



УДК 539.3

© 2011

Г. Д. Гавриленко, В. И. Мацнер

Устойчивость неидеальных ребристых оболочек при комбинированном нагружении

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины И. С. Чернышенко)

Запропоновано підхід до проблеми стійкості недосконалих ребристих циліндричних оболонок при дії позовжньої сили і внутрішнього (зовнішнього) тиску. Наведено результати розрахунків для різних типів підкріплень та досліджено залежність критичних параметрів позовжньої сили від величини внутрішнього або зовнішнього тиску.

Методика расчета. В работе [1] предложен новый подход к оценке параметров критических сил для несовершенных цилиндрических оболочек, имеющих произвольно размещенные осесимметричные прогибы и находящиеся под действием продольного сжатия. Затем этот подход применен для расчета идеальных подкрепленных оболочек при действии на них осевых сжимающих сил и внутреннего или внешнего давления [2]. В нашей работе мы используем его для вычисления устойчивости цилиндрических оболочек, подкрепленных ребрами жесткости в двух направлениях, с осесимметричными начальными прогибами в виде вмятин и выпучин, при совместном действии осевых сжимающих сил и внутреннего или внешнего давления (рис. 1). Части оболочки $\Delta_i = \ell_{n+1} - \ell_n$ ($n = 1, 2, \dots, N$, где N — число вмятин) вследствие наличия начальных прогибов будут искривлены вдоль образующих по радиусам ρ_n и рассматриваются как оболочки, близкие по форме к цилиндрическим с радиусами кривизны r, ρ_n .

Докритическое напряженное состояние оболочки при совместном действии нагрузок характеризуется напряжениями

$$\{N_x^F, (N_\theta^F)_n\} = \begin{cases} -\sigma h \alpha_1, \pm q r & \text{при } x \in [0, \ell_1] \cap x \in [\ell_4, \ell], \\ -\sigma h \alpha_1, \pm q r + r_n \sigma h \alpha_1 & \text{при } x \in [\ell_n, \ell_{n+1}], \end{cases} \quad (1)$$

где σ — докритическое сжимающее нормальное напряжение; q — радиальная нагрузка; знак (+) соответствует внутреннему давлению, знак (–) — внешнему; $\alpha_1 = 1 + F_s/h\ell_s$, F_s , ℓ_s — площадь поперечного сечения стрингера и расстояние между стрингерами, $\ell_s = 2\pi r/k_s$, k_s — число стрингеров; h, r, ℓ — толщина, радиус срединной поверхности и длина оболочки.

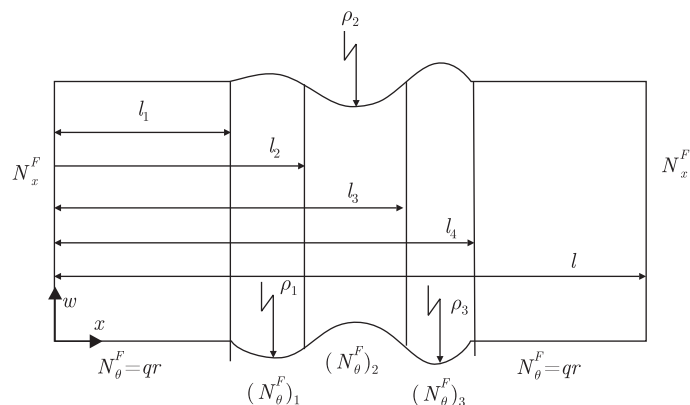


Рис. 1. Схема оболочки

При выводе расчетных формул применен энергетический метод. Задача решалась в перемещениях при их одночленной аппроксимации.

