УДК 519.85

Член-корреспондент НАН Украины **Ю. Г. Стоян, Т. Е. Романова, Н. И. Чернов**

Псевдонормализованные Ф-функции для двумерных φ-объектов

Вводиться поняття вільної від радикалів псевдонормалізованої Ф-функції, що дозволяє описувати обмеження на мінімально та максимально припустимі відстані між двовимірними φ-об'єктами. Будується повний клас псевдонормалізованих Ф-функцій для класу базових φ-об'єктів. Допускаються афінні відображення трансляції та повороту. Наводиться теорема про існування вільної від радикалів псевдонормалізованої Ф-функції для пари довільних φ-об'єктів, границі яких формуються об'єднанням дуг кіл і відрізків прямих.

При построении математических моделей оптимизационных задач упаковки и раскроя [1] возникает необходимость в формализации ограничений на допустимые расстояния между реальными объектами. Применение нормализованных Ф-функций [2] иногда приводит к сложным вычислительным процедурам. Цель данной работы — построение свободных от радикалов Ф-функций, учитывающих ограничения на допустимые расстояния между двумерными объектами.

Имеются замкнутые ограниченные φ-объекты A, $B \subset \mathbb{R}^2$ [3]. Полагаем, что граница объекта A задана последовательностью дуг окружностей и отрезков прямых, здесь $\mathbb{R}^2$ — двумерное арифметическое евклидовое пространство. Допускаются аффинные отображения трансляции и поворота объекта A. Положение A в пространстве $\mathbb{R}^2$ определяет вектор $u = (x_t, y_t, \theta)$, а координаты точек $(x, y) \in A$ определяются по формуле $x = x_0 \cos\theta + y_0 \sin\theta + x_t$, $y = -x_0 \sin\theta + y_0 \cos\theta + y_t$, где (x_0, y_0) — произвольная точка объекта A в собственной системе координат объекта A, θ — угол поворота объекта A, (x_t, y_t) — вектор трансляции объекта A в пространстве $\mathbb{R}^2$.

Пусть задано ограничение на допустимое расстояние ρ между объектами A и B, т. е. $\operatorname{dist}(A, B) \geqslant \rho^-$, если $\rho = \rho^-$, или $\operatorname{dist}(A, B) \leqslant \rho^+$, если $\rho = \rho^+$, где ρ^- (ρ^+) — минимально (максимально) допустимое расстояние между объектами A и B, $\operatorname{dist}(A, B) = \min\limits_{a \in A, b \in B} d(a, b)$, $d(a, b)$ — евклидово расстояние в $\mathbb{R}^2$. В терминах Ф-функций ограничение $\operatorname{dist}(A, B) \geqslant \rho^-$ можно описать в виде $\widetilde{\Phi}^{AB} \geqslant \rho^-$, а $\operatorname{dist}(A, B) \leqslant \rho^+ \Leftrightarrow 0 \leqslant \widetilde{\Phi}^{AB} \leqslant \rho^+$, где $\widetilde{\Phi}^{AB}$ — *нормализованная* Ф-функция объектов A и B [4]. Заметим, что $\widetilde{\Phi}^{AB}$ зависит от $u^A = (x_t^A, y_t^A, \theta^A)$ и $u^B = (x_t^B, y_t^B, \theta^B)$.

Построение нормализованных Ф-функций для произвольных φ-объектов — достаточно сложная процедура. Кроме того, нормализованные Ф-функции неизбежно содержат радикалы, что нежелательно для решения оптимизационных задач упаковки и раскроя с применением градиентных методов оптимизации.

