УДК 519.21

К. В. Ральченко

Наближення мультифрактальних процесів і полів абсолютно неперервними процесами

(Представлено академіком НАН України В. С. Королюком)

Визначено абсолютно неперервні процеси, які збігаються до мультифрактального броунівського руху за ймовірністю в просторах типу Бесова. Одержано результат про збіжність розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з такими процесами до розв'язку рівняння з мультифрактальним броунівським рухом. Аналогічні наближення побудовано для випадку двопараметричних процесів.

Дробовий броунівський рух (ДБР) є популярною моделлю для дослідження процесів з довгостроковою залежністю, що виникають, наприклад, у комп'ютерних мережах, на фінансових ринках тощо. Але стаціонарність приростів ДБР істотно обмежує область його застосувань. Зокрема, він не дозволяє моделювати процеси, регулярність траєкторій і "глибина пам'яті" яких змінюється з часом. У зв'язку з цим останнім часом було запропоновано декілька узагальнень ДБР, а саме: мультифрактальний броунівський рух (МБР) з рухомим середнім [1], МБР типу Вольтерра [2, 3], гармонізований МБР [4].

У даній роботі ми будуємо абсолютно неперервні процеси, які наближують одно- і двопараметричний МБР. Ми доводимо збіжність апроксимацій у просторах типу Бєсова. Як наслідок, ми одержуємо результат про збіжність розв'язків відповідних стохастичних диференціальних рівнянь.

1. Апроксимація мультифрактального броунівського руху.

1.1. **Означення 1.** Нехай для $\beta \in (0,1)$ $W_0^\beta = W_0^\beta([0,T])$ — простір вимірних функцій $f\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ з

$$\|f\|_{0,\beta} := \sup_{t\in[0,T]}\left(|f(t)| + \int_0^t \frac{|f(t)-f(s)|}{(t-s)^{1+\beta}}ds\right) < \infty.$$

Також нехай $W_1^\beta = W_1^\beta([0,T])$ — простір вимірних функцій $f\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ з

$$\|f\|_{1,\beta} := \sup_{0\leqslant s<t\leqslant T}\left(\frac{|f(t)-f(s)|}{(t-s)^{\beta}} + \int_s^t \frac{|f(u)-f(s)|}{(u-s)^{1+\beta}}du\right) < \infty.$$

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — повний імовірнісний простір. *Дробовим броунівським рухом (ДБР)* з параметром Хюрста $H \in (0,1)$ називається центрований гауссівський процес $B^H = \{B_t^H, t \geqslant 0\}$ зі стаціонарними приростами та коваріаційною функцією

$$\mathsf{E}(B_t^H B_s^H) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}).$$

Припустимо, що функція $H\colon [0,+\infty) \to (1/2,1)$ задовольняє умову Гельдера з показником $\gamma > 1/2$: існує стала $C_1 > 0$ така, що для будь-яких t_1, $t_2 \in [0,+\infty)$

$$|H_{t_1} - H_{t_2}| \leqslant C_1|t_1 - t_2|^{\gamma}.$$

Можливі різні узагальнення ДБР зі змінною функцією Хюрста. Ми розглядатимемо узагальнення вигляду $Y_t = B_t^{H_t}$, де $\{B_t^H, t \in [0,T], H \in (1/2,1)\}$ — така сім'я випадкових величин, що

(i) для фіксованого $H \in (1/2,1)$ $\{B_t^H, t \in [0,T]\}$ — ДБР з параметром Хюрста H;

(ii) для будь-яких $t \in [0,T]$, H_1, $H_2 \in (1/2,1)$

$$\mathsf{E}(B_t^{H_1} - B_t^{H_2})^2 \leqslant C_2(H_1 - H_2)^2.$$

Наприклад, це може бути будь-яке з узагальнень, запропонованих в роботах [1–4].

Введемо позначення $H_{\min} := \min\{\gamma, \min\limits_{t\in[0,T]} H_t\}$.

