Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

9 • 2011

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 004.655

Ю. О. Богатирьова, Д. Б. Буй, академік НАН України **В. Н. Редько**

Примітивні програмні алгебри функцій множинних (мультимножинних) аргументів та значень

Розглядається обчислюваність на множинах та мультимножинах. Обчислюваність вводиться як нумераційна обчислюваність та апаратом для задання класу обчислюваних функцій виступають примітивні програмні алгебри. Побудовано системи породжуючих множинної та мультимножинної ППА.

Примітивні програмні алгебри (ППА) були вперше введені в [1] як адекватний апарат для розв'язування проблем повноти в різних класах функцій, тобто для задання класів функцій як замикань у цих алгебрах. Головна особливість сигнатурних операцій ППА полягає в їх загальнозначності та абстрактності: операції, по-перше, використовують тільки властивості бути функцією чи предикатом і, по-друге, інваріантні відносно природи множини, якій належать аргументи та значення функцій. Конкретні дослідження показали доцільність використання ППА для задання різноманітних класів обчислюваних функцій. Розглядалися такі універсуми даних: натуральні, цілі та раціональні числа [2–4]; слова в скінченному алфавіті [4]; вектори, матриці, реляції, таблиці, компоненти яких належать множині натуральних чисел або деякій скінченній множині [5–9]. Характерна особливість вказаних результатів полягає в тому, що були знайдені не просто скінченні системи породжуючих (з точністю до селекторних функцій), а системи породжуючих, що містять прості природні функції та предикати.

Дане повідомлення присвячене питанню повноти класу частково рекурсивних функцій, аргументами та значеннями яких виступають скінченні множини натуральних чисел (мультимножини, основами яких є скінченні множини натуральних чисел). Мультимножини є уточненнями сукупностей з повтореннями. З точки зору сутесутнісного підходу поняття сукупності виступає сутністю, а поняття повторення — суттю [10].

Наведемо формальне визначення мультимножини. Мультимножина α з основою U — це функція вигляду $\alpha\colon U \to N^+$, де U — деяка множина, а $N^+ = \{1, 2, \ldots\}$ — множина натуральних чисел без нуля. Термін "мультимножина" був запропонований Н. Г. де Брейном (N. G. de Bruijn) у 70-х роках минулого століття (див. оглядові роботи [11, 12]).

Побудуємо нумерацію ξ скінченних множин натуральних чисел. Спочатку розглянемо нумерацію ξ' непорожніх множин натуральних чисел. Нехай $M = \{n_1, \ldots, n_m\}$, де $m \geqslant 1$, $n_1 < n_2 < \cdots < n_m$ — непорожня скінченна множина натуральних чисел; покладемо, що $\xi'(M) \stackrel{\text{def}}{=} 2^{n_1+1} \cdot 3^{n_2+1} \cdot \ldots \cdot p_{m-1}^{n_m+1}$. Шукана нумерація ξ задається кусковою схемою:

$$\xi(M) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } M = \varnothing, \\ \xi'(M), & \text{інакше.} \end{cases}$$

Наявність ефективної нумерації сім'ї скінченних множин натуральних чисел дає змогу ввести обчислюваність на сім'ї скінченних множин натуральних чисел 2_{fin}^N.

До системи породжуючих множинної ППА Σ входить предикат рівності $X = Y$, функція об'єднання множин $X \bigcup Y$, функція додавання скінченних множин $X \oplus Y$, функція віднімання скінченних множин $X \div Y$, селекторні функції I_m^n та константні функції $\{1\}(X)$ та $\varnothing(X)$, що фіксують відповідно синглетон $\{1\}$ та порожню множину $\varnothing$:

$$\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{X = Y, X \bigcup Y, X \oplus Y, X \div Y, I_m^n, \{1\}(X), \varnothing(X)\}_{i=1,\ldots,n}^{n=1,2,\ldots}.$$

Дамо означення функціям $\oplus$ та $\div$

$$X \oplus Y \stackrel{\text{def}}{=} \{z \mid \exists x\, \exists y\ (x \in X \wedge y \in Y \wedge z = x + y)\},$$

$$X \div Y \stackrel{\text{def}}{=} \{z \mid \exists x\, \exists y\ (x \in X \wedge y \in Y \wedge z = x \dot{-} y)\}.$$

Теорема 1. *Система Σ є системою породжуючих множинної ППА.*

Побудуємо нумерацію ξ_M скінченних мультимножин натуральних чисел. Спочатку розглянемо нумерацію ξ'_M скінченних непорожніх мультимножин натуральних чисел. Нехай $\alpha = \{n_1^{k_1}, \ldots, n_n^{k_m}\}$, де $m \geqslant 1$, $k_1, \ldots, k_m \geqslant 1$, $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ — непорожня скінченна мультимножина натуральних чисел; покладемо, що $\xi'_M(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} 2^{n_1+1} \cdot 3^{k_1} \cdot 5^{n_2+1} \cdot 7^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_{2m-2}^{n_m+1} \times$ $\times\, p_{2m-1}^{k_m} = \prod\limits_{i=1}^{m} p_{2i-2}^{n_i+1} \cdot p_{2i-1}^{k_i}$. Шукана нумерація ξ_M задається кусковою схемою:

$$\xi_M(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \alpha = \varnothing_m, \\ \xi'_M(\alpha), & \text{інакше.} \end{cases}$$

Маючи у розпорядженні ефективну нумерації сім'ї скінченних мультимножин натуральних чисел, поняття частково рекурсивної функції переносимо на випадок мультимножин стандартно.

