УДК 517.956.223

В. А. Михайлец, А. А. Мурач

Индивидуальные теоремы о разрешимости эллиптических задач и пространства Хермандера

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины М. Л. Горбачуком)

Досліджено розв'язність загальної регулярної еліптичної крайової задачі в гільбертових шкалах просторів, що складаються з нерегулярних розподілів. Знайдено достатню умову на простір правих частин еліптичного рівняння, за якої оператор задачі є обмежений і нетерів у відповідних парах функціональних просторів. Вказано широкі класи просторів Хермандера, що задовольняють цю умову.

Постановка задачи. Пусть Ω — ограниченная область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, с границей Γ, которая является бесконечно гладким замкнутым многообразием размерности $n-1$, и область Ω локально лежит по одну сторону от Γ.

Рассмотрим неоднородную краевую задачу в области Ω:

$$Au = f \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad B_j u = g_j \quad \text{на} \quad \Gamma \quad \text{для} \quad j = 1, \ldots, q. \tag{1}$$

Здесь и далее A — линейное дифференциальное выражение на $\overline{\Omega} := \Omega \bigcup \Gamma$ произвольного четного порядка $2q \geqslant 2$, а B_j, где $j = 1, \ldots, q$, — граничное линейное дифференциальное выражение на Γ порядка $m_j \leqslant 2q - 1$. Все коэффициенты выражений A и B_j являются комплекснозначными функциями, бесконечно гладкими на $\overline{\Omega}$ и на Γ соответственно.

Всюду далее предполагается, что краевая задача (1) *регулярная эллиптическая*. Это означает [1, с. 137], что выражение A правильно эллиптическое на $\overline{\Omega}$, а набор граничных выражений $B := (B_1, \ldots, B_q)$ нормальный и удовлетворяет условию дополнительности по отношению к A на Γ.

Наряду с задачей (1) рассмотрим краевую задачу

$$A^+ v = \omega \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad B_j^+ v = h_j \quad \text{на} \quad \Gamma \quad \text{для} \quad j = 1, \ldots, q, \tag{2}$$

формально сопряженную к задаче (1) относительно формулы Грина:

$$(Au, v)_\Omega + \sum_{j=1}^{q} (B_j u, C_j^+ v)_\Gamma = (u, A^+ v)_\Omega + \sum_{j=1}^{q} (C_j u, B_j^+ v)_\Gamma,$$

где u, $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Здесь A^+ — формально сопряженное к A линейное дифференциальное выражение, а $\{B_j^+\}$, $\{C_j\}$, $\{C_j^+\}$ — некоторые нормальные системы граничных линейных дифференциальных выражений. Через $(\cdot,\cdot)_\Omega$ и $(\cdot,\cdot)_\Gamma$ обозначены скалярные произведения в пространствах $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$ функций, интегрируемых с квадратом в Ω и на Γ соответственно, а также расширения по непрерывности этих скалярных произведений.

Введем пространства

$$N := \{u \in C^\infty(\overline{\Omega}) \colon Au = 0 \text{ в } \Omega,\ B_j u = 0 \text{ на } \Gamma,\ j = 1, \ldots, q\},$$

$$N^+ := \{v \in C^\infty(\overline{\Omega})\colon A^+v = 0 \text{ в } \Omega,\ B_j^+ v = 0 \text{ на } \Gamma,\ j = 1, \ldots, q\}.$$

Поскольку задачи (1) и (2) эллиптические, то N и N^+ конечномерные [1, с. 189].

Предположим в этом пункте для простоты, что $N = N^+ = \{0\}$. Тогда отображение $u \mapsto (Au, Bu)$, где $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, продолжается по непрерывности до гомеоморфизма

$$(A, B)\colon H^{s+2q}(\Omega) \leftrightarrow H^s(\Omega) \bigoplus \mathcal{H}_s(\Gamma) \tag{3}$$

при любом вещественном $s \geqslant 0$. Здесь и далее $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$, $H^\sigma(\Omega)$ и $H^\sigma(\Gamma)$ — гильбертовы пространства Соболева порядка $\sigma \in \mathbb{R}$, состоящие из распределений, заданных в $\mathbb{R}^n$, в Ω и на Γ соответственно (см., напр., [1, гл. 1]), $\mathcal{H}_s(\Gamma) := \bigoplus\limits_{j=1}^{q} H^{s+2q-m_j-1/2}(\Gamma)$. Это — классическая теорема о разрешимости регулярной эллиптической краевой задачи в шкале гильбертовых пространств Соболева [1, с. 191]. Эта теорема носит *общий* характер, так как пространства, на которых действует оператор (3), являются общими для всех эллиптических краевых задач одного порядка и не зависят от коэффициентов выражения A.