Определение. Непрерывная всюду определенная функция $\widehat{\Phi}^{AB}$ называется *псевдонормализованной* Ф-функцией объектов A и B, если выполняются следующие свойства:

$$\widehat{\Phi}^{AB} > 0, \qquad \text{если} \qquad \mathrm{dist}(A,B) > \rho,$$
$$\widehat{\Phi}^{AB} = 0, \qquad \text{если} \qquad \mathrm{dist}(A,B) = \rho,$$
$$\widehat{\Phi}^{AB} < 0, \qquad \text{если} \qquad \mathrm{dist}(A,B) < \rho.$$

В частности, из определения следуют соотношения

$$\begin{aligned} &\mathrm{dist}(A,B) \geqslant \rho^- \Leftrightarrow \widetilde{\Phi}^{AB} \geqslant \rho^- \Leftrightarrow \widehat{\Phi}^{AB} \geqslant 0, \\ &\mathrm{dist}(A,B) \leqslant \rho^+ \Leftrightarrow 0 \leqslant \widetilde{\Phi}^{AB} \leqslant \rho^+ \Leftrightarrow \widehat{\Phi}^{AB} \leqslant 0, \;\; \Phi^{AB} \geqslant 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Таким образом, $\widetilde{\Phi}^{AB} = \rho$ влечет $\widehat{\Phi}^{AB} = 0$, где ρ — заданное допустимое расстояние между объектами A и B.

Рассмотрим множество $\widehat{A} = A \oplus C(\rho)$, где $C(\rho)$ — круг радиуса ρ с центром в начале собственной системы координат множества A, $\oplus$ — символ операции суммы Минковского [5]. Тогда $\widehat{\Phi}^{AB} = \Phi^{\widehat{A}B}$, где $\Phi^{\widehat{A}B}$ — Ф-функция $\widehat{A}$ и B.

В [3] показано, что всегда существует свободная от радикалов Ф-функция для двух произвольных φ-объектов, граница которых описывается последовательностью отрезков прямых и дуг окружностей, в частности, для $\widehat{A}$ и B, которая может быть определена как

$$\Phi^{\widehat{A}B} = \min\{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{\hat{n}}\}, \tag{2}$$

где Φ_i, $i = 1, \ldots, \hat{n}$, $\hat{n}$ — число пар базовых объектов [3], полученных в результате декомпозиции объектов $\widehat{A}$ и B. В этом случае для определения Ф-функции (2) необходимо построение множества $\widehat{A}$ в явном виде.

Один из очевидных методов формирования множества $\widehat{A}$ — построение эквидистанты [6, 7] для границы множества A с использованием трудоемких алгоритмов, например, приведенных в [6, 7]. В пределах данного исследования предлагается иной подход, учитывающий особенности построения Ф-функций для φ-объектов, границы которых описываются дугами окружностей и отрезками прямых.

В [3] приведено утверждение о том, что объект A всегда может быть представлен в виде

$$A = A_1 \bigcup \ldots \bigcup A_p, \tag{3}$$

где $\mathrm{int}\, A_i \bigcap \mathrm{int}\, A_j = \varnothing$, $i, j \in I_p = \{1, 2, \ldots, p\}$, $i \neq j$, $A_i, A_j \in \Im = \{K, D, H, V\}$, $\mathrm{int}(\cdot)$ — внутренность множества $(\cdot)$, K — выпуклый многоугольник, заданный вершинами $p_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, m$; $D = C \bigcap T$ — круговой сегмент, $T = \mathrm{conv}\{p_1, p_2, p_3\}$, C — круг радиуса r с центром (x_c, y_c), p_1 и p_2 — концевые точки хорды сегмента D; $H = T \bigcap C^*$, $C^* = \mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{int}\, C$, $T = \mathrm{conv}\{H\}$, заданный вершинами $p_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$; $V = T \bigcap C_1^* \bigcap C_2$, где C_2 — круг радиуса $r_2 > r_1$, при этом $\Phi^{C^*C} = 0$, Φ^{C^*C} — Ф-функция C_2^* и C_1 [8].

Из этого утверждения следует, что множество $\widehat{A}$ всегда может быть задано так:

$$\widehat{A} = \widehat{A}_1 \bigcup \ldots \bigcup \widehat{A}_p, \tag{4}$$

где $\widehat{A}_i \in \Im = \{\widehat{K}, \widehat{D}, \widehat{H}, \widehat{V}\}$, $\widehat{A}_i = A_i \oplus C(\rho)$.

