Доповіді
національної
академії наук
України

7 • 2011

МЕХАНІКА

УДК 539.3

Ю. П. Глухов

Многослойная предварительно напряженная полуплоскость при воздействии подвижной нагрузки

(Представлено академиком НАН Украины А. Н. Гузем)

У рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями розглянута постановка плоскої усталеної задачі про збурення багатошарового попередньо напруженого напівпростору поверхневим навантаженням, що рухається з постійною швидкістю. Як приклад розглянута двомірна задача для двошарового напівпростору. За допомогою методу інтегральних перетворень Фур'є отриманий в загальному вигляді фундаментальний розв'язок задачі при різних умовах контакту і швидкостях руху навантаження.

Работа посвящена изучению динамических процессов в многослойных предварительно напряженных телах при воздействии подвижной поверхностной нагрузки. В рамках линеаризированной теории для тел с начальными напряжениями [1] такие задачи изучались как в точной постановке [2–6], так и с использованием приближенных моделей многослойной среды [7–10].

Многослойная полуплоскость. Рассмотрим подверженное воздействию подвижной нагрузки упругое многослойное полупространство, состоящее из N плоскопараллельных упругих слоев толщиной h_s ($s = \overline{1, N}$), лежащих на полупространстве. Слои пронумерованы по порядку $s = \overline{1, N}$ сверху вниз. Порядковый номер полупространства $N + 1$. Слои и полупространство состоят из сжимаемых или несжимаемых предварительно напряженных изотропных материалов с произвольной формой упругого потенциала и отнесены к декартовой системе координат ξ_i ($i = 1, 2, 3$), которые вводятся в начальном деформированном состоянии.

Считаем, что начальное напряженно-деформированное состояние полупространства является однородным. Пусть нагрузка движется по свободной поверхности верхнего слоя с постоянной скоростью v в течение большого промежутка времени, причем она не зависит от координаты ξ_3, тогда относительно системы координат, связанной с этой нагрузкой, существует установившееся плоское деформированное состояние. Для решения задачи воспользуемся соотношениями линеаризированной теории упругости тел с начальными напряжениями [1]. Предполагая, что картина деформаций инвариантна относительно времени в движущейся вместе с нагрузкой системе координат (y_1, y_2), где $y_1 = \xi_1 - vt$, $y_2 = \xi_2$, уравнение установившегося движения слоев и полупространства через функцию $\chi(y_1, y_2)$ можно записать в виде

$$\left(\eta_1^{\{s\}2} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right)\left(\eta_2^{\{s\}2} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right)\chi^{\{s\}(j)} = 0, \qquad s = \overline{1,N}, \qquad j = 1, 2. \tag{1}$$

Корни $\eta_1^{\{s\}}$ и $\eta_2^{\{s\}}$ определяются из уравнений

$$\eta^{\{s\}4} + 2A^{\{s\}}\eta^{\{s\}2} + A_1^{\{s\}} = 0, \tag{2}$$

где коэффициенты $A^{\{s\}}$ и $A_1^{\{s\}}$ являються функциями скорости нагрузки v и параметров, характеризующих материал элементов слоистой среды [1]: $\widetilde{\omega}^{\{s\}}$ — в случае сжимаемого материала и $\widetilde{\kappa}^{\{s\}}$ — в случае несжимаемого материала.

Рассмотрим следующие граничные условия:

при $y_2 = 0$

$$\widetilde{Q}_{21}^{\{1\}} = P_1\delta_{\theta N}\delta(y_1), \qquad \widetilde{Q}_{22}^{\{1\}} = P_2\delta(y_1), \qquad \theta = \sum_{s=1}^{N}\theta_1^{\{s\}}, \tag{3}$$

при $y_2 = -h_s$

$$\begin{aligned} &u_2^{\{s\}} = u_2^{\{s+1\}}, \qquad \widetilde{Q}_{22}^{\{s\}} = \widetilde{Q}_{22}^{\{s+1\}}, \qquad \widetilde{Q}_{21}^{\{s\}} = \theta_1^{\{s\}}\widetilde{Q}_{21}^{\{s+1\}}, \\ &(1 - \theta_1^{\{s\}})\widetilde{Q}_{21}^{\{s+1\}} = \theta_1^{\{s\}}(u_1^{\{s+1\}} - u_1^{\{s\}}), \qquad s = \overline{1,N}. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь параметр $\theta_1^{\{s\}} = 1$ соответствует случаю жесткого контакта между элементами слоистого полупространства, а $\theta_1^{\{s\}} = 0$ — случаю нежесткого (скользящего) контакта.

