УДК 519.81

В. М. Михалевич

Многократный выбор решения при наличии одной из форм принципа гарантированного результата

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Чикрием)

Розглядається задача багатократного вибору в системі прийняття рішень, ситуація в якій описується необаєсівською моделлю з досить природними правилами вибору рішення, одне з яких можна інтерпретувати як деяку форму принципу гарантованого результату.

Задачу решения (ЗР), когда последствия определяются действием (решение) и состоянием природы (ненаблюдаемый параметр), будем называть параметрической ЗР. Формализуем ее следующим образом.

Определение 1. *Схемой ситуации задачи решения* (ССЗР) называется упорядоченная четверка вида (X, Θ, U, g), где для произвольных непустых множеств X, Θ, U g является отображением $\Theta \times U$ на X. При этом множество X называется *множеством последствий* с алгеброй подмножеств Ξ, Θ — *множеством значений ненаблюдаемого параметра* с алгеброй подмножеств Σ, U — *множеством решений*, а g — *отображением последствий* ССЗР (X, Θ, U, g). Класс всех параметрических ССЗР вида (X, Θ, U, g) будем обозначать через $\mathbb{Z}$, а $\mathbb{Z}(X) := \{(X, \cdot, \cdot, \cdot) \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{Z}(X, \Theta) := \{(X, \Theta, \cdot, \cdot) \in \mathbb{Z}\}$.

Продолжая изучение неопределенности путем “перехода явным образом к рассмотрению бесконечного числа “испытаний” ... иными словами задачи принятия “массовых” решений” (см. [1, с. 42]), рассмотрим многократный выбор решений $(u_1, \ldots, u_n)$, $n \in \mathbb{N}$, в параметрической ситуации ЗР, заданной своей ССЗР $Z = (X, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}(X, \Theta)$. При этом соответствующий вектор последствий $(x_1, \ldots, x_n)$, в зависимости от соответствующих значений ненаблюдаемого параметра $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$, удовлетворяет условиям $x_i = g(\theta_i, u_i)$, $i = \overline{1, n}$.

Для любого непустого множества A через A^∞ всюду далее будем обозначать множество $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A^n$.

Под *основной* ЗР при многократном выборе в ситуации, заданной ССЗР $Z = (X, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}(X, \Theta)$, что коротко будем называть основной *задачей многократных решений(ЗМР)* в классе ССЗР $\mathbb{Z}(X, \Theta)$, мы будем понимать установку этим ТПР-ом предпочтений на множестве X^∞ (первая основная ЗМР) и на множестве U^∞ (вторая основная ЗМР) в ситуации, заданной ССЗР $Z = (X, \Theta, U, g)$.

Определение 2. ПВП для ЗМР в $\mathbb{Z}'(X, \Theta) \subseteq \mathbb{Z}(X, \Theta)$ будем называть всякое отображение $\pi = (\pi_1, \pi_2)$, определенное на $\mathbb{Z}'(X, \Theta)$ и сопоставляющее каждой $Z = (X, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'(X, \Theta)$ некоторую пару бинарных отношений $\pi_{1Z} = (X^\infty, \succeqq_Z)$ и $\pi_{2Z} = (U^\infty, \succeqq^*_Z)$, т. е. $\pi_{1Z} \in [2^{(X^\infty)^2}]^{\mathbb{Z}'(X,\Theta)}$, $\pi_{2Z} \in [2^{(U^\infty)^2}]^{\mathbb{Z}'(X,\Theta)}$, а $\pi_Z = (\pi_{1Z}, \pi_{2Z})$. Класс всех ПВП для ЗМР в $\mathbb{Z}'(X, \Theta)$ будем обозначать $\Pi^\infty(\mathbb{Z}'(X, \Theta))$.

Пусть A — произвольное непустое множество.

Определение 3. *Статистическим предпочтением* на множестве А (см. [1]) будем называть такое бинарное отношение $(\succeqq)$ на A^∞, которое обладает следующими свойствами:

C1) для любых $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c} \in A^{\infty}$, если $\overline{a} \succcurlyeq \overline{b} \succcurlyeq \overline{c}$, то $\overline{a} \succcurlyeq \overline{c}$;

C2) для любых $\overline{a}$, $\overline{b} \in A^{\infty}$ либо $\overline{a} \succcurlyeq \overline{b}$, либо $\overline{b} \succcurlyeq \overline{a}$;

