ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

3 • 2011

*ТЕПЛОФІЗИКА*

УДК 536.12:539.377



**А. П. Слесаренко, А. А. Марченко**

# Спектральные функции влияния граничных воздействий в моделировании и идентификации тепловых процессов в трехмерных системах

*(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. Г. Стояном)*

*На базі спільного застосування спектральних функцій впливу граничних взаємодій, кінцевих інтегральних перетворень і варіаційно-структурного методу з введенням невідомих спектральних складових для теплових потоків на частинах поверхні тіла складного поперечного перерізу пропонуються наближені аналітичні підходи до розв'язання тривимірних прямих і обернених задач теплопровідності. У даних задачах коефіцієнт темлообміну і температура зовнішнього середовища є відомими і невідомими функціями від координат для прямих і обернених задач теплопровідності, відповідно.*

Решение трехмерных задач теплопроводности даже для тел классической формы с граничными условиями третьего рода, в которых коэффициенты теплообмена и температура окружающей среды являются функциями от координат, встречает ряд дополнительных серьезных трудностей на пути получения приближенных аналитических решений. Еще более серьезные трудности возникают при определении коэффициентов теплообмена и температуры окружающей среды, по данным теплофизического или вычислительного эксперимента, как функций от координат. Поэтому данные проблемы относятся к ряду актуальных [1].

Ниже на базе совместного применения спектральных функций влияния граничных воздействий, конечных интегральных преобразований и вариационно-структурного метода предлагаются новые подходы к получению приближенных аналитических решений как прямых, так и обратных трехмерных задач теплопроводности, в которых в граничных условиях третьего рода коэффициенты теплообмена и температура внешней среды задаются как известные функции от координат и в обратных задачах теплопроводности, как неизвестные функции от координат.

**1. Моделирование тепловых процессов в трехмерных системах.** В качестве трехмерной системы рассмотрим изотропное тело, ограниченное плоскостями $z = 0$, $z = d$ и цилиндрической поверхностью сложной формы $S$, образующие которой перпендикулярны к плоскостям. Рассмотрим вариант, когда в областях $H_e$ равномерно распределены источники тепла мощностью $P_m$ и определение температурного поля сводится к решению пространственной задачи теплопроводности

$$\Delta T = -F, \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial z} + h_1 T\right)\bigg|_{z=d} = f_1; \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial z} - h_0 T\right)\bigg|_{z=0} = f_0, \tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \nu} + h_S T\right)\bigg|_{S} = f_S, \tag{3}$$

где $T = T(x, y, z)$, $h_1 = \alpha_1(x, y)\lambda^{-1}$; $h_0 = \alpha_0(x, y)\lambda^{-1}$; $h_S = \alpha_S(x, y)\lambda^{-1}$; $f_1 = h_1 T_{C_1}(x, y)$; $f_0 = h_0 T_{C_0}(x, y)$; $f_S = h_S T_{C_S}(x, y)$; $\nu$ — направление внешней нормали к поверхности $S$;

$$F = \begin{cases} P_m(\lambda l_{1m} l_{2m} d)^{-1}, & (x, y, z) \in H_m, \\ 0, \quad (x, y, z) \in H_m, & m = 1, 2, \ldots, m. \end{cases} \tag{4}$$

На поверхностях $z = 0$ и $z = d$ введем неизвестные тепловые потоки и задачу (1)–(3) сведем к решению задачи

$$\Delta T = -F, \tag{5}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \sum_{km} a_{km}^{(0)} P_k(x) P_m(y) = g_0(x, y), \tag{6}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z=d} = \sum_{km} a_{km}^{(1)} P_k(x) P_m(y) = g_1(x, y), \tag{7}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \nu} + h_S T\right)\bigg|_{S} = f_S, \tag{8}$$

где $a_{km}^{(0)}$ и $a_{km}^{(1)}$ — неопределенные коэффициенты.

Применим к уравнению (5) и граничному условию (8) конечное интегральное преобразование [2]

$$\overline{T}(x, y, \gamma) = \int_0^d T(x, y, z) K(x, \gamma)\, dz \tag{9}$$

с ядром преобразования $K(x, \gamma) = \cos(n\pi z/d)$, где $\gamma = n\pi d^{-1}$.

В области изображений для задачи (5)–(8) получим

$$\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial y^2} - \gamma^2 T = -\overline{F} + F^* = -F_1, \tag{10}$$

$$\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial \gamma} + h_S \overline{T}\right)\bigg|_{S} = \overline{f}_S. \tag{11}$$

Здесь $\overline{F} = \int_0^d F K(z, \gamma)\, z$; $\overline{f}_S = \int_0^d f_S K(z, \gamma)\, dz$; $\overline{F}^* = g_0(x, y) K(0, \gamma) - g_1(x, y) K(d, \gamma)$.

Задаче (10), (11) соответствует вариационная задача о минимуме функционала [3]

$$I = \iint\limits_{\Omega} [(\nabla\overline{T})^2 + \gamma^2 T^2 + 2(\overline{F} - \overline{F}^*)\overline{T}]\, d\Omega + \int\limits_{S} [h\overline{T}^2 - 2\overline{f}_S\overline{T}]\, dS, \tag{12}$$

где $\Omega$ — площадь поперечного сечения тела.