При $s < 0$ данная теорема, вообще говоря, не верна, поскольку отображение $u \mapsto B_j u$, где $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, нельзя продолжить до непрерывного оператора $B_j\colon H^{s+2q}(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Gamma)$, если $s + 2q \leqslant m_j + 1/2$. Здесь и далее $\mathcal{D}'(\Omega)$ и $\mathcal{D}'(\Gamma)$ — линейные топологические пространства всех распределений, заданных в области Ω и на многообразии Γ соответственно. Поэтому вместо $H^{s+2q}(\Omega)$ приходится брать в качестве области определения оператора (A, B) более узкое пространство

$$D^{s+2q}_{A,X}(\Omega) := \{u \in H^{s+2q}(\Omega)\colon Au \in X^s(\Omega)\},$$

где $X^s(\Omega)$ — некоторое гильбертово пространство, непрерывно вложенное в $H^s(\Omega)$. При этом в пространстве $D^{s+2q}_{A,X}(\Omega)$ вводится гильбертова норма графика.

В работах Ж.-Л. Лионса и Э. Мадженеса доказаны теоремы о том, что оператор (A, B) продолжается по непрерывности до гомеоморфизма

$$(A, B)\colon D^{s+2q}_{A,X}(\Omega) \leftrightarrow X^s(\Omega) \bigoplus \mathcal{H}_s(\Gamma) \tag{4}$$

при любом $s < 0$, если $X^s(\Omega) \equiv L_2(\Omega)$ [2, 3], либо $X^s(\Omega) \equiv \Xi^s(\Omega)$ — некоторое весовое подпространство в $H^s(\Omega)$ [1, с. 216, 217]. Эти результаты явились первыми примерами *индивидуальных* теорем о разрешимости эллиптических краевых задач. Их "индивидуальный" характер состоит в том, что область определения оператора (4) существенно зависит от коэффициентов эллиптического выражения A.

В статье [4] найдено условие на пространство $X^s(\Omega)$, при котором справедлив гомеоморфизм (4) для каждого $s < 0$. Оно состоит в следующем: множество $X^\infty(\Omega) := = X^s(\Omega) \bigcap C^\infty(\overline{\Omega})$ плотно в $X^s(\Omega)$, и существует число $c > 0$ такое, что

$$\|\mathcal{O}f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|f\|_{X^s(\Omega)} \qquad \text{для любого} \qquad f \in X^\infty(\Omega). \tag{5}$$

Здесь и далее $\mathcal{O}f(x) := f(x)$ при $x \in \overline{\Omega}$ и $\mathcal{O}f(x) := 0$ при $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Пространства $X^s(\Omega) \equiv L_2(\Omega)$ и $X^s(\Omega) \equiv \Xi^s(\Omega)$, использованные Лионсом и Мадженесом, удовлетворяют этому условию. В работе [4] найдены более широкие классы пространств $X^s(\Omega)$, удовлетворяющих неравенству (5). Тем самым там установлены новые индивидуальные теоремы о разрешимости краевой задачи (1) в классах пространств распределений, связанных с гильбертовой соболевской шкалой.

Отметим, что в общей ситуации произвольных конечномерных пространств N и N^+ операторы (3) и (4) являются ограниченными и нетеровыми (т. е. имеют конечный индекс).

В настоящей работе установлены индивидуальные теоремы о разрешимости краевой задачи (1) в пространствах распределений, связанных с гильбертовыми пространствами Хермандера [5, с. 54]. Последние в отличие от соболевских пространств параметризуются не числовым, а функциональным параметром. Это позволяет более тонко описать свойства регулярности распределений с помощью преобразования Фурье. Как следствие, нами получены обобщения указанных выше индивидуальных теорем на более широкие классы гильбертовых функциональных пространств.

Отметим, что альтернативный способ построения области определения оператора (A, B) предложен Я. А. Ройтбергом (см. [6] и приведенные там ссылки). Он приводит к общей теореме о разрешимости краевой задачи (1).

Различные общие теоремы о разрешимости эллиптических краевых задач в шкалах пространств Хермандера установлены ранее авторами в [7–11].