C3) для любых $\overline{a}$, $\overline{b} \in A^{\infty}$, если $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\overline{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ и $b_k = a_{i_k} (1 \leqslant k \leqslant n)$, $k, n \in \mathbb{N}$, где

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix} -$$

некоторая подстановка, то $\overline{a} \sim \overline{b}$ (где$(\sim)$, как обычно, — симметричная часть $(\succcurlyeq)$, т. е. $(\sim) = (\succcurlyeq) \bigcap (\succcurlyeq)^{-1}$);

C4) для любых $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d} \in A^{\infty}$, если $\overline{a} \sim \overline{b}, \overline{a} = (a_1, \ldots, a_k), \overline{b} = (b_1, \ldots, b_l), \overline{c} = (c_1, \ldots, c_m)$, $\overline{d} = (d_1, \ldots, d_r)$, k, l, m, $r \in \mathbb{N}$, то $(c_1, \ldots, c_m, a_1, \ldots, a_k) \succcurlyeq (d_1, \ldots, d_r, b_1, \ldots, b_l)$ равносильно $\overline{c} \succcurlyeq \overline{d}$;

C5) для любых $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d} \in A^{\infty}$, если $\overline{a} \succ \overline{b}$ (где $(\succ)$ — асимметрическая часть $(\succcurlyeq)$, т. е. $(\succ) = (\succcurlyeq) \setminus (\sim)$), $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_k)$, $\overline{b} = (b_1, \ldots, b_l)$, $\overline{c} = (c_1, \ldots, c_m)$, $\overline{d} = (d_1, \ldots, d_r)$, $k, l, m, r \in \mathbb{N}$, то существует такое натуральное число n, для которого

$$(\underbrace{a_1, \ldots, a_k, a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_1, \ldots, a_k}_{n \text{ раз}}, c_1, \ldots, c_m) \succ$$
$$\succ (\underbrace{b_1, \ldots, b_l, b_1, \ldots, b_l, \ldots, b_1, \ldots, b_l}_{n \text{ раз}}, d_1, \ldots, d_r).$$

При этом введем для произвольных $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_k)$, $\overline{b} = (b_1, \ldots, b_l)$, где $k, l \in \mathbb{N}$, принадлежащих A^{∞} бинарную операцию, которую будем обозначать $\oplus$, следующим образом

$$\overline{a} \oplus \overline{b} \stackrel{\text{def}}{=} (a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l) \in A^{\infty}.$$

Из определения операции $\oplus$ следует представление $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ в виде $\overline{a} = a_1 \oplus \cdots \oplus$ $\oplus\, a_n$, $n \in \mathbb{N}$, что коротко будем обозначать

$$\overline{a} = \bigoplus_{i=1}^{n} a_i.$$

Тогда естественно также ввести операцию $\otimes \colon N \times A^{\infty} \to A^{\infty}$, так, что для произвольных $n \in \mathbb{N}$ и $\overline{a} \in A^{\infty}$ выполняется соотношение

$$n \otimes \overline{a} = \underbrace{\overline{a} \oplus \ldots \oplus \overline{a}}_{n \text{ раз}}.$$

Рассмотрим так называемые необайесовские ЗР (см. [2]), расширив множество последствий X до множества Y *случайных последствий*, представляющих собой множество распределений на X следующего вида:

$$Y = \left\{ (y \colon X \to [0,1]) \colon \operatorname{card}\{x \colon y(x) \neq 0\} < \infty, \sum_{x \in X} y(x) = 1 \right\}. \tag{1}$$

Определение 4. Для произвольных непустых множеств A, Θ и нестрогого порядка $(A, \succcurlyeq)$ отображение $f \in A^{\Theta}$ называется *ограниченным* относительно $(A, \succcurlyeq)$, если существуют такие $a, b \in A$, что $a \succcurlyeq f(\theta) \succcurlyeq b$ для всех $\theta \in \Theta$.

Определение 5. Для произвольных непустых множеств (A, Θ), нестрогого порядка $(A, \succcurlyeq)$ и алгебры $\Sigma \subseteq 2^{\Theta}$ отображение $f \in A^{\Theta}$ называется Σ-*измеримым* относительно $(A, \succcurlyeq)$, если для всех элементов $a \in A$ множества $\{\theta \colon f(\theta) \succ a\}$ и $\{\theta : f(\theta) \succcurlyeq a\}$ принадлежат Σ.

Через $L_0(A, \Theta)$ будем обозначать множество всех Σ-измеримых конечнозначных отображений на множестве Θ со значениями в множестве A, т. е. $f \in L_0(A, \Theta)$, если $\operatorname{card}\{f(\Theta)\} < \infty$ и $f^{-1}(a) \in \Sigma\ \forall\, a \in A$.

