УДК 519.1

Б. В. Олийнык

Реализуемость прямых произведений групп преобразований изометриями метрических пространств

(Представлено академиком НАН Украины Н. О. Перестюком)

Введено конструкцію s-добутку рівномірно дискретних метричних просторів скінченного діаметра. Показано, що з реалізовності двох груп перетворень ізометріями рівномірно дискретних метричних просторів скінченного діаметра випливає також реалізовність прямого добутку цих груп ізометріями рівномірно дискретного простору скінченного діаметра.

1. Проблема характеризации групп подстановок, которые реализуются как группы всех автоморфизмов дискретных структур того или иного класса, берет свое начало из теории графов, где она известна как проблема Кенига. Поэтому в общей ситуации эту проблему называют обобщенной проблемой Кенига для структур данного класса. Как сама проблема Кенига, так и ее обобщенные варианты для дискретных структур, близких к графам, в настоящее время остаются открытыми. В частности, отсутствует описание групп подстановок, представимых в виде полных групп изометрий конечных метрических пространств. Одним из направлений исследования (обобщенной) проблемы Кенига является изучение групп изометрий конструкций над дискретными структурами из рассматриваемого класса, что позволяет строить различные примеры реализуемых в данном классе групп подстановок. В теории графов сравнительно хорошо известны построения, приводящие к реализуемости прямых сумм и сплетений групп подстановок (см. [1–3]). Для метрических пространств конструкция прямой суммы и сплетения предложена в [4, 5]. Несколько неожиданно, что вопрос о представимости полными группами автоморфизмов графов прямых произведений групп подстановок оказался более трудным и до сих пор остается открытым. Легко указать примеры не реализуемых в таком смысле прямых произведений групп подстановок, но пока не известно, даже в конечном случае, как охарактеризовать группы подстановок, прямые произведения которых реализуются в виде (полных) групп автоморфизмов графов.

В данном сообщении рассматривается метрический аналог задачи о представимости прямого произведения групп подстановок. Оказалось, что для конечных метрических пространств ситуация существенно отличается от имеющей место в теории (конечных) графов. А именно, класс групп подстановок, представимых как группы изометрий метрических пространств является замкнутым относительно прямых произведений. На самом деле соответствующие конструкции метрических пространств и теорема о представимости рассматриваются для более широкого класса пространств. Напомним, что метрическое пространство (X, d_X) называется равномерно дискретным, если существует такое положительное число r_X, что для любых точек x_1 и x_2 пространства X, $x_1 \neq x_2$, справедливо неравенство $d_X(x_1, x_2) \geqslant r_X$.

В сообщении предлагается конструкция s-произведения равномерно дискретных метрических пространств конечного диаметра и доказывается теорема о замкнутости класса групп подстановок, представимых как группы всех изометрий равномерно дискретных пространств конечного диаметра относительно прямых произведений.

2. Прямыми произведениями метрических пространств (X, d_X) и (Y, d_Y) обычно называют метрические пространства, заданные на множестве $X \times Y$, расстояние между двумя парами точек (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in X \times Y$ в которых выражается как некоторая функция от $d_X(x_1, x_2)$ и $d_Y(y_1, y_2)$. Одной из наиболее употребляемых (особенно в теории конечных метрических пространств) является метрика следующего вида (см., например, [6, с. 386; 7, с. 141]):

$$d_\oplus((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2). \tag{1}$$

Прямое произведение пространств $(X \times Y, d_\oplus)$ имеет достаточно большую группу изометрий, что следует из такого утверждения.

Предложение 1. *Для любых пространств* (X, d_X) *и* (Y, d_Y) *группа преобразований* $(\mathrm{Isom}(X \times Y), X \times Y)$ *содержит подгруппу, изоморфную прямому произведению групп преобразований* $(\mathrm{Isom}\, X, X) \times (\mathrm{Isom}\, Y, Y)$.