Перемещения и напряжения в формулах (3) и (4) через функции $\chi^{\{s\}(j)}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} &u_i^{\{s\}} = -\beta_{i1}^{\{s\}(i)} \frac{\partial^2 \chi^{\{s\}(i)}}{\partial y_1 \partial y - 2} + \left(\sum_{n=1}^{2}\beta_{i1}^{\{s\}(j)}\frac{\partial^2}{\partial y_n^2}\right)\chi^{\{s\}(j)}, \qquad i,j = 1,2, \qquad i \neq j, \\ &\widetilde{Q}_{ij}^{\{s\}} = \left(\sum_{n=1}^{2}\alpha_{ij}^{\{s\}(n2)}\frac{\partial^2}{\partial y_n^2}\right)\frac{\chi^{\{s\}(2)}}{\partial y_{2-\delta_{ij}}} + \left(\sum_{n=1}^{2}\alpha_{ij}^{\{s\}(n1)}\frac{\partial^2}{\partial y_n^2}\right)\frac{\chi^{\{s\}(1)}}{\partial y_{1+\delta_{ij}}}, \\ &\qquad i,j = 1,2, \qquad s = \overline{1, N+1}. \end{aligned} \tag{5}$$

В соотношениях (5) коэффициенты $\beta_{im}^{\{s\}(j)}$, $\alpha_{ij}^{\{s\}(nk)}$ также являются функциями скорости нагрузки и параметров, характеризующих материал элементов слоистого полупространства.

В рассматриваемой задаче об установившейся реакции перемещения определяются с точностью до произвольной постоянной, поэтому будем в дальнейшем оперировать не с перемещениями, а со скоростями перемещений.

Таким образом, задача об установившейся реакции многослойного полупространства при воздействии движущейся с постоянной скоростью нагрузки сводится к определению функций $\chi^{(j)}$ с помощью уравнений (1) при граничных условиях (3) и (4). Компоненты напряженно-деформированного состояния двухслойного сжимаемого полупространства определяются по формулам (5).

Решение задачи найдем с помощью интегрального преобразования Фурье по переменной y_1. Определим решение задачи в общем виде для случаев неравных и равных корней, для различных условий сопряжения элементов многослойной среды и для любой скорости движения нагрузки.

Решение преобразованных уравнений (1) с учетом затухания на бесконечности будем искать в виде

$$\chi^{\{s\}(j)F} = [1-\delta_{j2}^{\{s\}}(1-\delta_{\eta_1\eta_2}^{\{s\}})]\{C_1^{\{s\}(j)}e^{k\gamma_1^{\{s\}}(y_2+h_s)} + (1-\delta_s^{N+1})C_3^{\{s\}(j)}e^{-k\gamma_2^{\{s\}}(y_2+h_s)} + \\ + [1-\delta_{\eta_1\eta_2}^{\{s\}}+\delta_{\eta_1\eta_2}^{\{s\}}(y_2+h_s)][C_2^{\{s\}(j)}e^{k\gamma_2^{\{s\}}(y_2+h_s)}+(1-\delta_s^{N+1})C_4^{\{s\}(j)}e^{-k\gamma_1^{\{s\}}(y_2+h_s)}]\}, \quad (6)$$

где $C_m^{\{s\}(j)}$ ($j=1,2$, $m=\overline{1,4}$, $s=\overline{1,N+1}$) — постоянные интегрирования; k — параметр преобразования Фурье;

$$\gamma_j^{\{s\}} = k_j\eta_j^{\{s\}}, \qquad \delta_{\eta_1\eta_2}^{\{s\}} = \begin{cases} 1, & \eta_1^{\{s\}} = \eta_2^{\{s\}}, \\ 0, & \eta_1^{\{s\}} \neq \eta_2^{\{s\}}, \end{cases} \qquad \delta_{j2}^{\{s\}} = \begin{cases} 1, & j=1, \\ 0, & j=2. \end{cases}$$

В представлении решения (6) $k_j \equiv \sigma = |k|/k$, если $\eta_j^{\{s\}2} > 0$, и $k_j = i$, если $\eta_j^{\{s\}2} < 0$. В случае, если $\eta_j^{\{s\}}$ принимает комплексные значения, то в (6) следует положить $k_j = 1$, $\eta^{\{s\}} = \sigma\,\mathrm{Re}\,\eta_j^{\{s\}} - (-1)^j i\,\mathrm{Im}\,\eta_j^{\{s\}}$ ($j=1,2$).