Определение 6. Для произвольных непустых множеств X, Θ и нестрогого порядка $(X, \succcurlyeq)$ отображение $f \in Y^{\Theta}$, где Y определяется согласно (1), будем называть *ограниченным* относительно $(X, \succcurlyeq)$, если отображения $\underline{f}$, $\overline{f} \in X^{\Theta}$, заданные на Θ как

$$\underline{f}(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{x \in X \colon [f(\theta)](x) \neq 0\} \qquad \forall\, \theta \in \Theta,$$

$$\overline{f}(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{x \in X \colon [f(\theta)](x) \neq 0\} \qquad \forall\, \theta \in \Theta,$$

являются ограниченными относительно $(X, \succcurlyeq)$.

Определение 7. ССЗР $Z = (Y, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}(Y, \Theta)$, где Y определяется согласно (1), будем называть *определяющей*, если

$$L_0(Y, \Theta) \subseteq g(\cdot, U) = \operatorname{co}[g(\cdot, U)] \subseteq Y^{\Theta}. \tag{2}$$

Через $L_{\succcurlyeq}(Y, \Theta)$ будем обозначать множество всех ограниченных и Σ-измеримых относительно нестрогого порядка $(X, \succcurlyeq)$ отображений на множестве Θ со значениями в множестве Y.

Определим класс ПВП в ЗМР для $\mathbb{Z}'(Y, \Theta) \subseteq \mathbb{Z}(Y, \Theta)$, который будем обозначать через $\Pi_0^{\infty}(\mathbb{Z}'(Y, \Theta))$, как подкласс всех таких ПВП $\pi \in \Pi^{\infty}(\mathbb{Z}'(Y, \Theta))$, что для любой определяющей ССЗР $Z = (Y, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'(Y, \Theta)$ выполняются условия:

Y1) если $Z_i = (Y, \Theta, U_i, g_i) \in \mathbb{Z}'(Y, \Theta)$, $i = \overline{1, 2}$, то

а) $(Y, \succcurlyeq_{Z_1}) = (Y, \succcurlyeq_{Z_2}) =: (Y, \succcurlyeq)$ — невырожденное, т. е. не для всех $y_1, y_2 \in Y$ выполняется $y_1 \succcurlyeq y_2$,

б) из $(y_1)_{\Theta} \succcurlyeq_Z^* (y_2)_{\Theta}$ следует $y_1 \succcurlyeq y_2\ \forall\, y_1, y_2 \in Y$,

в) из $u_1, v_1 \in U_1$, $u_2, v_2 \in U_2$, $g_1(\theta, u_1) = g_2(\theta, u_2)$, $g_1(\theta, v_1) = g_2(\theta, v_2)\ \forall\, \theta \in \Theta$, $u_1 \succcurlyeq_{Z_1}^* v_1$ следует $u_2 \succcurlyeq_{Z_2}^* v_2$;

Y2) $(U^{\infty}, \succcurlyeq_Z^*)$ — нестрогий порядок;

Y3) если $u_i \in U$, $i = \overline{1, 2}$, $y \in Y$, $u_1 \succ_Z^* u_2$, $\alpha \in (0, 1)$, то

$$\alpha u_1 + (1 - \alpha) y_{\Theta} \succ_Z^* \alpha u_2 + (1 - \alpha) y_{\Theta};$$

Y4) если $u_i \in U$, $i = \overline{1, 3}$, $u_1 \succ_Z^* u_2 \succ_Z^* u_3$, то найдутся такие α, $\beta \in (0, 1)$, что

$$\alpha u_1 + (1 - \alpha) u_3 \succ_Z^* u_2 \succ_Z^* \beta u_1 + (1 - \beta) u_3;$$

Y5) если $\overline{u}, \overline{v} \in U^{\infty}$, $\overline{u} = \sum\limits_{i=1}^{k} u_i$, $\overline{v} = \sum\limits_{j=1}^{l} v_j$ и $\sum\limits_{i=1}^{k} g(\theta, u_i) \succcurlyeq_Z \sum\limits_{j=1}^{l} g(\theta, v_j)$ для любых $k, l \in \mathbb{N}$, $\theta \in \Theta$, то

$$\overline{u} \succcurlyeq_Z^* \overline{v};$$

Y6) если $u_i \in U$, $y_i \in Y$, $i = \overline{1,2}$, то

$$u_1 \oplus u_2 \sim {}^*_Z u_2 \oplus u_1, \qquad y_1 \oplus y_2 \sim {}_Z y_2 \oplus y_1;$$