Доказательство. Каждая пара елементов $\varphi = (g_1, g_2) \in \mathrm{Isom}\, X \times \mathrm{Isom}\, Y$ действует на прямом произведении $X \times Y$ покоординатно, т. е. получаем прямое произведение групп преобразований (см. [8, с. 60]). Поэтому достаточно убедиться, что преобразования из этой группы сохраняют метрику $d_\oplus$:

$$d_\oplus((x_1, y_1)^{(g_1, g_2)}, (x_2, y_2)^{(g_1, g_2)}) = d_\oplus((x_1^{g_1}, y_1^{g_2}), (x_2^{g_1}, y_2^{g_2})) = d_X(x_1^{g_1}, x_2^{g_1}) + d_Y(y_1^{g_2}, y_2^{g_2}).$$

Так как $g_1 \in \mathrm{Isom}\, X$, $g_2 \in \mathrm{Isom}\, Y$, то $d_X(x_1^{g_1}, x_2^{g_1}) = d_X(x_1, x_2)$, $d_Y(y_1^{g_2}, y_2^{g_2}) = d_Y(y_1, y_2)$. Следовательно,

$$d_\oplus((x_1, y_1)^{(g_1, g_2)}, (x_2, y_2)^{(g_1, g_2)}) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2) = d_\oplus((x_1, y_1), (x_2, y_2)).$$

Заметим, что для различных X и Y включение

$$\mathrm{Isom}(X \times Y) \geqslant \mathrm{Isom}\, X \times \mathrm{Isom}\, Y \tag{2}$$

может быть как строгим, так и превращаться в равенство.

П р и м е р 1. Пространство Хемминга или метрическое пространство гиперкуба H_m (см. [7, с. 50]) изометрично $H_{m-1} \times H_2$, но его группа изометрий, как известно, изоморфна $S_m \wr S_2$, т. е. строго содержит $\mathrm{Isom}\, H_{m-1} \times S_2$.

П р и м е р 2. Пусть $X = \{a, b\}$, $Y = \{c, d\}$ и единственное ненулевое значение метрики d_X равно 2, а метрики d_Y — 3. Тогда $\mathrm{Isom}\, X \simeq \mathrm{Isom}\, Y \simeq S_2$ и $\mathrm{Isom}\, X \times Y \simeq S_2 \times S_2$, т. е. включение (2) в этом случае превращается в равенство.

3. Напомним, что метрические пространства (X, d_1) и (X, d_2) называются изоморфными (см. [9]), если существует монотонно возрастающая непрерывная функция $s\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $s(0) = 0$, называемая шкалой, такая, что $d_1 = s(d_2)$. При этом пространство (X, d_1) обозначается $s(X)$.

Пусть (X, d_X), (Y, d_Y) — равномерно дискретные метрические пространства конечного диаметра, r_X и r_Y — такие положительные числа, что для любых точек x_1, $x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, выполняется неравенство $d_X(x_1, x_2) \geqslant r_X$, и для любых точек y_1, $y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$, имеет место неравенство $d_Y(y_1, y_2) \geqslant r_Y$.

Зафиксируем шкалы $s_1(t)$ и $s_2(t)$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$s_1(r_X) > \operatorname{diam}(s_2(Y)), \qquad s_2(r_Y) > \frac{1}{2}\operatorname{diam}(s_1(X)). \tag{3}$$

Из (3) получаем такую цепочку неравенств:

$$\operatorname{diam}(s_1(X)) \geqslant s_1(r_X) > \operatorname{diam}(s_2(Y)) \geqslant s_2(r_Y) > \frac{1}{2}\operatorname{diam}(s_1(X)).$$

Положим $s = (s_1(t), s_2(t))$.

Определение 1. *s-произведением* метрических пространств (X, d_X) и (Y, d_Y) будем называть метрическое пространство, определенное на декартовом произведении $X\times Y$ с метрикой d_s, которая определяется как сумма расстояний $s_1(d_X)$ и $s_2(d_Y)$:

$$d_s((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = s_1(d_X(x_1, x_2)) + s_2(d_Y(y_1, y_2)). \tag{4}$$

Будем обозначать *s-произведение* метрических пространств (X, d_X) и (Y, d_Y) символом $X \boxtimes_s Y$.