Не повторяя подробного вывода, который отличается от приведенного в работе [1] только наличием слагаемых, зависящих от поперечного давления q , запишем выражение для полной энергии рассматриваемой системы в виде

$$\begin{aligned}
 V = & \frac{K\pi\ell}{4r} \left\{ (u_{ij}\lambda - iv_{ij} + w_{ij})^2 + 2(1 - \mu)\lambda u_{ij}(iv_{ij} - w_{ij}) + \frac{1 - \mu}{2}(-u_{ij}i + v_{ij}\lambda)^2 + \right. \\
 & + \alpha_s(\lambda u_{ij} - z_{sr}\lambda^2 w_{ij})^2 + \alpha_r[v_{ij}(1 - z_{rr}) - w_{ij}(1 - i^2 z_{rr})]^2 + \\
 & + \frac{1}{a} \{ [(\lambda^2 + i^2)w_{ij} - iv_{ij}]^2 + 2(1 - \mu)i^2[\lambda^2 w_{ij}(v_{ij} - iw_{ij}) - (v_{ij} - iw_{ij})^2] + \\
 & + (\beta_s\lambda^2 + \beta_{x\theta s}i^2)w_{ij}^2\lambda^2 + \beta_{x\theta r}i^2(\lambda w_{ij} + u_{ij})^2 \} + S_{12}w_{ij}^2 + 2S_{11}\lambda u_{ij}w_{ij} - \\
 & - 2\mu S_{11}w_{ij}(iv_{ij} - w_{ij}) + \alpha_s S_{12}(w_{ij} - z_{sr}\lambda u_{ij})^2 + 2\alpha_s S_{11}(w_{ij} - z_{sr}\lambda u_{ij}) \times \\
 & \times (\lambda u_{ij} - z_{sr}\lambda^2 w_{ij}) + \frac{1}{a} [S_{12}\lambda^2 u_{ij}^2 + 2S_{11}\lambda^3 u_{ij}w_{ij} + 2\mu S_{11}\lambda u_{ij}(i^2 w_{ij} - iv_{ij}) + \\
 & + 2(1 - \mu)[S_{21}iu_{ij}(2i\lambda w_{ij} - 2\lambda v_{ij}) + S_{22}u_{ij}^2] + \beta_s \lambda u_{ij}(\lambda u_{ij} S_{12} + \lambda^2 S_{11}w_{ij}) + \\
 & \left. + \beta_{x\theta s}\lambda v_{ij}(S_{12}\lambda v_{ij} - 2S_{21}i\lambda w_{ij}) \right\} + A_2, \quad (2)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 A_2 = & -\frac{K\pi\ell}{4} \frac{1 - \mu^2}{rE} \left[\sigma\alpha_1(\lambda^2 - i^2 S_{11}) \pm q \frac{r}{h} i^2 (1 + S_{11}) \right] w_{ij}^2. \\
 S_{11} = & \sum_{n=1}^N r_n I_{1n}, \quad S_{12} = \sum_{n=1}^N r_n^2 I_{1n}, \quad S_{21} = \sum_{n=1}^N r_n I_{2n}, \quad S_{22} = \sum_{n=1}^N r_n^2 I_{2n}, \quad (3) \\
 I_{1n} = & \frac{2}{\ell} \int_{\ell_n}^{\ell_{n+1}} \sin^2 \frac{\lambda x}{r} dx, \quad I_{2n} = \frac{2}{\ell} \int_{\ell_n}^{\ell_{n+1}} \cos^2 \frac{\lambda x}{r} dx.
 \end{aligned}$$

Из условий минимума полной энергии системы $\partial V/\partial u_{ij} = 0$, $\partial V/\partial v_{ij} = 0$, $\partial V/\partial w_{ij} = 0$ можно определить критические значения продольных сжимающих нагрузок