До системи породжуючих мультимножинної ППА Σ_M входить предикат рівності $\alpha = \beta$, функції об'єднання $\alpha \bigcup\limits_{\text{All}} \beta$, додавання $\alpha \oplus \beta$ та віднімання $\alpha \div \beta$ скінченних мультимножин, константні функції $\{1^1\}(\alpha)$ та $\varnothing_m(\alpha)$, що фіксують відповідно мультимножину вигляду $\{1^1\}$ та порожню мультимножину $\varnothing_m$, специфічна функція над мультимножиною $\varphi(\alpha)$ та селекторні функції I_m^n:

$$\Sigma_M \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\alpha = \beta, \alpha \bigcup_{\text{All}} \beta, \alpha \oplus \beta, \alpha \div \beta, \{1^1\}(\alpha), \varnothing_m(\alpha), \varphi(\alpha), I_m^n\right\}_{i=1,\ldots,n}^{n=1,2,\ldots}.$$

Дамо означення функціям $\oplus$, $\div$ та φ.

Функція додавання мультимножин $\oplus$ визначається через повний образ відносно стандартної операції додавання: $\alpha \oplus \beta = +[\alpha \otimes \beta]$.

Функція віднімання мультимножин $\dotdiv$ визначається через повний образ відносно стандартної операції зрізаної різниці: $\alpha \dotdiv \beta = \dot{-}[\alpha \otimes \beta]$.

Функція φ визначається як $\{n_1^1\}$, $\{k_1^1\} \xrightarrow{\varphi} \{n_1^{k_1}\}$.

Теорема 2. *Система Σ_M є системою породжуючих мультимножинної ППА.*

Отримані системи породжуючих множинної та мультимножинної ППА природні та споріднені між собою. Зокрема, вони містять предикат рівності, а їх бінарні операції виникають із стандартних арифметичних операцій додавання та зрізаної різниці шляхом їх розповсюдження за допомогою повного образу.

Зробимо декілька зауважень щодо застосувань одержаних результатів. Частково рекурсивні мультимножинні функції є моделлю так званих обчислень на ДНК [13]. Крім того, уточненнями таблиць з дублікатами рядків в табличних базах даних виступають мультимножини рядків; таким чином, частково рекурсивні мультимножинні функції є, в першому наближені, моделями алгоритмічних маніпуляцій над таблицями [11].

1. *Редько В. Н.* Универсальные программные логики и их применение // Тр. Всесоюз. симп. по теорет. и систем. программированию. – Кишинев: Штиинца, 1983. – С. 310–326.
2. *Буй Д. Б., Редько В. Н.* Примитивные программные алгебры. I // Кибернетика. – 1984. – № 4. – С. 1–7.
3. *Буй Д. Б., Редько В. Н.* Примитивные программные алгебры функций рациональных аргументов и значений // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1985. – № 6. – С. 65–67.
4. *Буй Д. Б., Редько В. Н.* Примитивные программные алгебры целочисленных и словарных функций // Там же. – 1984. – № 10. – С. 69–71.
5. *Буй Д. Б.* К теории примивных программных алгебр (ППА) // Всесоюз. конф. по прикл. логике. – Новосибирск, 22–24 окт. 1985 г. Тез. докл. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1985. – С. 25–27.
6. *Буй Д. Б., Редько И. В.* Примитивные программные алгебры функций векторных, матричных и реляционных аргументов и значений // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1987. – № 7. – С. 3–5.
7. *Буй Д. Б., Редько И. В.* Примитивные программные алгебры вычислимых функций // Кибернетика. – 1987. – № 3. – С. 68–74.
8. *Губский Б. В.* Полнота в классах многоместных функций и предикатов // Методы реализации систем программирования. Сб. научн. тр. – Киев: Ин-т кибернетики АН УССР, 1989. – С. 46–49.
9. *Губский Б. В., Крапива Е. В., Редько И. В.* Примитивные программные алгебры вычислимых функций и предикатов на реляциях и таблицах в счетном и конечном алфавитах // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – № 10. – С. 78–79.
10. *Редько В. Н., Редько И. В., Гришко Н. В.* Программологические основание сущностной платформы // Пробл. програмування. – 2008. – № 2–3 (спец. випуск). – С. 75–83.
11. *Буй Д. Б., Богатирьова Ю. О.* Сучасний стан теорії мультимножин // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2010. – № 1. – С. 51–58.
12. *Буй Д. Б., Богатирьова Ю. О.* Огляд бібліографії по теорії мультимножин // Наук. зап. НАУКМА. Сер. Комп'ютерні науки. – 2010. – **112**. – С. 4–9.
13. *Буй Д. Б., Богатырева Ю. А.* Формальная модель ДНК-вычислений // Мат. Першого з'їзду "Медична та біологічна інформатика і кібернетика", Київ, 23–26 червня 2010 р. – 2010. – С. 221.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 07.02.2011

J. A. Bogatyreva, D. B. Buy, Academician of the NAS of Ukraine **V. N. Redko**

Primitive program algebras of functions of set (multiset) arguments and values

We consider the computability on sets and multisets which is introduced as the numerical computability. The primitive program algebras (PPAs) are the method for definition of a class of computable functions. Systems of generators of set and multiset PPAs are constructed.