Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

1 • 2008

МЕХАНІКА

УДК 539.3

С.В. Бабенко

Об оценке решений линейных неавтономных систем дифференциальных уравнений на основе принципа сравнения

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Мартынюком)

The estimations of solutions of the linear non-autonomous systems of ordinary differential equations are offered when the matrix on the right part of the system is quasimonotone, and the terms of stability are got for systems of such a type.

В настоящей работе предложены оценки решений линейных неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений в предположении о квазимонотонности матрицы правой части системы. Эти оценки дают возможность в некоторых случаях исследовать устойчивость системы. Предложенный подход является развитием идей работы [1].

Рассматривается линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $A(t) \in C([t_0; +\infty); \mathbb{R}^{n\times n})$.

Определение [2]. Матрица $A(t)$ обладает свойством квазимонотонности, если и только если при всех $t \in [t_0, \infty)$ и i, $j = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq j$ выполняется неравенство $a_{ij}(t) \geqslant 0$.

Отметим, что условие квазимонотонности матрицы $A(t)$ гарантирует положительность матрицанта $\Omega(t, t_0)$ системы (1) при всех $t \geqslant t_0$ (см. [3]). Из определения квазимонотонности непосредственно следует, что существует неотрицательная интегрируемая функция $\gamma(t)$ такая, что матрица $A(t) + \gamma(t)I$ положительна. Обозначим $\overline{A}(t)$ произвольную матрицу, мажорирующую матрицу $A(t) + \gamma(t)I$, т. е. $\overline{A}(t) \geqslant A(t) + \gamma(t)I$. Матрицант линейной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \overline{A}(t)x, \qquad x(t_0) = x_0$$

обозначим через $\overline{\Omega}(t, t_0)$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма. *Пусть матрица* $A(t)$ *системы* (1) *обладает свойством квазимонотонности, тогда*

$$0 \leqslant \Omega(t,t_0) \leqslant e^{-\int\limits_{t_0}^{t}\gamma(s)ds}\overline{\Omega}(t,t_0), \qquad t \geqslant t_0. \tag{2}$$

Доказательство. Разобьем промежуток $[t_0,t]$ на m равных частей точками τ_k, $t_0=\tau_0 < < \tau_1 < \ldots < \tau_m = t$, обозначим длину каждого из полученных отрезков через h: $\tau_k-\tau_{k-1} = = h = (t-t_0)/m$, $k=1,\ldots,m$. Рассмотрим функции $B(t)$ и $\gamma^*(t)$, определенные равенствами $B(s)=A(\tau_k)$, $\gamma^*(s)=\gamma(\tau_k)$ для всех $s\in(\tau_{k-1},\tau_k]$. Используя свойство матрицанта системы (1), приходим к равенству

$$\Omega(t,t_0)=\Omega(t,\tau_{m-1})\Omega(\tau_{m-1},\tau_{m-2})\cdots\Omega(\tau_2,\tau_1)\cdots\Omega(\tau_1,t_0).$$

Матрицант $\Omega_1(t,t_0)$ системы

$$\frac{dx(t)}{dt}=B(t)x(t), x(t_0)=x_0 \tag{3}$$

имеет вид

$$\Omega_1(t,t_0)=\Omega_1(t,\tau_{m-1})\Omega_1(\tau_{m-1},\tau_{m-2})\cdots\Omega_1(\tau_1,t_0)=e^{A(t)h}e^{A(\tau_{m-1})h}\cdots e^{A(\tau_1)h}. \tag{4}$$

Вследствие выбора функции $\gamma(t)$ получим равенство

$$\Omega_1(t,t_0)=e^{(A(t)+\gamma(t)I)h-\gamma(t)hI}e^{(A(\tau_{m-1})+\gamma(\tau_{m-1})I)h-\gamma(\tau_{m-1})hI}\cdots e^{(A(\tau_1)+\gamma(\tau_1)I)h-\gamma(\tau_1)hI}=$$

$$=e^{(A(\tau_m)+\gamma(\tau_m)I)h}\cdots e^{(A(\tau_1)+\gamma(\tau_1)I)h}e^{-\sum\limits_{k=1}^{m}\gamma(\tau_k)h}=\Omega_2(t,t_0)e^{-\sum\limits_{k=1}^{m}\gamma(\tau_k)h},$$

