УДК 519.41/47

М. М. Пискун

Про застосування деяких понять теорії кілець для вивчення впливу систем підгруп групи

(Представлено академіком НАН України А. М. Самойленком)

Let A be a partially ordered set. For $a, b \in A$, we put $[a,b] = \{x \in A \mid a \leqslant x \leqslant b\}$. The deviation of A, denoted as $\operatorname{dev}(A)$, is defined by the following rule. If A is trivial, then we put $\operatorname{dev}(A) = -\infty$. If A is not trivial but satisfies the minimal condition, then $\operatorname{dev}(A) = 0$. For a general ordinal α, we define $\operatorname{dev}(A) = \alpha$ provided $\operatorname{dev}(A) \neq \beta < \alpha$ and, in any descending chain $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant \cdots$ of elements of A, all but finitely many of the closed intervals $[a_n, a_{n+1}]$ have deviation less than α. Let G be a group and let S be some family of subgroups of G. Then S is partially ordered by inclusion. If a partially ordered set S has a deviation, then we will say that a family S has the Krull dimension. In this paper, we study the groups, in which the family $L_{\text{non-nn}}(G)$ of all non nearly normal subgroups has the Krull dimension. A subgroup H of the group G is said to be nearly normal, if H has finite index in its normal closure.

Групи з широкими системами підгруп, близьких у тому чи іншому сенсі до нормальних, є досить давнім об'єктом вивчення в теорії груп. Присутність великої кількості нормальних підгруп та підгруп, що є близькими до них, є реальним фактором впливу на структуру групи. Образно кажучи, чим більше група має нормальних та близьких до них підгруп, тим ближча вона до абелевої. Розвиток теорії груп з умовами скінченності привів до появи багатьох природних узагальнень нормальних підгруп. Одним з таких узагальнень є наближено нормальні підгрупи. Підгрупа H групи G називається наближено нормальною в G, якщо вона має скінченний індекс у своєму нормальному замкненні H^G. Розгляд підгруп такого роду розпочався з роботи Б. Неймана [1]. Він довів, що група, кожна підгрупа якої є наближено нормальною, має скінченний комутант. У роботі Л. А. Курдаченка, М. Ф. Кузенного та М. М. Семка [2] були розглянуті групи, у яких система всіх наближено нормальних підгруп є щільною. Пізніше С. Франціозі та Ф. де Жіованні [3] розглянули групи, у яких впорядкована за включенням система $L_{\text{non-nn}}(G)$ усіх підгруп групи G, які не є наближено нормальними, задовольняє умову мінімальності, а А. Галоппо [4] — дуальну ситуацію, тобто групи, у яких система $L_{\text{non-nn}}(G)$ задовольняє умову максимальності.

У даній роботі ми розглянемо умову скінченності, яка є досить широким узагальненням як умови мінімальності, так і умови максимальності. Вона вперше з'явилась в теорії кілець та виявилась там дуже ефективною. Ми хочемо продемонструвати, що ця умова скінченності може також ефективно працювати і в теорії груп. Застосуємо дану умову для вивчення впливу на будову групи важливих її природних систем підгруп, зокрема системи $L_{\text{nn}}(G)$ всіх її наближено нормальних підгруп та системи $L_{\text{non-nn}}(G)$.

Нехай A — частково впорядкована множина. Для елементів $a, b \in A$ визначимо замкнений інтервал з кінцями a, b як підмножину

$$[a,b] = \{x \in A \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Визначимо тепер відхилення $\operatorname{dev}(A)$ частково впорядкованої множини A (див., напр., [5, 6.1]) за таким правилом.

Якщо порядок на множині A є тривіальним, то покладемо $\mathrm{dev}(A) = -\infty$.

Якщо порядок на множині A є нетривіальним і A задовольняє умову мінімальності, то покладаємо $\mathrm{dev}(A) = 0$.

Для порядкового числа α визначимо $\mathrm{dev}(A) = \alpha$ *у випадку, коли* $\mathrm{dev}(A) \neq \beta < \alpha$ *і для кожного спадного ланцюжка $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant \cdots$ елементів множини A усі, за винятком скінченної множини, замкнені інтервали $[a_n, a_{n+1}]$ мають відхилення, яке є строго меншим, ніж α.*

Скажемо тепер, що *частково впорядкована множина A має відхилення, якщо знайдеться порядкове число α, для якого* $\mathrm{dev}(A) = \alpha$.

Висловлюючись образно, відхилення частково упорядкованої множини показує, наскільки її порядок віддалений від умови мінімальності і, зокрема, від повного порядку. Однак частково впорядковані множини, що мають відхилення, можна розглядати і як узагальнення частково впорядкованих множин з умовою максимальності (див., напр., [5, 6.1.8]).

Поняття відхилення знайшло корисні застосування в теорії кілець, саме його виникнення пов'язано з теорією кілець та модулів. Нагадаємо, що кільце R має вимірність Крулля, якщо впорядкована за включенням множина його лівих ідеалів має відхилення (див., напр., [5, 6.2.2]). Це відхилення і називається вимірністю Крулля кільця R та позначається символом $K(R)$.