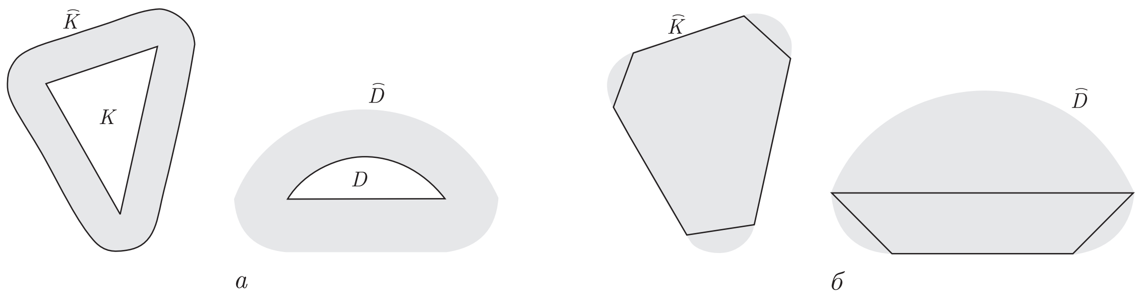


Рис. 1. Объекты $\widehat{K}$ $(m = 3)$ и $\widehat{D}$. Декомпозиция объектов $\widehat{K}$ и $\widehat{D}$

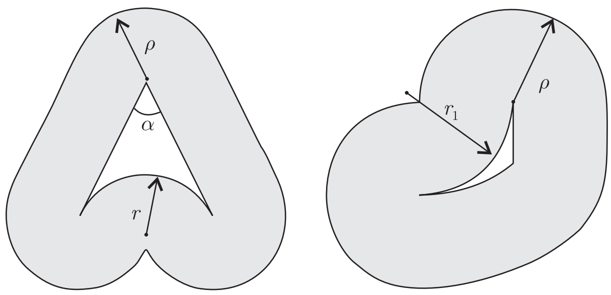


Рис. 2. Объект $\widehat{H}$: $\rho > r$, $\alpha < 90^\circ$. Объект $\widehat{V}$: $\rho < r_1$

Учитывая (4), Φ-функция для $\widehat{A}$ и B примет вид

$$\widehat{\Phi}^{AB} = \min\{\Phi_{ij},\ i \in I_p,\ j \in I_q\}, \tag{5}$$

где Φ_{ij} — Φ-функция для множеств $\widehat{A}_i \in \widehat{\Im}$, $B_j \in \Im$.

Из (5) следует необходимость построения полного класса *псевдонормализованных* Φ-функций $\widehat{\Phi}^{AB}$ для множеств A и B из семейства базовых объектов $\Im$, что эквивалентно построению Φ-функций $\widehat{\Phi}^{B}$ для всех пар $\widehat{A} \in \widehat{\Im}$ и $B \in \Im$.