где $\Omega_2(t,t_0)$ — матрицант системы

$$\frac{dx(t)}{dt}=(B(t)+\gamma^*(t)I)x(t). \tag{5}$$

Ошибка приближения $\Omega(t,t_0) \approx \Omega_3(t,t_0)e^{-\int\limits_{t_0}^{t}\gamma(s)ds}$, где $\Omega_3(t,t_0)$ — матрицант системы $dx(t)/dt=(A(t)+\gamma(t)I)x(t)$, есть бесконечно малой величиной при $h\to 0$.

Действительно, согласно [4], $\Omega(t,t_0)=\Omega_1(t,t_0)+o(1)$ и, аналогично, $\Omega_2(t,t_0)=\Omega_3(t,t_0)+ + o(1)$, поэтому

$$\Omega(t,t_0)=\Omega_1(t,t_0)+o(1)=\Omega_2(t,t_0)e^{-\sum\limits_{k=1}^{m}\gamma(\tau_k)h}+o(1)=(\Omega_3(t,t_0)+o(1))e^{-\int\limits_{t_0}^{t}\gamma(s)ds+o(1)}+$$

$$+o(1)=(\Omega_3(t,t_0)+o(1))e^{-\int\limits_{t_0}^{t}\gamma(s)ds}(1+o(1))+o(1)=\Omega_3(t,t_0)e^{-\int\limits_{t_0}^{t}\gamma(s)ds}+o(1),$$

т. е. $\Omega(t,t_0)=\Omega_3(t,t_0)e^{-\int\limits_{t_0}^{t}\gamma(s)ds}+o(1)$. Переходя в последнем равенстве к пределу, когда $h\to 0$, получим равенство $\Omega(t,t_0)=\Omega_3(t,t_0)e^{-\int\limits_{t_0}^{t}\gamma(s)ds}$.

Поскольку матрицы $A(t)+\gamma(t)I$ и $\overline{A}(t)$ — неотрицательные и $A(t)+\gamma(t)I \leqslant \overline{A}(t)$, то $\Omega(t,t_0) \leqslant e^{-\int\limits_{t_0}^{t}\gamma(s)ds}\overline{\Omega}(t,t_0)$. Лемма доказана.

На основе установленной леммы можно доказать следующий результат.

Теорема 1. *Пусть в системе* (1) *матрица* $A(t)$ *обладает свойством квазимонотонности и существует мажорирующая матрица* $\overline{A}(t) \geqslant A(t)+\gamma(t)I$ *такая, что*

1) существует постоянная матрица $c=c(t_0)>0$ *такова, что при всех* $t \geqslant t_0$ *выполняется неравенство*

$$e^{-\int\limits_{t_0}^{t}\gamma(s)ds}\overline{\Omega}(t,t_0) < c(t_0);$$

2) выполняется условие (1) и постоянную $c(t_0)$ *можно выбрать независимо от* $t_0>0$*;*

3) выполняется условие (1) и

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\int\limits_{t_0}^{t}\gamma(s)ds}\overline{\Omega}(t,t_0)=0.$$

Тогда решение $x=0$ *системы* (1)

1) устойчиво по Ляпунову;

2) равномерно устойчиво по Ляпунову;

3) асимптотически устойчиво.

П р и м е р 1. Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -\alpha|\sin t|x_1+\beta(1+\cos t)x_2,\\ \frac{dx_2}{dt} &= \beta(1+\cos t)x_1-\alpha|\cos t|x_2,\end{aligned} \tag{6}$$

где α, β — положительные параметры.