$$\left(\frac{\sigma}{E}\right)_{cr} = \left[\bar{A}_{33} + \frac{2A_{12}A_{13}A_{23} - A_{11}A_{23}^2 - A_{22}A_{13}^2}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \right] \frac{1}{A_{33}''}, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{A}_{33} &= A_{33} \pm \frac{q}{E} \frac{r}{h} (1 + S_{11})(1 - \mu^2)i^2; & A_{11} &= \alpha_x \lambda^2 + \frac{1 - \mu}{2} i^2 \left(1 + \frac{\beta_{x\theta r}}{a} \right); \\ A_{12} &= -i\lambda \frac{1 + \mu}{2}; & A_{13} &= \lambda(\mu - \alpha_s z_{sr} \lambda^2) + i^2 \frac{\lambda \beta_{x\theta r}}{a}; \\ A_{22} &= \frac{1 - \mu}{2} \lambda^2 + c_\theta i^2 + \frac{1}{a} [i^2 \beta_\theta + 2(1 - \mu)\lambda^2]; \\ A_{23} &= -i - i\alpha_r (1 - z_{rr})(1 - i^2 z_{rr}) - \frac{i}{a} (\beta_\theta i^2 + (2 - \mu)\lambda^2); \\ A_{33} &= 1 + \alpha_s z_{sr}^2 \lambda^4 + \alpha_r (1 - z_{rr} i^2)^2 + \frac{(\lambda^2 + i^2)^2 + \beta_s \lambda^4 + \beta_r i^4 + \beta_{s\theta} i^2 \lambda^2}{a}; \\ A_{33}'' &= (1 - \mu^2) \alpha_1 \lambda^2; & z_{sr} &= \frac{z_s}{r}, & z_{rr} &= \frac{z_r}{r}, & c_\theta &= 1 + \alpha_r (1 - z_{rr})^2, \\ \alpha_x &= 1 + \alpha_s, & \alpha_s &= \frac{E_s F_s}{K l_s}, & \alpha_\theta &= 1 + \alpha_r, & \alpha_r &= \frac{E_r F_r}{K l_r}, \\ \beta_x &= 1 + \beta_s, & \beta_s &= \frac{E_s I_s}{D l_s}, & \beta_\theta &= 1 + \beta_r, & \beta_r &= \frac{E_r I_r}{D l_r}, \\ \beta_{x\theta} &= \beta_{x\theta s} + \beta_{x\theta r}, & \beta_{x\theta s} &= \frac{G_s I_{kps}}{D l_s}, & \beta_{x\theta r} &= \frac{G_r I_{kpr}}{D l_r}, \\ c_\theta &= 1 + \alpha_r (1 - z_{rr})^2, & z_{sr} &= \frac{z_s}{r}, & z_{rr} &= \frac{z_r}{r}, & a &= \frac{12r^2}{h}. \end{aligned} \quad (5)$$

Учитывая наличие ребер, при определении критических нагрузок, кроме общего случая деформирования оболочки, рассматриваем и частные случаи, при реализации которых на деформации подкрепляющих ребер наложены ограничения [1].

Было рассмотрено 17 вариантов расчета: *общий* случай деформации (все стрингеры и шпангоуты работают на растяжение — сжатие, изгиб и кручение) и *восемь частных* случаев и подслучаев. *Первый* (стрингеры работают на растяжение — сжатие и изгибаются, шпангоуты работают аналогично общему случаю); первый подслучай отличается от первого случая тем, что не учитывается жесткость стрингеров и шпангоутов на растяжение — сжатие; *второй* (стрингеры только закручиваются, шпангоуты учтены аналогично общему); *третий* (стрингеры работают как в общем случае, а в шпангоутах не учтена жесткость на кручение); *четвертый* (стрингеры работают как в общем случае, шпангоуты работают только на кручение); *пятый* (стрингеры работают на растяжение — сжатие и изгиб, шпангоуты только на кручение); *шестой* (стрингеры только закручиваются, шпангоуты работают на растяжение — сжатие и изгиб); *седьмой* (стрингеры и шпангоуты работают на растяжение — сжатие и изгиб); *восьмой* (стрингеры и шпангоуты только закручиваются), а в восьмом подслучае учитываются только ограничения на вид деформации.