2. Пространства Хермандера. Введем необходимые нам гильбертовы шкалы пространств Хермандера. Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех измеримых по Борелю функций $\varphi\colon [1, +\infty) \to (0, +\infty)$ таких, что функции φ, $1/\varphi$ ограничены на каждом отрезке $[1, b]$, где $1 < b < +\infty$, и функция φ медленно меняется по Карамата на ∞. Последнее условие означает, что $\varphi(\lambda t)/\varphi(t) \to 1$ при $t \to +\infty$ для любого числа $\lambda > 0$ [12, с. 10].

Примером функции из класса $\mathcal{M}$ служит любая эталонная функция вида

$$\varphi(t) = (\log t)^{r_1} (\log\log t)^{r_2} \cdots (\log \cdots \log t)^{r_k} \qquad \text{при} \qquad t \gg 1,$$

где $k \in \mathbb{N}$ и $r_1, r_2, \ldots, r_k \in \mathbb{R}$.

Пусть $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$ и $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ пространство всех распределений w медленного роста, заданных в $\mathbb{R}^n$, таких, что преобразование Фурье $\widehat{w}$ распределения w является локально суммируемой по Лебегу в $\mathbb{R}^n$ функцией, удовлетворяющей условию

$$\int \langle\xi\rangle^{2s} \varphi^2(\langle\xi\rangle) |\widehat{w}(\xi)|^2 \, d\xi < \infty.$$

Здесь интеграл берется по $\mathbb{R}^n$, а $\langle\xi\rangle := (1 + \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2)^{1/2}$. В пространстве $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ определено скалярное произведение по формуле

$$(w_1, w_2)_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)} := \int \langle\xi\rangle^{2s} \varphi^2(\langle\xi\rangle) \widehat{w_1}(\xi) \overline{\widehat{w_2}(\xi)} \, d\xi.$$

Оно естественным образом порождает норму.

Пространство $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ — это частный изотропный гильбертов случай пространств обобщенной гладкости, введенных и изученных Л. Хермандером [5, п. 2.2], а также независимо и несколько позже Л. Р. Волевичем и Б. П. Панеяхом [13, § 2]. В частном случае $\varphi \equiv 1$ получаем пространство Соболева $H^{s,1}(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n)$. В общем случае справедливы непрерывные вложения $H^{s+\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$ для любого $\varepsilon > 0$. Они означают, что в классе гильбертовых сепарабельных пространств $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$, где $s \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in \mathcal{M}$, функциональный параметр φ уточняет основную (степенную) s-гладкость. Этот класс мы называем *уточненной* шкалой (по отношению к соболевской шкале). Ее аналоги для евклидовой области Ω и многообразия Γ определяются стандартным образом.

Пространство $H^{s,\varphi}(\Omega)$ состоит из сужений в Ω всех распределений $w \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$. Оно наделяется гильбертовой нормой

$$\|u\|_{H^{s,\varphi}(\Omega)} := \inf\{\|w\|_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)} \colon w \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n), w = u \text{ в } \Omega\}.$$

Гильбертово пространство $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ состоит из всех распределений на многообразии Γ, которые в локальных координатах принадлежат пространству $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$. А именно, возьмем какой-либо конечный атлас из C^∞-структуры на Γ, образованный локальными картами $\alpha_j \colon \mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrow U_j$, где $j = 1, \dots, k$. Здесь открытые множества U_j составляют конечное покрытие многообразия Γ. Пусть функции $\chi_j \in C^\infty(\Gamma)$, где $j = 1, \dots, k$, образуют разбиение единицы на Γ, удовлетворяющее условию $\operatorname{supp} \chi_j \subset U_j$. Положим

$$H^{s,\varphi}(\Gamma) := \{g \in \mathcal{D}'(\Gamma) \colon (\chi_j g) \circ \alpha_j \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^{n-1}),\ j = 1, \dots, k\},$$

$$(g_1, g_2)_{H^{s,\varphi}(\Gamma)} := \sum_{j=1}^{k} ((\chi_j g_1) \circ \alpha_j, (\chi_j g_2) \circ \alpha_j)_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Здесь $(\chi_j g) \circ \alpha_j$ — представление распределения $\chi_j g$ в карте α_j. Пространство $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ с точностью до эквивалентности норм не зависит от выбора атласа и разбиения единицы.