Выберем $\gamma(t)=\alpha(|\sin t|+|\cos t|)$, тогда

$$A(t)+\gamma(t)I=\begin{pmatrix}\alpha|\cos t| & \beta(1+\cos t)\\ \beta(1+\cos t) & \alpha|\sin t|\end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix}\alpha & 2\beta\\ 2\beta & \alpha\end{pmatrix}=\overline{A}.$$

Собственные значения матрицы $\overline{A}$ равны: $\lambda_{1,2}=\alpha\pm 2\beta$ и $\int\limits_0^{2\pi}\gamma(s)ds=8\alpha$, тогда $\Omega(2\pi,0) \leqslant$ $\leqslant e^{-8\alpha}e^{\overline{A}2\pi}$ и, как следствие,

$$\|\Omega^k(2\pi,0)\| \leqslant e^{-8k\alpha}\|e^{\overline{A}2\pi k}\| \leqslant N_\varepsilon e^{-8\alpha k}e^{2\pi k(\alpha+2\beta+\varepsilon)}=N_\varepsilon e^{2k(\pi-4)\alpha+4k\beta\pi+2k\pi\varepsilon},$$

где ε — сколь угодно малое положительное число, $N_\varepsilon>0$. При $2(\pi-4)\alpha+4\beta\pi<0$ и достаточно малом $\varepsilon>0$ выполняется неравенство $2(\pi-4)\alpha+4\beta\pi+2\pi\varepsilon<0$ и для любого $t\in\mathbb{R}_+$ будет $\Omega(t,0)=$ $=\Omega(t,2\pi k)\Omega^k(2\pi,0)$, где $k=[\frac{t}{/}(2\pi)]$, тогда $\|\Omega(t,0)\| \leqslant c\|\Omega^k(2\pi,0)\| \leqslant cN_\varepsilon e^{k(2(\pi-4)\alpha+4\beta\pi+2\pi\varepsilon)} \to 0$, $c>0$ при $t\to\infty$.

Таким образом, неравенство $2\beta\pi<(4-\pi)\alpha$ гарантирует асимптотическую устойчивость решения $x_1=x_2=0$ системы (6).

Рассмотрим более подробно случай системы с периодическими коэффициентами, т. е. существует постоянная $T > 0$ такая, что при всех $t \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $A(t+T) = A(t)$. Определим множества

$$M_0 = \{t \in [t_0, t_0 + T] | a_{ii}(t) > 0, i = 1, 2, \ldots, n\},$$

$$M_k = \Big\{t \in [t_0; t_0 + T] \setminus M_0 | \min_{i=1,2,\ldots,n} a_{ii}(t) = a_{kk}(t)\Big\} (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Предположим, что множества M_k представимы в виде $M_k = \coprod\limits_{i=1}^{m_k} (\alpha_i^k, \beta_i^k]$, $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Положим $\gamma(s) = 0$, когда $s \in M_0$ и $\gamma(s) = -a_{kk}(s)$ при $s \in M_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Обозначим $A_{ik}(t) = A(t) + \gamma(t)I$ и $\overline{A}_{ik} = [\overline{a}_{pq}^{ik}]_{p,q=1}^n$, в которой $\overline{a}_{pq}^{ik} = \sup\limits_{s \in (\alpha_i^k, \beta_i^k]} a_{pq}^{ik}(s)$, где $a_{pq}^{ik}(s)$ — элементы матрицы $A_{ik}(s)$, а $\overline{\Omega}_{ik}$ — матрицант системы

$$\frac{dx(t)}{dt} = \overline{A}_{ik} x(t).$$

Теорема 2. *Пусть линейная система* (1) *с периодическими коэффициентами такая, что матрица* $A(t)$ *— квазимонотонная.*

Тогда матрицант $\Omega(t_0 + T, t_0)$ *системы* (1) *на периоде* T *допускает оценку*

$$\Omega(t_0 + T, t_0) \leqslant e^{-\int\limits_{t_0}^{t_0+T} \gamma(s) ds} \prod_{i,k} \overline{\Omega}_{ik},$$

где множители $\overline{\Omega}_{ik}$ *расположены в том же порядке, что и соответствующие промежутки* $(\alpha_i^k, \beta_i^k]$ *на сегменте* $[t_0; t_0 + T]$.

