. волны и электрон. системы. – 1999. – № 6. – С. 4–15.
10. *Кириченко Н. Ф., Лепеха Н. П.* Возмущение псевдообратных и проекционных матриц и их применение к идентификации линейных и нелинейных зависимостей // Пробл. управления и информатики. – 2001. – № 1. – С. 6–22.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 18.01.2011

V. A. Stoyan, D. A. Golodiuk

The identificative pseudoinverse method to develop mathematical models of linear discrete observable space-time distributed systems

The integral dependence of a discretely defined function of a state of the space-distributed dynamic system on the initial boundary and current external dynamic perturbation factors is built. The mathematical model of the system, which is built by a mean square root criterion, is coordinated with its discretely observable initial boundary state and with a continuously defined function of distributed external dynamic perturbations that accompany the dynamic system.