Отметим, что среди пространств Хермандера уточненные шкалы выделяются тем, что они привязаны к гильбертовой соболевской шкале числовым параметром s и обладают интерполяционным свойством относительно нее. А именно, каждое пространство уточненной шкалы получается интерполяцией с подходящим функциональным параметром пары гильбертовых пространств Соболева [7, п. 3]. Это обстоятельство делает удобным и содержательным использование уточненных шкал в теории эллиптических краевых задач.

Приведем общую теорему о разрешимости задачи (1) в уточненной позитивной полушкале пространств [7, с. 369]. Обозначим $\mathcal{H}_{s,\varphi}(\Gamma) := \bigoplus_{j=1}^{q} H^{s+2q-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma)$.

Предложение 1. *Для произвольных $s > -1/2$ и $\varphi \in \mathcal{M}$ отображение $u \to (Au, Bu)$, где $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, продолжается по непрерывности до ограниченного нетерового оператора*

$$(A, B) \colon H^{s+2q,\varphi}(\Omega) \to H^{s,\varphi}(\Omega) \bigoplus \mathcal{H}_{s,\varphi}(\Gamma). \tag{6}$$

Ядро этого оператора совпадает с N, а область значений состоит из всех векторов $(f, g_1, \dots, g_q) \in H^{s,\varphi}(\Omega) \bigoplus \mathcal{H}_{s,\varphi}(\Gamma)$, удовлетворяющих условию

$$(f, v)_\Omega + \sum_{j=1}^{q} (g_j, C_j^+ v)_\Gamma = 0 \qquad \text{для любого} \qquad v \in N^+. \tag{7}$$

Индекс оператора (6) *равен* $\dim N - \dim N^+$ *и не зависит от s, φ.*

3. Ключевая индивидуальная теорема. Пусть заданы произвольно параметры $s < 0$, $\varphi \in \mathcal{M}$ и гильбертово пространство $X^{s,\varphi}(\Omega)$, непрерывно вложенное в $\mathcal{D}'(\Omega)$. Рассмотрим для $X^{s,\varphi}(\Omega)$ следующее условие (ср. с (5)).

Условие $\mathbf{I}_{s,\varphi}$. Множество $X^\infty(\Omega) := X^{s,\varphi}(\Omega) \bigcap C^\infty(\overline{\Omega})$ плотно в $X^{s,\varphi}(\Omega)$ и существует число $c > 0$ такое, что

$$\|\mathcal{O} f\|_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c \|f\|_{X^{s,\varphi}(\Omega)} \qquad \text{для любого} \qquad f \in X^\infty(\Omega).$$

Это условие корректно, поскольку $\mathcal{O}f \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ при $s < 0$ для $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Заметим, что чем меньше s, тем слабее условие $\mathrm{I}_{s,\varphi}$ при неизменном пространстве $X^{s,\varphi}(\Omega)$.

Положим

$$D^{s+2q,\varphi}_{A,X}(\Omega) := \{u \in H^{s+2q,\varphi}(\Omega)\colon Au \in X^{s,\varphi}(\Omega)\}.$$

Как обычно, образ Au понимается в смысле теории распределений в области Ω. Пространство $D^{s+2q,\varphi}_{A,X}(\Omega)$ гильбертово относительно скалярного произведения графика

$$(u_1, u_2)_{D^{s+2q,\varphi}_{A,X}(\Omega)} := (u_1, u_2)_{H^{s+2q,\varphi}(\Omega)} + (Au_1, Au_2)_{X^{s,\varphi}(\Omega)}.$$

Оно естественным образом порождает норму в $D^{s+2q,\varphi}_{A,X}(\Omega)$.

Теорема 1 (ключевая). *Пусть $\varphi \in \mathcal{M}$, число $s < 0$ такое, что*

$$s + 2q \neq \frac{1}{2} - k \qquad \text{для любого} \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

а $X^{s,\varphi}(\Omega)$ — произвольное гильбертово пространство, непрерывно вложенное в $\mathcal{D}'(\Omega)$ и удовлетворяющее условию $\mathrm{I}_{s,\varphi}$. Тогда справедливы следующие утверждения.

(i) Множество $D^{\infty}_{A,X}(\Omega) := \{u \in C^\infty(\overline{\Omega})\colon Au \in X^{s,\varphi}(\Omega)\}$ плотно в $D^{s+2q,\varphi}_{A,X}(\Omega)$.