Y7) если $\overline{u}_i \in U^\infty$, $\overline{y}_i \in Y^\infty$, $i = \overline{1,4}$, то из $\overline{u_1} \sim {}^*_Z \overline{u}_2$ следует, что $\overline{u}_3 \oplus \overline{u}_1 \succcurlyeq^*_Z \overline{u}_4 \oplus \overline{u}_2$ равносильно $\overline{u}_3 \succcurlyeq^*_Z \overline{u}_4$, а из $\overline{y_1} \sim {}^*_Z \overline{y}_2$ следует, что $\overline{y}_3 \oplus \overline{y}_1 \succcurlyeq^*_Z \overline{y}_4 \oplus \overline{y}_2$ равносильно $\overline{y}_3 \succcurlyeq^*_Z \overline{y}_4$;

Y8) если $\overline{u}_i \in U^\infty$, $\overline{y}_i \in Y^\infty$, $i = \overline{1,4}$, то из $\overline{u_1} \succcurlyeq^*_Z \overline{u}_2$ следует, что найдется такое натуральное n, для которого

$$(n \otimes \overline{u}_1) \oplus \overline{u}_3 \succ^*_Z (n \otimes \overline{u}_2) \oplus \overline{u}_4,$$

а из $\overline{y_1} \succcurlyeq^*_Z \overline{y}_2$ следует, что найдется такое натуральное n, для которого

$$(n \otimes \overline{y}_1) \oplus \overline{y}_3 \succ^*_Z (n \otimes \overline{y}_2) \oplus \overline{y}_4;$$

Y9) если $u_i \in U$, $i = \overline{1,3}$, то из

$$g(\theta, u_1) \oplus g(\theta, u_2) \sim {}_Z 2 \otimes g(\theta, u_3) \qquad \forall\, \theta \in \Theta \tag{3}$$

следует, что

$$2 \otimes u_3 \succcurlyeq^*_Z u_1 \oplus u_2. \tag{4}$$

Все условия Y1–Y8 достаточно естественны и не требуют пояснений. Что касается условия Y9, то оно допускает следующую интерпретацию. Предпочтение (4) означает, что в ЗМР при выполнении условия (3) лучше вибирать оба раза действие u_3, чем один раз u_1, а другой раз u_2 (или наоборот), можно показать, что это условие есть всего лишь некоторая специфическая форма *принципа гарантированного результата* применительно к ЗМР (см. [3]).

При этом оказывается, что в классе ПВП $\Pi_0^\infty(\mathbb{Z}'_{01}(Y,\Theta))$, где $\mathbb{Z}'_{01}(Y,\Theta)$ — достаточно широкий класс ССЗР, решение основной ЗМР представляет собой критерий, являющийся минимумом осреднения полезностей случайных последствий решения по некоторой статистической закономерности на Θ (см. [4–6]). Причем эта статистическая закономерность определяется единственным образом в классе всех выпуклых статистических закономерностей на Θ и множестве функций полезности на последствиях X с точностью до масштабного множителя.

1. *Иваненко В. И., Лабковский В. А.* Проблема неопределенности в задачах принятия решений. – Киев: Наук. думка, 1990. – 135 с.
2. *Gilboa I., Schmeidler D.* Maxmin expected utility with non-unique prior // J. of Math. Economics. – 1989. – **18**. – P. 141–153.
3. *Михалевич В. М.* Одна форма принципа гарантированного результата при многократном выборе // Кибернетика и вычислит. техника. – 2010. – № 161. – С. 28–34.
4. *Михалевич В. М.* К моделированию ситуации в задаче решения с денежными потерями // Доп. НАН України. – 2010. – № 11. – С. 30–33.
5. *Михалевич В. М.* К моделированию ситуации в задаче решения с денежными доходами // Там само. – 2010. – № 12. – С. 38–41.
6. *Михалевич В. М.* К моделированию системы принятия решения для необайесовских задач // Там само. – 2011. – № 5. – С. 45–51.

НУ "Киево-Могилянская академия"

Поступило в редакцию 30.11.2010

V. M. Mykhalevich

Multiple selection of a solution in the presence of one form of the principle of guaranteed result.

We consider the problem of multiple decision choices, whose situation is described by the neo-bayesian model with rather natural rules of choosing a solution, one of which can be interpreted as some form of the principle of guaranteed result.