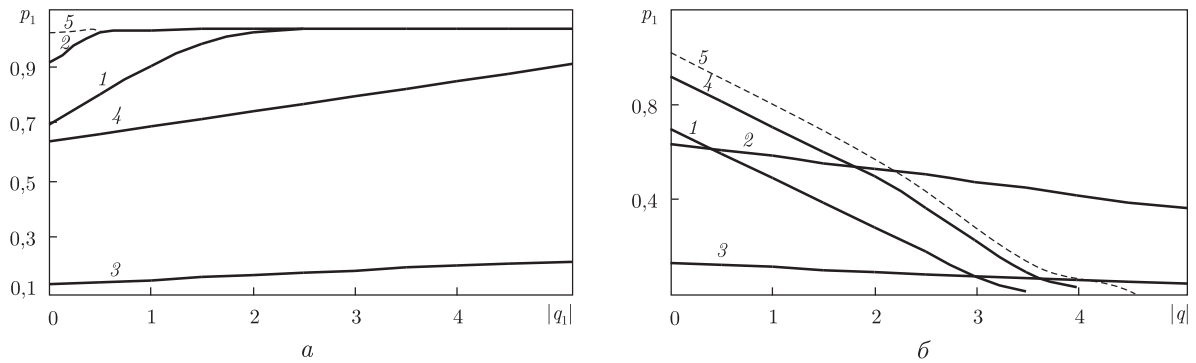


Рис. 2. Оболочка, подкрепленная стрингерами

Во втором и шестом подслучаях, аналогичных второму и шестому случаям, не учтена дополнительно жесткость шпангоутов на растяжение — сжатие. В третьем и седьмом подслучаях, аналогичных третьему и седьмому случаям, не учтена жесткость всех ребер на растяжение — сжатие. В четвертом и пятом подслучаях, аналогичных четвертому и пятому случаям, не учтена дополнительно жесткость стрингеров на растяжение — сжатие.

Для каждого случая потери устойчивости применяются специальные условия, которые накладываются на числа волн и полуволн, связанных с числом ребер, аналогично работам [2, 3]. Эти условия следующие для каждого случая (для подслучаев они те же, что и для соответствующего случая): *общий* ($2i \neq t[n_s], j \neq t_1[n_r + 1]$); *первый* ($2i = t[n_s], j \neq t_1[n_r + 1]$); *второй* ($2i = t[n_s], j = t_1[n_r + 1]$); *третий* ($2i \neq t[n_s], j = t_1[n_r + 1]$); *четвертый* ($2i \neq t[n_s], j = t_1[n_r + 1]$); *пятый* ($2i = t[n_s], j = t_1[n_r + 1]$); *шестой* ($2i = t[n_s], j \neq t_1[n_r + 1]$); *седьмой* ($2i \neq t[n_s], j \neq t_1[n_r + 1]$); *восьмой* ($2i = t[n_s], j = t_1[n_r + 1]$), где $t = 0, 1, 2, 3, \dots, t_1 = 1, 2, 3, \dots$. Здесь i, j — числа волн и полуволн в окружном и продольном направлениях; n_s, n_r — числа стрингеров и шпангоутов соответственно.

Числовые результаты. На числовых примерах исследовано влияние внешнего (внутреннего) давления и начальных прогибов на величину критической нагрузки осевого сжатия.

Рассмотрены такие оболочки: 1) подкрепленные только стрингерами; 2) подкрепленные только шпангоутами; 3) подкрепленные стрингерами и шпангоутами. Оболочки имели такие относительные размеры $\ell/r = 2,25, r/h = 400$; стрингеры ($k_s = 32$) — уголки $4 \times 3,5 \times 0,5 \cdot 10^{-2}$ м; шпангоуты ($k_r = 4$) — уголки $4 \times 8 \times 0,5 \cdot 10^{-2}$ м. Стрингеры крепились широкой полкой с внешней стороны обшивки, шпангоуты — узкой полкой с внутренней стороны. Материал обшивки и ребер — листовой прокат АМГ — 6 М.