Введем постоянные интегрирования

$$\begin{aligned} &C_m^{\{s\}(1)} = C_m^{\{s\}}, \qquad C_m^{\{s\}(2)} = i\gamma_m^{\{s\}}C_m^{\{s\}}, \\ &C_{m+2}^{\{s\}(1)} = C_{m+2}^{\{s\}}, \qquad C_{m+2}^{\{s\}(2)} = i\gamma_{3-m}^{\{s\}}C_{m+2}^{\{s\}}, \qquad \gamma_m^{\{s\}} = k_m\eta_m^{\{s\}}, \qquad m=1,2. \end{aligned} \quad (7)$$

Компоненты напряженно-деформированного состояния (5) в пространстве изображений с учетом (6) и (7) будут иметь вид

$$\begin{aligned} &\widetilde{Q}_{nj}^{\{s\}F} = i^{1-\delta_{nj}}k^2\sum_{m=1}^{4}\tau_{ms}\gamma_{nj}^{\{s\}(m)}C_m^{\{s\}}e^{(-1)^{m+\tau_m}k\gamma_{\tau_m}^{\{s\}}(y_2+h_{s-1})}, \\ &u_n^{\{s\}F} = i^{\delta_{1n}}k\sum_{m=1}^{4}\tau_{ms}\alpha_n^{\{s\}(m)}C_m^{\{s\}}e^{(-1)^{m+\tau_m}k\gamma_{\tau_m}^{\{s\}}(y_2+h_{s-1})}, \qquad n,j=1,2. \end{aligned} \quad (8)$$

В выражениях (8) введены следующие обозначения:

$$\tau_m = \delta_{m1}+\delta_{m4}+2(\delta_{m2}+\delta_{m3}), \qquad \tau_{ms} = \delta_{m1}+\delta_{m2}+(1-\delta_s^{N+1})(\delta_{m3}+\delta_{m4}).$$

Параметры $\gamma_{nj}^{\{s\}(m)}$ и $\alpha_n^{\{s\}(m)}$ в формулах (8) являются функциями параметров k, $\delta_{\eta_1\eta_2}^{\{s\}}$, $\gamma_p^{\{s\}}$, $\beta_{im}^{\{s\}(j)}$ и $\alpha_{ij}^{\{s\}(nk)}$.

Подставляя (8) в преобразованную систему уравнений (3), (4), получаем систему алгебраических уравнений относительно неизвестных $C_m^{\{s\}}$:

$$\sum_{m=1}^{4} \overline{\gamma}_{2q}^{\{1\}(m)} C_m^{\{1\}} = i^{\delta_{2q}-1} k^{-2} \delta_{\theta N}^{\delta_{1q}} P_q^F,$$
$$\sum_{m=1}^{4} (\widetilde{\alpha}_2^{\{s\}(m)} C_m^{\{s\}} e^{(-1)^{m+\tau_m+1} k \gamma_{\tau_m}^{\{s\}} \Delta h_s} - \tau_{m,s+1} \overline{\alpha}_2^{\{s+1\}(m)} C_m^{\{s+1\}}) = 0,$$
$$\sum_{m=1}^{4} (\widetilde{\gamma}_{2q}^{\{s\}(m)} C_m^{\{s\}} e^{(-1)^{m+\tau_m+1} k \gamma_{\tau_m}^{\{s\}} \Delta h_s} - \theta_1^{\{s\}\delta_{1q}} \tau_{m,s+1} \overline{\gamma}_{2q}^{\{s+1\}(m)} C_m^{\{s+1\}}) = 0, \tag{9}$$
$$\sum_{m=1}^{4} \{\tau_{m,s+1} [k(1-\theta_1^{\{s\}}) \overline{\gamma}_{21}^{\{s+1\}(m)} - \theta_1^{\{s\}} \overline{\alpha}_1^{\{s+1\}(m)}] C_m^{\{s+1\}} +$$
$$+ \theta_1^{\{s\}} \widetilde{\alpha}_1^{\{s\}(m)} C_m^{\{s\}} e^{(-1)^{m+\tau_m+1} k \gamma_{\tau_m}^{\{s\}} \Delta h_s}\} = 0, \qquad q = 1, 2, \qquad s = \overline{1, N}.$$

В формулах (9) используются следующие обозначения:

$$\Delta h_s = h_{s+1} - h_s,$$
$$\overline{\gamma}_{2n}^{\{s\}(m)} = \gamma_{2n}^{\{s\}(m)}|_{y_2=-h_{s-1}}, \qquad \overline{\alpha}_n^{\{s\}(m)} = \alpha_n^{\{s\}(m)}|_{y_2=-h_{s-1}}, \qquad s = \overline{1, N+1}, \qquad h_0 = 0,$$
$$\widetilde{\gamma}_{2n}^{\{s\}(m)} = \gamma_{2n}^{\{s\}(m)}|_{y_2=-h_s}, \qquad \widetilde{\alpha}_n^{\{s\}(m)} = \alpha_n^{\{s\}(m)}|_{y_2=-h_s}, \qquad s = \overline{1, N}.$$

Таким образом, решение задачи об установившемся движении многослойного упругого полупространства с начальными напряжениями под воздействием подвижной нагрузки в области изображений Фурье сводится к решению системы алгебраических уравнений (9) относительно неизвестных $C_j^{\{s\}}$.