Заметим, что $X \boxtimes_s Y$ также является равномерно дискретным пространством конечного диаметра. Непосредственно из определений следует

Предложение 2. *Справедливо следующее равенство:*

$$\operatorname{diam}(X \boxtimes_s Y) = \operatorname{diam}(s_1(X)) + \operatorname{diam}(s_2(Y)).$$

Предложенная нами конструкция *s-произведения* метрических пространств (X, d_X) и (Y, d_Y) допускает следующую интерпретацию. Каждой точке y метрического пространства $s_2(Y)$ поставим в соответствие изометрическую копию пространства $s_1(X)$, и обозначим ее $s_1(X)_y$. На множестве $\{s_1(X)_y \mid y \in s(Y)\}$ метрика d_s задается таким правилом:

если точки $v_1 = (x_1, y_1)$ и $v_2 = (x_2, y_2)$ принадлежат одной копии пространства $s_1(X)$, то расстояние между ними равно $s_1(d_X(x_1, x_2))$;

если же точки v_1 и v_2 принадлежат разным копиям $s_1(X)_{y_1}$ и $s_1(X)_{y_2}$ и $x_1 = x_2$, то расстояние между ними равно $s_2(d_Y(y_1, y_2))$;

во всех остальных случаях расстояние между v_1 и v_2 определяется как $s_2(d_Y(y_1, y_2)) + s_1(d_X(x_1, x_2))$.

4. Перейдем теперь к характеризации групп изометрий s-произведений равномерно дискретных пространств конечного диаметра.

Лемма 1. *Если метрические пространства (X, d_1) и (X, d_2) изоморфны, то их группы изометрий равны.*

Лемма 2. *Пусть g — изометрия пространства $X \boxtimes_s Y$, $u = (x_1, y_1) \in X \times Y$, причем $g(u) = (x_2, y_2)$. Тогда $g(v) \in s_1(X)_{y_2}$ для любой точки $v \in s_1(X)_{y_1}$.*

Другими словами, если g — изометрия пространства $X \boxtimes_s Y$ и некоторая точка $u = (x_1, y_1)$ при изометрии g из копии $s_1(X)_{y_1}$ переходит в копию $s_1(X)_{y_2}$, то и все остальные точки из $s_1(X)_{y_1}$ при этой изометрии перейдут в $s_1(X)_{y_2}$.

Доказательство. Предположим от противного, что существует точка $v = (x_3, y_1)$, $v \in s_1(X)_{y_1}$, такая, что $g(v)$ не принадлежит $s_1(X)_{y_2}$. Тогда существует $y_3 \in Y$, $y_3 \neq y_2$ такая, что $g(v) \in s_1(X)_{y_3}$. Откуда в силу неравенства (3) и определения метрики d_s получаем такую оценку:

$$d_s(g(v), g(u)) = d_s((x_3, y_1), (x_2, y_2)) = s_1(d_X(x_3, x_2)) + s_2(d_Y(y_1, y_2)) \geqslant$$
$$\geqslant s_1(r_X) + s_2(r_Y) > \frac{1}{2}\operatorname{diam}(s_1(X)) + \frac{1}{2}\operatorname{diam}(s_1(X)) = \operatorname{diam}(s_1(X)).$$

Поскольку g — изометрия пространства $X \boxtimes Y$, то имеет место равенство

$$d_s(v,u) = d_s(g(v), g(u)).$$

Следовательно, справедливо неравенство $d_s(v,u) > \mathrm{diam}(s_1(X))$, что невозможно, поскольку точки u и v лежат в одной изометрической копии пространства $s_1(X)$. Таким образом, наше предположение неверно, что и доказывает лемму.

Теорема 1. *Группа изометрий s-произведения метрических пространств (X, d_X) и (Y, d_Y) изоморфна как группа преобразований прямому произведению их групп изометрий*

$$\mathrm{Isom}(X \boxtimes_s Y) \simeq \mathrm{Isom}\, X \times \mathrm{Isom}\, Y.$$

Доказательство. Легко видеть, что пространство $X \boxtimes_s Y$ можно также представить как прямое произведение пространств $s(X)$ и $s(Y)$, т. е. пространство $(s(X) \times s(Y), d_\oplus)$. Поэтому то, что каждая пара преобразований $\varphi = (g_1, g_2) \in \mathrm{Isom}\, X \times \mathrm{Isom}\, Y$ действует на декартовом произведении пространств X и Y как изометрия, следует из предложения 1 и леммы 1.