Нехай тепер G — група і S — деяка система її підгруп. Ми можемо розглядати S як частково впорядковану множину відносно теоретико-множинного включення. Оскільки у теорії груп через $[a, b]$ позначається комутатор елементів a, b, то для замкненого інтервалу системи підгруп S з кінцями A, B будемо використовувати позначення $[\![A, B]\!]$, тобто $[\![A, B]\!] = \{C \mid C \in S \text{ і } A \leqslant C \leqslant B\}$.

Якщо частково впорядкована система S має відхилення, то будемо говорити, що система S має вимірність Крулля та будемо розуміти під нею відхилення частково впорядкованої множини S і використовувати для нього позначення $K_S(G)$. Якщо ν — деяка теоретико-групова властивість та

$$S = \{H \mid H \text{ — підгрупа групи } G\text{, що має властивість } \nu\},$$

то замість $K_S(G)$ будемо писати $K_\nu(G)$.

Нагадаємо, що група G задовольняє слабку умову мінімальності для підгруп системи S, якщо для кожної спадної послідовності

$$H_1 \geqslant H_2 \geqslant \cdots \geqslant H_n \geqslant \cdots$$

підгруп, що належать до системи S, знайдеться такий номер m, що індекси $|H_n : H_{n+1}|$ будуть скінченними вже при $n \geqslant m$. У цьому випадку кожний замкнений інтервал $[\![H_n, H_{n+1}]\!]$ також буде скінченним і, зокрема, задовольнятиме умову мінімальності. Таким чином, якщо група G задовольняє слабку умову мінімальності для підгруп системи S, то система S має вимірність Крулля, більше того, $K_S(G) \leqslant 1$. Отже, на цьому шляху ми отримуємо не тільки узагальнення звичайної умови мінімальності для S-підгруп, але і слабкої умови мінімальності для S-підгруп.

Розглянемо випадок, коли S — це система $L_{\text{non-nn}}(G)$ усіх підгруп групи G, які не є наближено нормальними, і вивчимо групи, у яких ця система має вимірність Крулля. Цю вимірність позначимо через $K_{\text{non-nn}}(G)$.

Для нашого розгляду важливими є такі допоміжні поняття і результати.

Нехай G — група, H — її підгрупа. Будемо говорити, що H є рівномірним добутком підгруп H_λ, $\lambda \in \Lambda$, якщо виконуються такі умови:

(U1) $H_\lambda H_\mu = H_\mu H_\lambda$ для кожної пари індексів λ, $\mu \in \Lambda$;

(U2) $H_\lambda \bigcap \langle H_\mu \mid \mu \neq \lambda \rangle = \langle 1 \rangle$.

Якщо H є рівномірним добутком підгруп H_λ, $\lambda \in \Lambda$, то будемо записувати це за допомогою позначення $H = Un_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$.

Якщо M — підмножина Λ, то позначимо символом $H\llparenthesis \mathrm{M} \rrparenthesis$ підгрупу $\langle H_\lambda \mid \lambda \in \mathrm{M} \rangle = Un_{\lambda \in \mathrm{M}} H_\lambda$. Також позначимо через $\Lambda_{Un}(H)$ систему підгруп $\{H\llparenthesis \mathrm{M} \rrparenthesis \mid \mathrm{M} \subseteq \Lambda\}$. Множина $\Lambda_{Un}(H)$ частково впорядкована за включенням.

Дуже корисним технічним результатом є таке твердження.

Пропозиція 1. *Нехай G — група, H — така її підгрупа, що $H = Un_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$. Якщо система $\Lambda_{Un}(H)$ має відхилення, то множина індексів Λ буде скінченною.*

Важливим також є такий результат.

Пропозиція 2. *Нехай G — група, для якої $K_{\text{non-nn}}(G)$ існує. Якщо абелева підгрупа H не є наближено нормальною в G, то H мінімаксна.*

Групу G називатимемо узагальнено радикальною, якщо вона має зростаючий ряд нормальних підгруп, фактори якого або локально нільпотентні, або локально скінченні.

Наведемо тепер головний результат роботи.

Теорема. *Нехай G — узагальнено радикальна група. Якщо система її підгруп, що не є наближено нормальними, має вимірність Крулля, то або група G має скінченний комутант, або G — майже розв'язна A_3-група.*

Наслідок. *Нехай G — узагальнено радикальна група. Якщо G задовольняє слабку умову мінімальності для підгруп, що не є наближено нормальними, то або група G має скінченний комутант, або G — майже розв'язна A_3-група.*

1. *Neumann B. H.* Groups with finite classes of conjugate subgroups // Math. Z. – 1955. – **63**, No 1. – P. 76–96.
2. *Курдаченко Л. А., Кузенний М. Ф., Семко М. М.* Групи з щільною системою нескінченних підгруп // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1985. – № 3. – С. 7–9.
3. *Franciosi S., de Giovanni F.* Groups satisfying the minimal condition on certain non-normal subgroups // Groups – Korea 94. – Berlin: Walter de Gruyter, 1995. – P. 107–118.
4. *Galoppo A.* Groups satisfying the maximal condition on non-nearly normal subgroups // Ric. mat. – 2000. – **49**, No 2. – P. 213–220.
5. *McConnel J. C., Robson J. C.* Noncommutative Noetherian rings. – New York: Wiley, 1987. – 597 p.

Національний університет державної податкової служби України, Ірпінь

Надійшло до редакції 13.03.2007