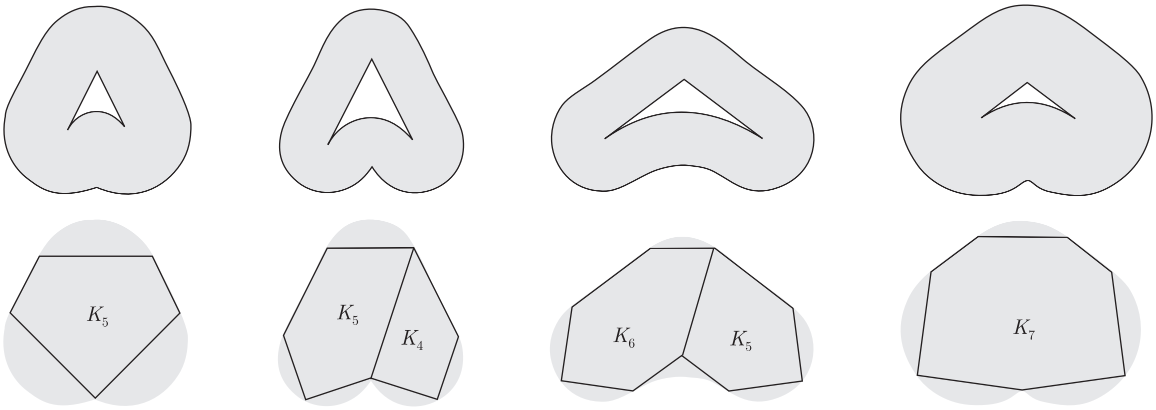
Осуществим декомпозицию каждого объекта $\widehat{A} \in \widehat{\Im}$, используя алгоритм [9]. Заметим, что результат декомпозиции объектов $\widehat{K}$ и $\widehat{D}$ (рис. 1, *а*) может быть однозначно определен так (см. рис. 1, *б*):

$$\widehat{K} = \bigcup_{i=1}^{m} D_i \bigcup K_{2m}, \qquad \text{где} \qquad K_{2m} = \operatorname{conv}\{\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_{2m}\};$$

$$\widehat{D} = \bigcup_{i=1}^{3} D_i \bigcup K_4, \qquad \text{где} \qquad K_4 = \operatorname{conv}\{\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_4\}.$$

В случае декомпозиции объектов $\widehat{A} \in \{\widehat{H}, \widehat{V}\}$ на базовые объекты из множества $\Im$ (рис. 2), в зависимости от соотношений ρ и r, а также от величины угла α, имеем:

$$\widehat{H} = \bigcup_{i=1}^{3} D_i \bigcup K_5, \quad \text{где} \quad K_5 = \operatorname{conv}\{\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_5\} \quad (\text{рис. } 3,\ а), \quad \text{если} \quad \rho > r, \quad \alpha \leqslant 90^\circ;$$



а *б* *в* *г*

Рис. 3. Объекты вида $\widehat{H}$. Декомпозиция объектов $\widehat{H}$

а *б*

Рис. 4. Объекты вида $\widehat{V}$ и декомпозиция объектов $\widehat{V}$

$$\widehat{H} = \bigcup_{i=1}^{5} D_i \bigcup K_4 \bigcup K_5, \quad \text{где} \quad K_4 = \operatorname{conv}\{\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_4\}, \quad K_5 = \operatorname{conv}\{\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_5\}$$

$$\text{(см. рис. 3, } \textit{б}\text{)}, \quad \text{если} \quad \rho = r, \quad \alpha \leqslant 90^\circ;$$

$$\widehat{H} = \bigcup_{i=1}^{5} D_i \bigcup H' \bigcup K_6 \bigcup K_5, \quad \text{где} \quad K_6 = \operatorname{conv}\{\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_6\}, \quad K_5 = \operatorname{conv}\{\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_5\}$$

$$\text{(см. рис. 3, } \textit{в}\text{)}, \quad \text{если} \quad \forall\alpha \quad \rho < r;$$

$$\widehat{H} = \bigcup_{i=1}^{5} D_i \bigcup K_7, \quad \text{где} \quad K_7 = \operatorname{conv}\{\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_7\} \quad \text{(см. рис. 3, } \textit{г}\text{)}, \quad \text{если} \quad \rho \geqslant r, \quad \alpha > 90^\circ;$$

$$\widehat{V} = \bigcup_{i=1}^{6} D_i \bigcup K_7, \quad \text{где} \quad K_7 = \operatorname{conv}\{\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_7\} \quad \text{(см. рис. 4, } \textit{а}\text{)}, \quad \text{если} \quad \rho \geqslant r_1;$$

$$\widehat{V} = \bigcup_{i=1}^{6} D_i \bigcup H' \bigcup K_6 \bigcup K_5, \quad \text{где} \quad K_6 = \operatorname{conv}\{\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_6\}, \quad K_5 = \operatorname{conv}\{\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_5\}$$