Полоса на полуплоскости. Рассмотрим плоскую задачу для двухслойного полупространства с начальными напряжениями [2]. Решение системы (9) в этом случае можно записать так:

$$C_j^{\{s\}} = \frac{i\theta_1^{\{1\}} P_1^F U_{j1}^{\{s\}} + P_2^F U_{j2}^{\{s\}}}{k^2 \Delta(k)}, \qquad s = 1, 2, \tag{10}$$

где

$$U_{1m}^{\{1\}} = (-1)^n (a_{n2} D_{3456} - a_{n3} D_{2456} + a_{n4} D_{2356}),$$
$$U_{2m}^{\{1\}} = (-1)^m (a_{n1} D_{3456} - a_{n3} D_{1456} + a_{n4} D_{1356}),$$
$$U_{3m}^{\{1\}} = (-1)^n (a_{n1} D_{2456} - a_{n2} D_{1456} + a_{n4} D_{1256}),$$
$$U_{4m}^{\{1\}} = (-1)^m (a_{n1} D_{2356} - a_{n2} D_{1356} + a_{n3} D_{1256}),$$
$$U_{1m}^{\{2\}} = (-1)^n (a_{n1} D_{2346} - a_{n2} D_{1346} + a_{n3} D_{1246} - a_{n4} D_{1236}),$$
$$U_{2m}^{\{2\}} = (-1)^m (a_{n1} D_{2345} - a_{n2} D_{1345} + a_{n3} D_{1245} - a_{n4} D_{1235}), \quad m, n = 1, 2, \quad m \neq n,$$

$$
\begin{aligned}
&\Delta(k) = K_{12}D_{3456} - K_{13}D_{2456} + K_{14}D_{2356} + K_{23}D_{1456} - K_{24}D_{1356} + K_{34}D_{1256},\\
&D_{ij\alpha\beta} = N_{ij}M_{\alpha\beta} - N_{i\alpha}M_{j\beta} + N_{i\beta}M_{j\alpha} + N_{j\alpha}M_{i\beta} - N_{j\beta}M_{i\alpha} + N_{\alpha\beta}M_{ij},
\end{aligned} \qquad (11)
$$

$$
K_{ij} = a_{1i}a_{2j} - a_{1j}a_{2i}, \quad N_{ij} = a_{3i}a_{4j} - a_{3j}a_{4i}, \quad M_{ij} = a_{5i}a_{6j} - a_{5j}a_{6i}, \quad i, j, \alpha, \beta = \overline{1,6},
$$

$$
a_{nj} = \overline{\gamma}_{2n}^{\{1\}(j)}, \qquad a_{3j} = \widetilde{\alpha}_2^{\{1\}(j)} e^{(-1)^{j+\tau_j+1} k\gamma_{\tau_j}^{\{1\}} h}, \qquad a_{6j} = \widetilde{\alpha}_1^{\{1\}(j)} e^{(-1)^{j+\tau_j+1} k\gamma_{\tau_j}^{\{1\}} h},
$$

$$
j = \overline{1,4}, \qquad a_{n,4+j} = 0, \qquad a_{3,4+j} = -\tau_{j2}\overline{\alpha}_2^{\{2\}(j)},
$$

$$
a_{6,4+j} = \tau_{j2}[k(1 - \theta_1^{\{1\}})\overline{\gamma}_{21}^{\{2\}(j)} - \theta_1^{\{1\}}\overline{\alpha}_1^{\{2\}(j)}], \qquad j = 1, 2, \qquad n = 1, 2,
$$

$$
a_{nj} = \widetilde{\gamma}_{2n}^{\{1\}(j)} e^{(-1)^{j+\tau_j+1} k\gamma_{\tau_j}^{\{1\}} h}, \qquad j = \overline{1,4}, \qquad a_{n,4+j} = -\theta_1^{\{1\}\delta_{1n}}\tau_{j2}\overline{\gamma}_{2n}^{\{2\}(j)},
$$

$$
j = 1, 2, \quad n = 4, 5, \quad b_n = i^{\delta_{2n}-1}k^{-2}\theta_1^{\{1\}}P_n^F, \quad n = 1, 2, \quad b_n = 0, \quad n = \overline{3,6}.
$$