Доказательство. Воспользовавшись леммой, получим:

$$\Omega(\beta_i^k, \alpha_i^k) \leqslant e^{-\int\limits_{\alpha_i^k}^{\beta_i^k} \gamma(s) ds} \overline{\Omega}_{ik}, \tag{7}$$

где $\overline{\Omega}_{ik}$ — матрицант системы (7) на выделенном промежутке. Проделаем на каждом из промежутков $(\alpha_i^k, \beta_i^k]$ то же самое и перемножим полученные неравенства так, чтобы для каждых двух соседних множителей левой части $\Omega(u_1, v_1)$ и $\Omega(u_2, v_2)$ было: $u_1 = v_2$. Теперь, следуя групповому свойству матрицанта, легко увидеть, что $\Omega(t_0 + T, t_0) \leqslant e^{-\int\limits_{t_0}^{t_0+T} \gamma(s) ds} \prod\limits_{i,k} \overline{\Omega}_{ik}$, что и требовалось доказать.

Следствие. *Если спектральный радиус матрицы* $\prod\limits_{i,k} \overline{\Omega}_{ik}$ *меньше значения* $\exp \int\limits_{t_0}^{t_0+T} \gamma(s) ds$, *то нулевое решение системы* (1) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Обозначим $\Phi = \Omega(t_0 + T, t_0)$, $\Psi = e^{-\int\limits_{t_0}^{t_0+T} \gamma(s) ds} \prod\limits_{i,k} \overline{\Omega}_{ik}$. Поскольку выполняется неравенство $0 \leqslant \Phi \leqslant \Psi$, то $0 \leqslant \Phi^k \leqslant \Psi^k$ и, вследствие условия, $\Psi^k \to 0$

при $k \to \infty$, поэтому $\Phi^k \to 0$ при $k \to \infty$. Отсюда следует, что спектральный радиус матрицы монодромии $\Omega(t_0+T, t_0)$ меньше единицы, поэтому [5] система (1) асимптотически устойчива.

Пример 2. Рассмотрим пример 1 на основе теоремы 2.

Ясно, что $M_0 = \varnothing$, $M_1 = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \bigcup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$, $M_2 = \left(0, \frac{\pi}{4}\right] \bigcup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \bigcup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$.

Для всех $t \in M_1$ будет $\gamma(t) = \alpha|\sin t|$, а для всех $t \in M_2$ получим $\gamma(t) = \alpha|\cos t|$. Далее:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \beta(1+\cos t) \\ \beta(1+\cos t) & \alpha(|\sin t| - |\cos t|) \end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} 0 & 2\beta \\ 2\beta & \alpha \end{pmatrix} = \overline{A}_1,$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \beta(1+\cos t) \\ \beta(1+\cos t) & \alpha(|\cos t| - |\sin t|) \end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} \alpha & 2\beta \\ 2\beta & 0 \end{pmatrix} = \overline{A}_2.$$

По теореме 2 выполняется неравенство

$$\Omega\left(\frac{9\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \leqslant e^{-\int\limits_0^{2\pi}\gamma(s)ds}\,\overline{\Omega}_1\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)\overline{\Omega}_2\left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)\overline{\Omega}_1\left(\frac{7\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)\overline{\Omega}_2\left(\frac{9\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right) =$$

$$= e^{-\int\limits_0^{2\pi}\gamma(s)ds} e^{\overline{A}_1\pi/2} e^{\overline{A}_2\pi/2} e^{\overline{A}_1\pi/2} e^{\overline{A}_2\pi/2} = G.$$

Согласно следствию 1, система (6) будет асимптотически устойчивой, если выполняется неравенство $-1 + |\operatorname{tr} G| < \det G < 1$ (см. [5]).