1.2. Апроксимація мультифрактального броунівського руху. Розглянемо таку апроксимацію:

$$B_t^{H_t,\varepsilon} := \frac{1}{\phi_t(\varepsilon)} \int\limits_t^{t+\phi_t(\varepsilon)} B_s^{H_s} ds = \frac{1}{\phi_t(\varepsilon)} \int\limits_0^{\phi_t(\varepsilon)} B_{u+t}^{H_{u+t}} du, \tag{1}$$

де $\phi_t(\varepsilon) = \phi(t,\varepsilon)\colon [0,T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — набір вимірних функцій, який задовольняє умови:

1) $\sup\limits_{t\in[0,T]} \phi_t(\varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0+$;

2) для всіх t, $s \in [0,T]$ і для всіх $\varepsilon > 0$

$$\left|\frac{\phi_s(\varepsilon) - \phi_t(\varepsilon)}{\phi_s(\varepsilon)}\right| \leqslant C_3|t - s|^{H_{\min}},$$

де C_3 — стала, яка не залежить від ε.

У ролі $\phi_t(\varepsilon)$ можна розглядати, наприклад, функції виду $\phi_t(\varepsilon) = \psi_t \cdot \varepsilon$, де функція ψ_t відокремлена від нуля та задовольняє умову Гельдера з показником $H_{\min}$.

Теорема 1. *Для довільного* $\beta \in (0, H_{\min})$

$$\|B^{H,\varepsilon} - B^H\|_{1,\beta} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad \varepsilon \to 0+.$$

1.3. Наближення розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь. Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння з МБР:

$$X_t = X_0 + \int\limits_0^t b(s,X_s)\,ds + \int\limits_0^t \sigma(s,X_s)\,dB_s^{H_s}, \qquad t \in [0,T]. \tag{2}$$

Наближення для розв'язку цього рівняння природно будувати як розв'язок

$$X_t^{\varepsilon} = X_0 + \int\limits_0^t b(s,X_s^{\varepsilon})\,ds + \int\limits_0^t \sigma(s,X_s^{\varepsilon})\,dB_s^{H_s,\varepsilon}, \qquad t \in [0,T],$$

де процеси $B_s^{H_s,\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, визначені формулою (1). Але спершу треба визначити, коли розв'язок рівняння (2) існує та єдиний.

Припустимо, що коефіцієнти $b(t,x)$, $\sigma(t,x)$ майже напевне задовольняють такі умови (сталі L_N, M_N та функція b_0 можуть залежати від ω).

I. $\sigma(t,x)$ — диференційовна за x; існують сталі $1-H_{\min} < \varkappa \leqslant 1$ та $(1/H_{\min})-1 < \delta \leqslant 1$, і для кожного $N > 0$ існує $M_N > 0$ таке, що:

(i) для всіх $x \in \mathbb{R}$ і $t \in [0,T]$

$$|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leqslant M_0|x-y|;$$

(ii) для всіх $|x|$, $|y| \leqslant N$ і $t \in [0,T]$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\sigma(t,x) - \frac{\partial}{\partial x}\sigma(t,y)\right| \leqslant M_N|x-y|^{\delta};$$

(iii) для всіх $x \in \mathbb{R}$, t, $s \in [0,T]$

$$|\sigma(t,x) - \sigma(s,x)| + \left|\frac{\partial}{\partial x}\sigma(t,x) - \frac{\partial}{\partial x}\sigma(s,x)\right| \leqslant M_0|t-s|^{\varkappa}.$$

II. Існує $b_0 \in L^{\rho}(0,T)$, $\rho \geqslant 2$, і для кожного $N > 0$ існує $L_N > 0$ таке, що:

(iv) для всіх $|x|$, $|y| \leqslant N$ і $t \in [0,T]$

$$|b(t,x) - b(t,y)| \leqslant L_N|x-y|;$$

(v) для всіх $x \in \mathbb{R}$ і $t \in [0,T]$

$$|b(t,x)| \leqslant L_0|x| + b_0(t).$$

Нехай $\alpha_0 = \min\{1/2, \varkappa, \delta/(1+\delta)\}$.

Теорема 2. *Припустимо, що $\alpha \in (1-H_{\min}, \alpha_0)$, X_0 — випадкова величина, а коефіцієнти рівняння* (2) *задовольняють умови (i)–(v) з $\rho \geqslant 1/\alpha$. Тоді існує єдиний розв'язок $\{X_t, t \in [0,T]\}$ рівняння* (2), *$X \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}, W_0^{\alpha}[0,T])$, траєкторії якого майже напевне належать до простору $C^{1-\alpha}[0,T]$.*

Нехай $B_s^{H_s,\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, визначені формулою (1).