Рассмотрены следующие варианты начальных прогибов оболочек: 1) одна вмятина по середине оболочки $w_{01}/h = -0,5; \Delta\ell_1 = 0,3$; 2) три вмятины (одна вмятина по середине оболочки и две — по краям) $w_{01}/h = w_{05}/h = w_{09}/h = -0,5; \Delta\ell_1 = \Delta\ell_5 = \Delta\ell_9 = 0,1$; 3) девять вмятин по всей оболочке $w_{0n}/h = -0,5$ ($n = 1, 2, \dots, 9$), $\Delta\ell_n = 0,1$; 4) одна вмятина с амплитудой $w_0/h = -0,5$ распространена на всю оболочку ($\Delta\ell = 1$). Здесь w_{0n}/h — безразмерная амплитуда вмятины; $\Delta\ell_n = (\ell_{n+1} - \ell_n)/\ell$ — безразмерная ширина вмятины.

На рис. 2–4 представлены зависимости $p_1 = f(|q_1|)$ для различных значений внутреннего (а) и внешнего (б) давления. Цифрами на рисунках обозначены варианты (1, 2, 3, 4) начальных прогибов. Пунктирная линия (5) соответствует идеальной оболочке.

Как показывают расчеты, минимальные значения критической осевой силы соответствуют таким случаям деформации: для оболочек, подкрепленных стрингерами и шпангоута-