(ii) Отображение $u \to (Au, Bu)$, где $u \in D^{\infty}_{A,X}(\Omega)$, продолжается по непрерывности до ограниченного оператора

$$(A, B)\colon D^{s+2q,\varphi}_{A,X}(\Omega) \to X^{s,\varphi}(\Omega) \bigoplus \mathcal{H}_{s,\varphi}(\Gamma). \tag{9}$$

(iii) Оператор (9) нетеров. Его ядро совпадает с N, а область значений состоит из всех векторов $(f, g_1, \ldots, g_q) \in X^{s,\varphi}(\Omega) \bigoplus \mathcal{H}_{s,\varphi}(\Gamma)$, удовлетворяющих условию (7).

(iv) Если множество $\mathcal{O}(X^\infty(\Omega))$ плотно в подпространстве $\{w \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)\colon \operatorname{supp} w \subseteq \subseteq \overline{\Omega}\}$, то индекс оператора (9) равен $\dim N - \dim N^+$.

4. Приложения. Отметим важные приложения теоремы 1, обусловленные конкретным выбором пространства $X^{s,\varphi}(\Omega)$. Пусть $s < 0$ и $\varphi \in \mathcal{M}$.

Пространство $X^{s,\varphi}(\Omega) := \{0\}$ удовлетворяет условию $\mathrm{I}_{s,\varphi}$. В этом случае теорема 1 описывает свойства полуоднородной краевой задачи (1), где $f = 0$, и справедлива при любом $s \in \mathbb{R}$, что установлено нами в [8, с. 1538].

Пространство $X^{s,\varphi}(\Omega) := L_2(\Omega)$ также удовлетворяет условию $\mathrm{I}_{s,\varphi}$. Этот выбор пространства $X^{s,\varphi}(\Omega)$ важен в спектральной теории эллиптических операторов.

В качестве $X^{s,\varphi}(\Omega)$ допустим выбор некоторых пространств Хермандера. Ввиду предложения 1 здесь содержательным является случай $s \leqslant -1/2$. Всякое пространство Хермандера $X^{s,\varphi}(\Omega) := H^{\lambda,\eta}(\Omega)$, где $\lambda > -1/2$ и $\eta \in \mathcal{M}$, удовлетворяет условию $\mathrm{I}_{s,\varphi}$ при $s \leqslant -1/2$. Следовательно, в силу теоремы 1 имеем следующую индивидуальную теорему о разрешимости краевой задачи (1).

Теорема 2. *Пусть число $s \leqslant -1/2$ удовлетворяет условию (8), $\lambda > -1/2$ и φ, $\eta \in \mathcal{M}$. Тогда отображение $u \mapsto (Au, Bu)$, где $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, продолжается по непрерывности до ограниченного нетерового оператора*

$$(A, B)\colon \{u \in H^{s+2q,\varphi}(\Omega)\colon Au \in H^{\lambda,\eta}(\Omega)\} \to H^{\lambda,\eta}(\Omega) \bigoplus \mathcal{H}_{s,\varphi}(\Gamma),$$

область определения которого является гильбертовым пространством относительно нормы графика

$$(\|u\|^2_{H^{s+2q,\varphi}(\Omega)} + \|Au\|^2_{H^{\lambda,\eta}(\Omega)})^{1/2}.$$

Индекс этого оператора равен $\dim N - \dim N^+$ *и не зависит от параметров* s, φ *и* λ, η.

Отметим, что в теореме 2 решение и правая часть эллиптического уравнения $Au = f$ могут иметь различные дополнительные гладкости φ и η.

В теореме 2 пространство $X^{s,\varphi}(\Omega) := H^{\lambda,\eta}(\Omega)$ лежит в $H^{-1/2}(\Omega)$, поскольку $\lambda > -1/2$. Пространство $X^{\sigma,\varphi}(\Omega)$, содержащее широкий класс распределений $f \notin H^{-1/2}(\Omega)$ и удовлетворяющее условию $\mathrm{I}_{s,\varphi}$, можно получить, используя некоторые весовые пространства Хермандера.