Теорема 3. *Припустимо, що виконані умови теореми 2. Тоді*

$$\sup_{t\in[0,T]} |X_t - X_t^{\varepsilon}| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad \varepsilon \to 0+.$$

2. Апроксимація полів.

2.1. **Означення 2.** Нехай s, $t \in \mathbb{R}_+^2$, $s = (s_1, s_2)$, $t = (t_1, t_2)$. Будемо писати $s < t$, якщо $s_1 < t_1$ і $s_2 < t_2$. Для $s < t$ позначимо $[s,t] = [s_1,t_1] \times [s_2,t_2] \subset \mathbb{R}_+^2$. Для функції $f\colon \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ розглядатимемо прирости

$$\Delta_s f(t) := f(t) - f(s_1,t_2) - f(t_1,s_2) + f(s), \qquad s,t \in \mathbb{R}_+^2.$$

Нехай $T = (T_1,T_2) \in (0,\infty)^2$, $[0,T] = [0,T_1] \times [0,T_2]$.

$W_1^{\beta_1,\beta_2} = W_1^{\beta_1,\beta_2}([0,T])$ — простір вимірних функцій $f\colon [0,T] \to \mathbb{R}$, для яких

$$\|f\|_{1,\beta_1,\beta_2} = \sup_{0\leqslant s<t\leqslant T}\Bigg(\frac{|\Delta_s f(t)|}{(t_1-s_1)^{\beta_1}(t_2-s_2)^{\beta_2}} + \frac{1}{(t_2-s_2)^{\beta_2}}\int\limits_{s_1}^{t_1}\frac{|f_{t-}(u,s_2)-f_{t-}(s)|}{(u-s_1)^{1+\beta_1}}du +$$

$$+\frac{1}{(t_1-s_1)^{\beta_1}}\int\limits_{s_2}^{t_2}\frac{|f_{t-}(s_1,v)-f_{t-}(s)|}{(v-s_2)^{1+\beta_2}}dv + \int\limits_{[s,t]}\frac{|\Delta_s f(r)|}{(r_1-s_1)^{1+\beta_1}(r_2-s_2)^{1+\beta_2}}dr\Bigg) < \infty,$$

де $f_{t-}(s) := f(s) - f(s_1,t_2-) - f(t_1-,s_2) + f(t-)$.

2.2. Загальна теорема. Нехай $\{B_t, t\in[0,T]\}$ — випадкове поле, яке задовольняє умови:

1) B_t — гауссівське;

2) існують сталі $C>0$ та $\lambda>1$ такі, що для будь-яких s, $t\in[0,T]$

$$\mathsf{E}(\Delta_s B_t)^2 \leqslant C(\{t_1-s_1\}\{t_2-s_2\})^{\lambda}; \tag{3}$$

3) траєкторії B_t — неперервні з імовірністю 1.

Розглянемо таку апроксимацію:

$$B_t^{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{t_1}^{t_1+\varepsilon}\int\limits_{t_2}^{t_2+\varepsilon} B_s ds = \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{[0,\varepsilon]^2} B_{s+t} ds.$$

Теорема 4. *Для довільних β_1, $\beta_2\in(0,\lambda/2)$*

$$\|B^{\varepsilon}-B\|_{1,\beta_1,\beta_2} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad \varepsilon\to 0+\,.$$

2.3. Дробове броунівське поле. Випадкове поле $\{B_t^H, t\in[0,T]\}$ називається *дробовим броунівським полем* з індексом Хюрста $H=(H_1,H_2)\in(0,1)^2$, якщо воно задовольняє умови:

1) B_t^H — гауссівське поле, $B_t^H=0$, $t\in\partial\mathbb{R}_+^2$;

2) $\mathsf{E}B_t^H=0$, $\mathsf{E}B_t^H B_s^H = \dfrac{1}{4}\prod\limits_{i=1,2}(t_i^{2H_i}+s_i^{2H_i}-|t_i-s_i|^{2H_i})$.