Обозначим $\Gamma = e^{\overline{A}_1\pi/2} e^{\overline{A}_2\pi/2}$, тогда $G = e^{-4\sqrt{2}\alpha}\Gamma^2$, $\det\Gamma = e^{\pi\alpha}$, $\det G = e^{2\left(\pi - 4\sqrt{2}\right)\alpha}$ и

$$\operatorname{tr}\Gamma = \frac{2e^{\pi\alpha/2}\left(\alpha^2 + 16\beta^2 \operatorname{ch}\dfrac{\pi\sqrt{\alpha^2+16\beta^2}}{2}\right)}{\alpha^2 + 16\beta^2}.$$

Учитывая равенство $\operatorname{tr}\Gamma^2 = (\operatorname{tr}\Gamma)^2 - 2\det\Gamma$ и следствие 1, заключаем, что система (6) будет асимптотически устойчивой, если выполняется неравенство

$$\frac{\alpha^2 + 16\beta^2 \operatorname{ch}\dfrac{\pi\sqrt{\alpha^2+16\beta^2}}{2}}{\alpha^2 + 16\beta^2} < \operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{2}\right)\alpha.$$

Замечание. В некоторых случаях метод сравнения на основе концепции векторной функции Ляпунова позволяет избавиться от условия квазимонотонности матрицы $A(t)$ в системе (1).

Действительно, рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{8}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $A(t) \in C([t_0, \infty); \mathbb{R}^{n\times n})$, и вектор-функцию Ляпунова [6]

$$V(x) = (v_1(x), v_2(x), \ldots, v_n(x))^T = (|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)^T.$$

Найдем производные от ее компонент в силу системы (9)

$$\left.\frac{dv_i}{dt}\right|_{(9)} = \operatorname{sign}(x_i)\frac{dx_i}{dt} = \operatorname{sign}(x_i)(a_{i1}(t)x_1 + a_{i2}(t)x_2 + \cdots + a_{in}(t)x_n) =$$

$$= a_{i1}(t)x_1 \operatorname{sign}(x_i) + \cdots + a_{ii}(t)x_i \operatorname{sign}(x_i) + \cdots + a_{in}(t)x_n \operatorname{sign}(x_i) =$$
$$= a_{i1}(t)x_1 \operatorname{sign}(x_i) + \cdots + a_{ii}(t)v_i + \cdots + a_{in}(t)x_n \operatorname{sign}(x_i) \leqslant$$
$$\leqslant |a_{i1}(t)|v_1 + \cdots + |a_{i,i-1}(t)|v_{i-1} + a_{ii}(t)v_i + |a_{i,i+1}(t)|v_{i+1} + \cdots + |a_{in}(t)|v_n.$$

В итоге получим дифференциальное неравенство $dV/dt \leqslant P(t)V$, где матрица $P(t) = [p_{ij}]_{i,j=1}^n$ уже обладает свойством квазимонотонности, поскольку $p_{ij}(t) = |a_{ij}(t)| \geqslant 0$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n,\ i \neq j)$. Если нулевое решение системы сравнения

$$\frac{du}{dt} = P(t)u, \qquad u(t_0) = u_0$$

устойчиво, то, согласно принципу сравнения, линейная система дифференциальных уравнений (9) будет устойчивой по Ляпунову.

Автор благодарит канд. физ.-мат. наук В. И. Слынько за постановку задачи и постоянную поддержку в работе.

1. *Двирный А. И., Слынько В. И.* Об устойчивости линейных импульсных систем относительно конуса // Доп. НАН України. – 2004. – № 4. – С. 42–48.
2. *Лакшмикантам В., Лила С., Мартынюк А. А.* Устойчивость движения: метод сравнения. – Киев: Наук. думка, 1991. – 248 с.
3. *Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев В. И.* Позитивные линейные системы. – Москва: Наука, 1985. – 256 с.
4. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – Москва: Наука, 1970. – 536 с.
5. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – Москва: Наука, 1967. – 472 с.
6. *Груйич Л. Т., Мартынюк А. А., Риббенс-Павелла М.* Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях. – Киев: Наук. думка, 1984. – 307 с.

Черкасский национальный университет
им. Богдана Хмельницкого

Поступило в редакцию 23.05.2007