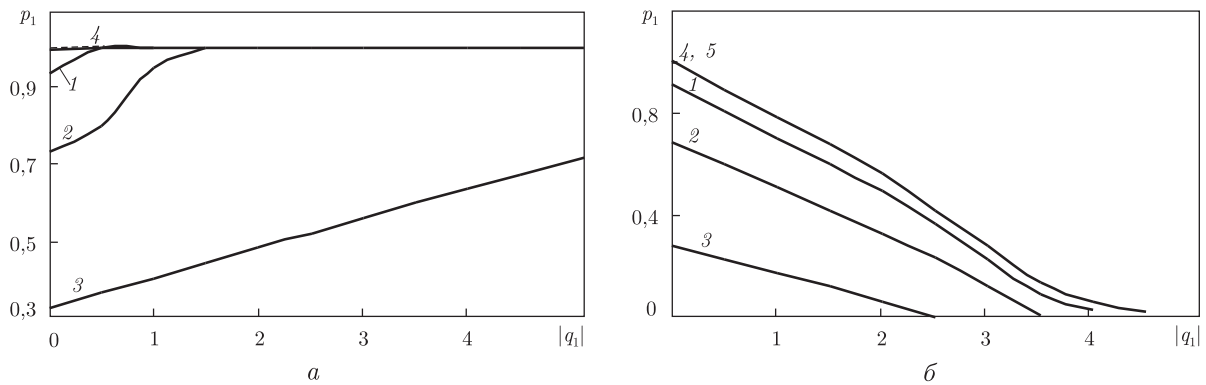


Рис. 3. Оболочка, подкреплённая шпангоутами

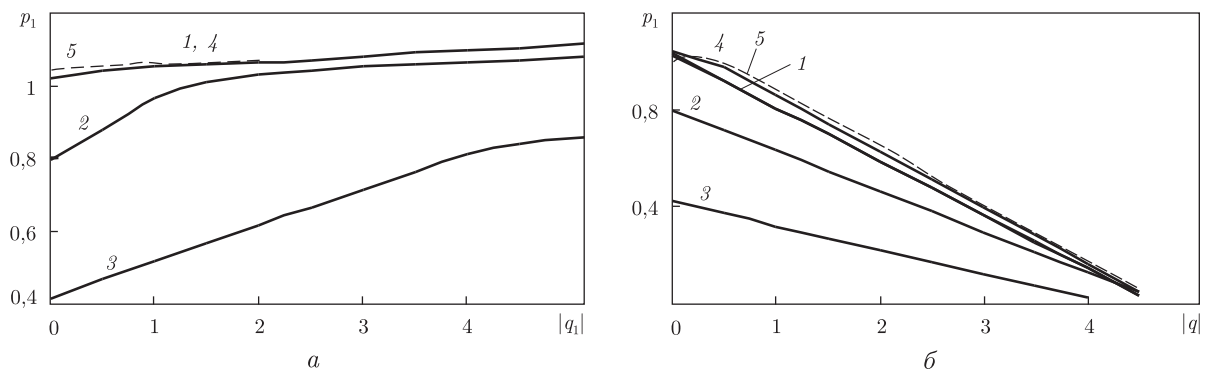


Рис. 4. Оболочка, подкреплённая стрингерами и шпангоутами

ми, — восьмому частному случаю, когда стрингеры и шпангоуты только закручиваются; для оболочек, подкреплённых стрингерами, — четвертому подслучаю, когда стрингеры изгибаются и закручиваются; для оболочек, подкреплённых шпангоутами, — восьмому частному случаю, когда шпангоуты только закручиваются. Для всех рассмотренных оболочек минимальными будут критические нагрузки, которые соответствуют третьему варианту начальных прогибов. Критические нагрузки для всех оболочек для вариантов 1, 2, 4 отличаются незначительно при росте внутреннего давления. При наличии внешнего давления прогибы типа 1, 2, 4 мало влияют на поведение кривых для оболочки, подкреплённой шпангоутами и подкреплённой стрингерами и шпангоутами.

Стрингерная оболочка имеет свои особенности и для прогибов второго типа наблюдается менее резкое падение p_1 при росте q_1 , чем при остальных типах прогибов.

Из анализа устойчивости ребристых цилиндрических оболочек, нагруженных осевыми сжимающими силами и внутренним или внешним давлением, можно сделать такие выводы: изучение различных случаев потери устойчивости неидеальных оболочек позволяет расширить возможности конструктивно-ортотропной теории и точнее оценить параметры критических нагрузок. В частности, удастся оценить не только общий случай потери устойчивости, который приближается к величинам, характерным для идеальной оболочки, но и частные, которые приняты при изучении оболочек с учетом дискретности ребер [3].

Дополнительно проведено сравнение зависимостей $p_1 = f(|q_1|)$ для оболочек, подкреплённых стрингерами и шпангоутами (идеальной и с неправильностями третьего типа) при

анализе всех основных случаев и подслучаев деформирования. Минимальные параметры критических нагрузок для них соответствуют восьмому частному случаю деформации.

Анализ этих результатов также показал, что общий случай деформаций, принятый для обычной конструктивно-ортотропной схемы, определяет как для идеальной, так и неидеальной оболочек величины параметров критических нагрузок значительно более высокие, чем для предложенных здесь других случаев деформации. Минимальные параметры критических нагрузок для идеальной и неидеальной оболочек существенно их занижают, ибо фактически учитывают только жесткость ребер на кручение. Критические нагрузки реальных оболочек (гладких и идеальных) будут выше минимальных величин (восьмой случай) и ниже значений для общего случая, причем величины параметров критических нагрузок для неидеальной оболочки существенно ниже, чем для идеальной (в 2–4 раза).

1. Гавриленко Г. Д., Мацнер В. И. Аналитический метод определения верхних и нижних критических нагрузок для упругих подкрепленных оболочек. – Днепропетровск: Барвикс, 2007. – 294 с.
2. Гавриленко Г. Д., Мацнер В. И. Устойчивость подкрепленных оболочек при совместном действии осевого сжатия и внутреннего (внешнего) давления // Доп. НАН України. – 2010. – № 4. – С. 48–52.
3. Амиро И. Я., Заруцкий В. А., Поляков П. С. Ребристые цилиндрические оболочки. – Киев: Наук. думка, 1973. – 248 с.

*Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев*

Поступило в редакцию 12.10.2010

G. D. Gavrilenko, V. I. Matsner

Stability of imperfect ribbed shells under a combined load

A new approach to the problem of stability of imperfect ribbed cylindrical shells under the action of an axial load and a pressure is proposed. The results of solutions for shells having ribs in different directions are presented. Minimum parameters of the critical load are estimated. The dependence of an axial load on the pressure is determined.