Пусть $s < -1/2$, $\varphi \in \mathcal{M}$, а функция $\varrho \in C^\infty(\Omega)$ положительная. Определим пространство со скалярным произведением

$$\varrho H^{s,\varphi}(\Omega) := \{f = \varrho v \colon v \in H^{s,\varphi}(\Omega)\}, \qquad (f_1, f_2)_{\varrho H^{s,\varphi}(\Omega)} := (\varrho^{-1} f_1, \varrho^{-1} f_2)_{H^{s,\varphi}(\Omega)}.$$

Оно полно (гильбертово) и непрерывно вложено в $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Если функция ϱ является мультипликатором в пространстве $H^{-s,1/\varphi}(\Omega)$ и удовлетворяет условию

$$D^j_\nu \varrho = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma \quad \text{для всех} \quad j \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leqslant j < -s - \frac{1}{2}, \tag{10}$$

то пространство $X^{s,\varphi}(\Omega) := \varrho H^{s,\varphi}(\Omega)$ удовлетворяет условию $\mathrm{I}_{s,\varphi}$. Здесь D_ν — оператор дифференцирования вдоль внутренней нормали к границе Γ. Поэтому в силу теоремы 1 справедлива следующая индивидуальная теорема о разрешимости краевой задачи (1) в весовых пространствах.

Теорема 3. *Пусть число* $s < -1/2$ *удовлетворяет неравенству* (8), $\varphi \in \mathcal{M}$, *а функция* $\varrho \in C^\infty(\Omega)$ *положительна, является мультипликатором в пространстве* $H^{-s,1/\varphi}(\Omega)$ *и удовлетворяет условию* (10). *Тогда отображение* $u \mapsto (Au, Bu)$, *где* $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $Au \in \varrho H^{s,\varphi}(\Omega)$, *продолжается по непрерывности до ограниченного нетерового оператора*

$$(A, B) \colon \{u \in H^{s+2q,\varphi}(\Omega) \colon Au \in \varrho H^{s,\varphi}(\Omega)\} \to \varrho H^{s,\varphi}(\Omega) \bigoplus \mathcal{H}_{s,\varphi}(\Gamma),$$

область определения которого является гильбертовым пространством относительно нормы графика

$$(\|u\|^2_{H^{s+2q,\varphi}(\Omega)} + \|\varrho^{-1} Au\|^2_{H^{s,\varphi}(\Omega)})^{1/2}.$$

Индекс этого оператора равен $\dim N - \dim N^+$ *и не зависит от* s, φ *и* ϱ.

Важный пример функции ϱ, удовлетворяющей условию теоремы 3, получим, положив $\varrho := \varrho_1^\delta$ для произвольного фиксированного числа $\delta > -s - 1/2$. Здесь функция $\varrho_1 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ положительна в Ω и равна расстоянию до границы Γ в некоторой ее окрестности.

1. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – Москва: Мир, 1971. – 372 с.
2. *Lions J.-L., Magenes E.* Problémes aux limites non homogénes, V // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3). – 1962. – **16**. – P. 1–44.

3. *Lions J.-L., Magenes E.* Problémes aux limites non homogénes, VI // J. Anal. Math. – 1963. – **11**. – P. 165–188.
4. *Murach A. A.* Extension of some Lions-Magenes theorems // Meth. Funct. Anal. Topology. – 2009. – **15**, No 2. – P. 152–167.
5. *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – Москва: Мир, 1965. – 380 с.
6. *Roitberg Ya. A.* Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions. – Dordrecht: Kluwer, 1996. – 415 p.
7. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. II // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, No 3. – С. 352–370.
8. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Регулярная эллиптическая граничная задача для однородного уравнения в двусторонней уточненной шкале пространств // Там же. – 2006. – **58**, No 11. – С. 1536–1555.
9. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Эллиптический оператор с однородными регулярными граничными условиями в двусторонней уточненной шкале пространств // Укр. мат. вiсник. – 2006. – **3**, No 4. – С. 547–580.
10. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. III // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, No 5. – С. 679–701.
11. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Эллиптическая краевая задача в двусторонней уточненной шкале пространств // Там же. – 2008. – **60**, No 4. – С. 497–520.
12. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – Москва: Наука, 1985. – 142 с.
13. *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, No 1. – С. 3–74.

Институт математики НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 02.07.2010

V. A. Mikhailets, A. A. Murach

Individual theorems on a solvability of elliptic problems and Hörmander spaces

A solvability of general elliptic boundary-value problem is investigated in Hilbert scales of spaces that consist of nonregular distributions. We find a sufficient condition for the space of right-hand sides of the elliptic equation, under which an operator of the problem is bounded and Fredholm on the corresponding couples of function spaces. Extensive classes of Hörmander spaces satisfying this condition are found.