$$\text{(см. рис. 4, } \textit{б}\text{)}, \quad \text{если} \quad \rho < r_1.$$

Тогда для $B \in \Im$, имеем

$$\Phi^{\widehat{K}B} = \min\{\Phi^{KB}, \Phi^{D_iB}, i = 1, \dots, m\}; \tag{6}$$

$$\Phi^{\widehat{D}B} = \min\{\Phi^{KB}, \Phi^{D_iB}, i = 1, 2, 3\}; \tag{7}$$

$$\Phi^{\widehat{H}B} = \min\{\Phi^{KB}, \Phi^{D_iB}, i = 1, 2, 3\}, \quad \text{если} \quad \rho > r, \quad \alpha \leqslant 90^\circ, \tag{8}$$

$$\Phi^{\widehat{H}B} = \min\{\Phi^{K^jB}, j = 1, 2, \Phi^{D_iB}, i = 1, \dots, 5\}, \quad \text{если} \quad \rho = r, \quad \alpha \leqslant 90^\circ,$$

$$\Phi^{\widehat{H}B} = \min\{\Phi^{H'B}, \Phi^{K^jB}, j = 1, 2, \Phi^{D_iB}, i = 1, \dots, 5\}, \quad \text{если} \quad \forall\alpha \quad \rho < r,$$

$$\Phi^{\widehat{H}B} = \min\{\Phi^{KB}, \Phi^{D_iB}, i = 1, \dots, 5\}, \quad \text{если} \quad \rho \geqslant r, \quad \alpha > 90^\circ;$$

$$\Phi^{\widehat{V}B} = \min\{\Phi^{KB}, \Phi^{D_iB}, i = 1, \dots, 6\}, \quad \text{если} \quad \rho \geqslant r_1, \tag{9}$$

$$\Phi^{\widehat{V}B} = \min\{\Phi^{H'B}, \Phi^{K^jB}, j = 1, 2, \Phi^{D_iB}, i = 1, \dots, 6\}, \quad \text{если} \quad \rho < r_1, \tag{10}$$

где Φ^{KB}, Φ^{DB}, Φ^{HB} — Φ-функции для объектов $K, D, H \in \Im$ и объекта B.

Таким образом, формулы (6)–(10) описывают полный класс *псевдонормализованных* Φ-функций $\widehat{\Phi}^{AB}$ для базовых объектов $A, B \in \Im$.

Из (1)–(10) и вида Φ-функций для базовых объектов [10] следует справедливость следующего утверждения.

Теорема. *Для φ-объектов A и B, границы которых формируются последовательностью дуг окружностей и отрезков прямых, всегда существует свободная от радикалов псевдонормализованная Φ-функция $\widehat{\Phi}^{AB}$.*

Таким образом, *псевдонормализованная* Φ-функция $\widehat{\Phi}^{AB}$ (5) для множеств A и B может быть определена как Φ-функция $\Phi^{\widehat{A}B}$ для множеств $\widehat{A} = \widehat{A}_1 \bigcup \cdots \bigcup \widehat{A}_p$ и $B = B_1 \bigcup \cdots \bigcup B_q$, $\widehat{A}_i \in \widehat{\Im}$, $B_j \in \Im$, $i \in I_p$, $j \in I_q$, вида

$$\Phi^{\widehat{A}B} = \min\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n\},$$

где $\Phi_i \in \Phi^{\Im} = \{\Phi^{KK}, \Phi^{DK}, \Phi^{HK}, \Phi^{VK}, \Phi^{DH}, \Phi^{HH}, \Phi^{VH}, \Phi^{DD}, \Phi^{DV}, \Phi^{VV}\}$, $n = q\sum\limits_{i=1}^{p} n_i$, n_i — число базовых объектов $A_{il} \in \Im$, формирующих декомпозицию объектов $\widehat{A}_i \in \widehat{\Im}$, $\widehat{A}_i = \bigcup\limits_{l=1}^{n_i} A_{il}$.