Убедимся теперь, что для любой изометрии φ пространства $X \boxtimes_s Y$ существуют $g_1 \in \in \mathrm{Isom}\, X$, $g_2 \in \mathrm{Isom}\, Y$ такие, что φ действует на пространстве $X \boxtimes_s Y$ как пара (g_1, g_2). Пусть образом некоторой точки (x_1, y_1) пространства $X \boxtimes_s Y$ при отображении φ есть точка (x_2, y_2). В силу леммы 1 при изометрии φ образы всех точек изометрической копии $s_1(X)_{y_1}$ будут принадлежать $s_1(X)_{y_2}$. Кроме того, так как φ^{-1} также изометрия, из леммы 1 следует, что для любого $v \in s_1(X)_{y_2}$ существует $u \in s_1(X)_{y_1}$ такое, что $\varphi(u) = v$. Следовательно, φ задает изометрическое соответствие между копиями пространства $s_1(X)_y$. Обозначим сужение функции φ на $s_1(X)_{y_1}$ символом g_1. Тогда $x_2 = g_1(x_1)$, т. е. $\varphi((x_1, y_1)) = (g_1(x_1), y_2)$. Покажем, что сужение g_3 функции φ на любую другую изометрическую копию пространства $s_1(X)_{y_3}$ будет действовать на $s_1(X)_{y_3}$ как g_1. Предположим, что это не так. Пусть $\varphi((x_1, y_3)) = (g_3(x_1), y_4)$. Тогда из нашего предположения следует, что $g_1(x_1) \neq g_3(x_1)$. В силу неравенств (3) получим

$$d_s((x_1, y_1), (x_1, y_3)) = s_2(d_Y(y_1, y_3)) < s_1(r_X). \tag{5}$$

Поскольку $g_1(x_1) \neq g_3(x_1)$, то из (3) следует

$$\begin{aligned} d_s((g_1(x_1), y_2), (g_3(x_1), y_4)) &= s_2(d_Y(y_2, y_4)) + s_1(d_X(g_1(x_1), g_3(x_1))) \geqslant \\ &\geqslant s_2(r_Y) + s_1(r_X) > s_1(r_X). \end{aligned} \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует, что $d_s((x_1, y_1), (x_1, y_3)) < d_s((g_1(x_1), y_2), (g_1(x_1), y_4))$, что невозможно, поскольку φ — изометрия пространства $X \boxtimes_s Y$.

Так как $s_1(r_X) > \mathrm{diam}(s_2(Y))$, то образ $\varphi(u)$ любой точки $u \in s_2(Y)_{x_1}$ будет принадлежать $s_2(Y)_{x_2}$. Из рассуждений, аналогичных приведенным выше, получаем, что изометрия φ задает изометрическое соответствие между копиями пространства $s_2(Y)_x$. Пусть g_2 — сужение функции φ на $s_2(Y)_{x_1}$. Тогда $\varphi((x_1, y_1)) = (x_2, g_2(y_1))$. Покажем, что сужение g_4 функции φ на любую другую изометрическую копию пространства $s_2(Y)_{x_3}$ будет действовать на этой изометрической копии как g_2. Пусть $\varphi((x_3, y_1)) = (x_4, g_4(y_1))$. Если действие g_4 на $s_2(Y)_{x_3}$ отлично от действия g_2 на $s_2(Y)_{x_1}$, то $g_2(y_1) \neq g_4(y_1)$. В силу неравенств (3) получим

$$d_s((x_1, y_1), (x_3, y_1)) = s_1(d_X(x_1, x_3)) \leqslant \mathrm{diam}(s_1(X)). \tag{7}$$

С другой стороны, из (3) следует

$$d_s((x_2, g_2(y_1)), (x_4, g_4(y_1))) = s_2(d_Y(g_2(y_1), g_4(y_1))) + s_1(d_X(x_2, x_4)) \geqslant$$

$$\geqslant s_2(r_Y) + s_1(r_X) > \frac{1}{2}\operatorname{diam}(s_1(X)) + \frac{1}{2}\operatorname{diam}(s_1(X)) = \operatorname{diam}(s_1(X)). \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует, что $d_s((x_1, y_1), (x_3, y_1)) < d_s((x_2, g_2(y_1)), (x_4, g_4(y_1)))$, что невозможно, поскольку φ — изометрия пространства $X \boxtimes_s Y$.