Таке поле має неперервну модифікацію завдяки критерію Колмогорова. Його прирости задовольняють тотожність

$$\mathsf{E}(\Delta_s B_t^H)^2 = |t_1-s_1|^{2H_1}|t_2-s_2|^{2H_2}.$$

Тому для B_t^H нерівність (3) виконується з $\lambda = 2\min\{H_1,H_2\}$. Таким чином, згідно з теоремою 4, при $H_i>1/2$ для довільних β_1, $\beta_2\in(0,H_1\wedge H_2)$ має місце збіжність апроксимацій:

$$\|B^{H,\varepsilon}-B^H\|_{1,\beta_1,\beta_2} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad \varepsilon\to 0+,$$

де $B_t^{H,\varepsilon} = \dfrac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{t_1}^{t_1+\varepsilon}\int\limits_{t_2}^{t_2+\varepsilon} B_s^H ds.$

2.4. Анізотропне мультифрактальне броунівське поле. Розглянемо функцію $H(t) = (H_1(t), H_2(t))\colon [0,T] \to (1/2,1)^2$. Нехай сталі μ, ν такі, що

$$\frac{1}{2} < \mu < \min_{t\in[0,T]} H_i(t) \leqslant \max_{t\in[0,T]} H_i(t) < \nu < 1, \qquad i = 1,2.$$

Припустимо, що існують додатні сталі c_1, c_2 такі, що для будь-яких t, $s \in [0,T]$:
(H1) $|H_i(t) - H_i(s)| \leqslant c_1(|t_1 - s_1|^\nu + |t_2 - s_2|^\nu)$;
(H2) $|\Delta_s H_i(t)| \leqslant c_2(|t_1 - s_1|\,|t_2 - s_2|)^\nu$.

Мультифрактальне броунівське поле $\{B_t^{H(t)}, t \in [0,T]\}$ з функціональним індексом Хюрста $H(t)$ визначається формулою

$$B_t^{H(t)} := \int\limits_{\mathbb{R}^2} \prod_{i=1,2} \Big[(t_i - u_i)_+^{H_i(t)-1/2} - (-u_i)_+^{H_i(t)-1/2}\Big] dW_u, \qquad t \in [0,T],$$

де $s_+ = \max\{s, 0\}$, $W = \{W_s, s \in \mathbb{R}^2\}$ — стандартне вінерівське поле.

Теорема 5. *Траєкторії поля $B_t^{H(t)}$ неперервні з імовірністю 1.*

Теорема 6. *Існує стала $C > 0$ така, що для будь-яких s, $t \in [0,T]$*

$$\mathsf{E}(\Delta_s B_t^{H(t)})^2 \leqslant C(|t_1 - s_1|\,|t_2 - s_2|)^{2\mu}.$$

З теорем 5 і 6 випливає, що анізотропне мультифрактальне броунівське поле $\{B_t^{H(t)}, t \in [0,T]\}$ задовольняє умови теореми 4. Тому для довільних β_1, $\beta_2 \in (0,\mu)$

$$\|B_t^{H(t),\varepsilon} - B_t^{H(t)}\|_{1,\beta_1,\beta_2} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad \varepsilon \to 0+,$$

де $B_t^{H(t),\varepsilon} = \dfrac{1}{\varepsilon^2} \displaystyle\int\limits_{t_1}^{t_1+\varepsilon} \int\limits_{t_2}^{t_2+\varepsilon} B_s^{H(s)} ds.$

1. *Peltier R. F., Lévy Véhel J.* Multifractional Brownian motion: definition and preliminary results // INRIA research report. – 1995. – No 2645. – 39 p.
2. *Boufoussi B., Dozzi M., Marty R.* Local time and Tanaka formula for a Volterra type multifractional Brownian motion // Bernoulli. – 2010. – **16**, No 4. – P. 1294–1311.
3. *Ральченко К. В., Шевченко Г. М.* Властивості траєкторій мультифрактального броунівського руху // Теорія ймовірностей. та матем. статистика. – 2009. – **80**. – С. 106–116.
4. *Benassi A., Jaffard S., Roux D.* Gaussian processes and pseudodifferential elliptic operators // Rev. Math. Iberoamer. – 1997. – **13**, No 1. – P. 19–89.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 14.10.2010

K. V. Ralchenko

Absolute continuous approximations for multifractal processes and fields

We define absolute continuous stochastic processes that converge to a multifractal Brownian motion in Besov-type spaces. The convergence of solutions of stochastic differential equations with such processes to a solution of the equation with multifractal Brownian motion is proved. Similar approximations are constructed in the case of two-parameter processes.