Для формирования Φ-функций $\widehat{\Phi}^{AB}$ может быть также использована Φ-функция $\Phi^{A\widehat{B}}$ для объектов A и $\widehat{B}$. Этот факт позволяет сократить вычислительные процедуры за счет выбора наименьшего числа базовых объектов при декомпозиции, а также выбора наиболее простых Φ-функций. Например, $\widehat{\Phi}^{VK}$ для объектов K_3 (см. рис. 3, *а*) и V (см. рис. 4, *б*) может быть построена как $\widehat{\Phi}^{VK} = \Phi^{\widehat{V}K}$ или $\widehat{\Phi}^{VK} = \Phi^{\widehat{K}V}$. Из результата декомпозиции множеств $\widehat{K}_3$ (см. рис. 3, *б*) и $\widehat{V}$ (см. рис. 4, *б*) и формул (6), (10) следует, что наиболее эффективен выбор Ф-функции $\Phi^{\widehat{K}V}$.

Заметим, что при построении Ф-функций $\widehat{\Phi}^{AB}$ используются только линейные, квадратичные и тригонометрические функции вида $\sin\theta$ и $\cos\theta$.

1. *Wäscher G., Haußner H., Schumann H.* An improved typology of cutting and packing problems // Eur. J. Operat. Res. – 2007. – **183**, is. 3, 16. – P. 1109–1130.
2. *Stoyan Y. G., Chugay A.* Packing cylinders and rectangular parallelepipeds with distances between them // Ibid. – 2008. – **197**. – P. 446–455.
3. *Chernov N., Stoyan Y., Romanova T.* Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem // Comput. Geometry: Theory and Applications. – 2010. – **43**, No 5. – P. 535–553.
4. *Bennell J., Scheithauer G., Stoyan Yu., Romanova T.* Tools of mathematical modelling of arbitrary object packing problems // J. Ann. Operat. Res. – 2010. – **179**, is. 1. – P. 343–368.
5. *Minkowski H.* Dichteste gitterformige. Lagerung kongruenter Körper // Nachr. Kon. Ges. Wiss. Gottingen. – 1904. – P. 311–355.
6. *Farouki R. T., Koenig T., Tarabanis K. A. et al.* Path planning with offset curves for layered fabrication processes // J. Manufact. Syst. – 1995. – **14**. – P. 355–368.
7. *Gray A.* Parallel curves // Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica. – Boca Raton, FL: CRC Press, 1997. – P. 115–117.
8. *Stoyan Y., Terno J., Scheithauer G., Gil N., Romanova T.* Phi-functions for primary 2D-objects // Studia Informatica Universalis. – 2001. – **2**. – P. 1–32.
9. *Гиль Н. И., Романова Т. Е., Злотник М. В.* Декомпозиция двумерных геометрических объектов // Доп. НАН України. – 2010. – № 7. – С. 33–37.
10. *Стоян Ю. Г., Романова Т. Е., Чернов Н. И., Панкратов А. В.* Полный класс Ф-функций для базовых двумерных φ-объектов // Там само. – 2010. – № 12. – С. 25–30.

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 04.10.2010

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **Yu. G. Stoyan, T. E. Romanova, N. I. Chernov**

Pseudonormalized Φ-functions for two-dimensional φ-objects

We consider a concept of radical free pseudonormalized Φ-functions which allow us to describe restrictions on minimal and maximal allowable distances between two-dimensional φ-objects. A complete class of pseudonormalized Φ-functions for a family of basic two-dimensional φ-objects is derived. We allow translations and rotations of the φ-objects in a two-dimensional Euclidean space. The theorem of existence of a radical free pseudonormalized Φ-function for a pair of arbitrary shaped φ-objects whose frontiers are formed by the union of line segments and circular arcs is formulated.