Следовательно, отображению φ естественным образом можно поставить в соответствие пару (g_1, g_2), где $g_1 \in \operatorname{Isom} X$, а $g_2 \in \operatorname{Isom} Y$, причем на каждую точку (x_1, y_1) пара (g_1, g_2) действует согласно равенству

$$(x_1, y_1)^{(g_1, g_2)} = (x_1^{g_1}, y_1^{g_2}).$$

Это и означает, что изометрию φ можно рассматривать как елемент прямого произведения $\operatorname{Isom} X \times \operatorname{Isom} Y$.

Из теоремы (1) непосредственно следует

Теорема 2. *Если группы преобразований (G_1, X_1) и (G_2, X_2) реализуются как группы изометрий равномерно дискретных метрических пространств конечного диаметра, то их прямое произведение $(G_1 \times G_2, X_1 \times X_2)$ также реализуется как группа изометрий пространства с такими же свойствами.*

Для групп изометрий произвольных метрических пространств вопрос о метрической реализуемости их прямых произведений как полных групп изометрий подходящих метрик пока остается открытым. Наиболее естественным подклассом класса равномерно дискретных метрических пространств конечного диаметра являются метрические пространства, метрика в которых принимает лишь конечное число значений, и, в частности, конечные метрические пространства.

Из теоремы 2 получаем

Следствие 1. *Если группы преобразований (G_1, X_1) и (G_2, X_2) реализуются как группы изометрий пространств с конечнозначными метриками, то прямое произведение $(G_1 \times G_2, X_1 \times X_2)$ также реализуется в таком виде.*

Следствие 2. *Прямое произведение конечных групп подстановок, реализуемых как группы изометрий конечных метрических пространств, также реализуется как группа изометрий конечного метрического пространства.*

1. *Sabidussi G.* The composition of graphs // Duke Math. J. – 1959. – **26**. – P. 693–696.
2. *Peisert W.* Direct product and uniqueness of automorphism groups of graphs // Discrete Math. – 1999. – **207**. – P. 189–197.
3. *Dobson E., Morris J.* Automorphism groups of wreath product digraphs // Electron. J. Combin. – 2009. – **16**, No 1. – R 17.
4. *Олійник Б. В.* k-однорідність n-кратної прямої суми метричного простору на себе // Вісн. Київ. ун-ту. – 2008. – № 3. – С. 36–38.
5. *Oliynyk B.* Isometry groups of wreath products of metric spaces // Algebra and Discrete Math. – 2007. – **4**. – P. 123–130.
6. *Энгелькинг Р.* Общая топология: Пер. с англ. – Москва: Мир, 1986. – 752 с.
7. *Деза М. М., Лоран М.* Геометрия разрезов и метрик. – Москва: МЦНМО, 2001. – 736 с.
8. *Сущанський В. І., Сікора В. С.* Операції на групах підстановок. Теорія та застосування. – Чернівці: Рута, 2003. – 255 с.

9. *Shoenberg I. J.* Metric spaces and completely monotone functions // Ann. Math. – 1938. – **39**, No 4. – P. 811–841.

Киевский национальный университет
им. Тараса Шевченко

Поступило в редакцию 19.11.2010

B. V. Oliynyk

Realizability of direct products of transformation groups by isometries of metric spaces

The s-product of uniformly bounded discrete metric spaces with finite diameters is introduced. It is shown that if two transformation groups have representations as isometry groups of uniformly discrete metric spaces of finite diameters, then the direct product of these transformation groups will also have a uniformly discrete metric space of finite diameter, for which it is isomorphic to its isometry group.