Напряжения и скорости перемещений в слое и полупространстве с учетом (8) и (10) можно представить в виде

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{Q}_{nj}^{\{s\}F} = \frac{i^{1-\delta_{nj}}(i\theta_1^{\{1\}}P_1^F\Gamma_{nj}^{\{s\}(1)} + P_2^F\Gamma_{nj}^{\{s\}(2)})}{\Delta(k)},\\
&\dot{u}_n^{\{s\}F} = \frac{(-i)^{\delta_{n1}}v(i\theta_1^{\{1\}}P_1^F\Gamma_n^{\{s\}(1)} + P_2^F\Gamma_n^{\{s\}(2)})}{\Delta(k)},
\end{aligned} \qquad (12)
$$

где

$$
\Gamma_{nj}^{\{s\}(q)} = \sum_{m=1}^{4} \tau_{ms}\gamma_{nj}^{\{s\}(m)} U_{mq}^{\{s\}} e^{(-1)^{m+\tau_m} k\gamma_{\tau_m}^{\{s\}}(y_2+h_{s-1})},
$$

$$
\Gamma_n^{\{s\}(q)} = \sum_{m=1}^{4} \tau_{ms}\alpha_n^{\{s\}(m)} U_{mq}^{\{s\}} e^{(-1)^{m+\tau_m} k\gamma_{\tau_m}^{\{s\}}(y_2+h_{s-1})}, \qquad q, s, j, n = 1, 2.
$$

Трансформанты характеристик напряженно-деформированного состояния определяются согласно (12) с учетом значений корней характеристического уравнения (2) и условий контакта (3) и (4).

Для того чтобы перейти в формулах (12) к оригиналам, следует воспользоваться обратным преобразованием Фурье.

1. *Гузь А. Н.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – Киев: А. С. К, 2004. – 672 с.
2. *Бабич С. Ю., Глухов Ю. П.* Напряженно-деформированное состояние слоистого предварительно-напряженного полупространства при воздействии подвижной нагрузки // Системні технології. Регіон. міжвуз. зб. наук. праць. – 2009. – Вип. 3(62). – С. 93–98.
3. *Глухов Ю. П.* Представление решения задачи о реакции многослойного полупространства с начальными напряжениями на подвижную нагрузку. Сжимаемый материал // Там само. – 2009. – Вип. 3(62). – С. 105–110.
4. *Глухов Ю. П.* Динамика многослойного предварительно напряженного полупространства при воздействии подвижной нагрузки // Доп. НАН України. – 2010. – № 2. – С. 53–58.
5. *Глухов Ю. П.* Об одной динамической задаче для предварительно напряженной полосы с закрепленным основанием // Вісн. нац. Черкаськ. ун-ту. – 2010. – Вип. 172. – С. 20–24.

6. *Глухов Ю. П.* Об одной задаче о воздействии подвижной загрузки на многослойное основание // Пробл. обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Зб. наук. праць. – 2010. – Вип. 14. – С. 102–108.
7. *Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Гузь А. Н.* Динамика слоистого несжимаемого полупространства с начальными напряжениями при воздействии подвижной нагрузки // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 3. – С. 268–285.
8. *Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Гузь А. Н.* Об одной динамической задаче для слоистого сжимаемого полупространства с начальными напряжениями // Там же. – 2008. – **44**, № 4. – С. 388–405.
9. *Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Гузь А. Н.* Определение реакции на движущуюся нагрузку двухслойного упругого полупространства с начальными напряжениями с применением комплексных потенциалов // Там же. – 2008. – **44**, № 5. – С. 481–492.
10. *Гузь А. Н., Бабич С. Ю., Глухов Ю. П.* Статика и динамика упругих оснований с начальными (остаточными) напряжениями. – Кременчуг: Кременчуг, 2007. – 795 с.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 25.11.2010

Yu. P. Glukhov

Multilayered pre-stressed half-plane under the influence of moving load

Within the linearized theory of elasticity for bodies with initial stresses, a plane problem of the perturbation of the multilayered pre-stressed half-space by a surface load moving with a constant speed is posed. As an example, the two-dimensional problem for a two-layered semi-space is considered. With the help of the Fourier integral method, a fundamental solution to the problem is obtained in the general form under various conditions of contact and speeds of a load.