Если в задаче (10), (11) $n_1$ — число спектральных составляющих тепловых потоков на нижнем основании тела ($z = 0$) и $n_2$ — число спектральных составляющих тепловых потоков на верхнем основании тела ($z = d$), то необходимо решить $n_1 + n_2 + 1$ вариационных задач (12). В первой задаче $g_0 = g_1 = 0$, $F \neq 0$, в остальных $n_1 + n_2$ задачах $F = 0$ и задано по одной спектральной составляющей для тепловых потоков последовательно на нижнем и верхнем основаниях тела.

Применяя метод Ритца, общее решение $n_1 + n_2 + 1$ вариационных задач (12) получим в виде

$$\overline{T}_n = \overline{T}_F(x, y, \gamma_n) + \sum_{km} a_{km}^{(0)} \overline{T}_{km}^{(0)}(x, y, \gamma_n) + \sum_{km} a_{km}^{(1)} \overline{T}_{km}^{(1)}(x, y, \gamma_n) \tag{13}$$

для каждого значения $\gamma = n\pi d^{-1}$, где, с учетом результатов работ [1, 4–6],

$$\overline{T}_{km}^{(0)}(x, y, \gamma_n) = \Phi_{0km}^{(0)}(x, y, \gamma_n) + \sum_{ij} C_{ij}^{(km0)}(\gamma_n)\mathrm{X}_{ij}(x, y);$$

$$\overline{T}_{km}^{(1)}(x, y, \gamma_n) = \Phi_{0km}^{(1)}(x, y, \gamma_n) + \sum_{ij} C_{ij}^{(km1)}(\gamma_n)\mathrm{X}_{ij}(x, y);$$

$$\mathrm{X}_{ij}(x, y) = \varphi_{ij}(x, y) - \omega_S(x, y) D_1^{(S)} \varphi_{ij}(x, y) - \omega_S(x, y) h_S \varphi_{ij}(x, y);$$

$$\Phi_{0km}^{(0)} = \Phi_{0km}^{(1)} = \omega_S(x, y) f_S, \qquad \varphi_{ij}(x, y) = P_i(x) P_j(y);$$

$$\overline{T}_F(x, y, \gamma_n) = \Phi_{0F} + \sum_{ij} C_{ij}^{(F)}(\gamma_n)\mathrm{X}_{ij}(x, y);$$

$$D_1^{(S)} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \omega_S(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \omega_S(x, y)}{\partial y}; \qquad D_1^{(S)} T\Big|_S = \frac{\partial T}{\partial \nu}\Big|_S;$$

$$\omega_S(x, y)\Big|_S = 0; \qquad \frac{\partial \omega_S(x, y)}{\partial y}\Big|_S = 1; \qquad \omega_S(x, y) > 0, \qquad (x, y) \in \Omega_C;$$

$\nu$ — направление внешней нормали к поверхности $S$; $\Omega_C$ — область, характеризующая поперечное сечение тела.

Применяя формулу обратного конечного интегрального преобразования [2], для решения задачи (5)–(8) получим

$$T(x, y, z, a_{km}^{(0)}, a_{km}^{(1)}) = \sum_{n=1}^{p} \overline{T}_n(x, y, \gamma_m, a_{km}^{(0)}, a_{km}^{(1)}) C_{\gamma_n} K(\gamma_n, z), \tag{14}$$

где $C_{\gamma_n} = \left[\int\limits_0^d K^2(z, \gamma_n)\, dz\right]$.

Подставляя решение задачи (5)–(8) в форме (14) в граничные условия (2) и применяя интегральный метод наименьших квадратов [3], для определения коэффициентов $a_{km}^0$ и $a_{km}^1$ получим систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial a_{km}^0} \iint\limits_{S_0} \left\{ \sum_{km} a_{km}^{(0)} P_k(x) P_m(y) - h_0(x,y)[T(x,y,0,a_{km}^{(0)},a_{km}^{(1)}) + T_{cp_0}(x,y)] \right\}^2 = 0, \\
&\frac{\partial}{\partial a_{km}^1} \iint\limits_{S_1} \left\{ \sum_{km} a_{km}^{(1)} P_k(x) P_m(y) - h_1(x,y)[T(x,y,1,a_{km}^{(0)},a_{km}^{(1)}) + T_{cp_1}(x,y)] \right\}^2 = 0.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Тогда приближенное аналитическое решение трехмерной задачи теплопроводности (1)–(3) с переменными по координатам граничными условиями (2), (3) получим в виде (14).

**2. Идентификация тепловых процессов в трехмерных задачах.** Решение задачи (1)–(3) в форме (14) с неопределенными коэффициентами $a_{km}^{(0)}$ и $a_{km}^{(1)}$ при спектральных составляющих тепловых потоков на нижнем и верхнем основаниях тела может быть также эффективно использовано при идентификации условий теплообмена на нижнем и верхнем основаниях тела.

Пусть в задаче (1)–(3) имеем дополнительную информацию в качестве данных теплофизического или вычислительного эксперимента на небольшом расстоянии от нижнего и верхнего оснований тела

$$
T_{э0}(x_m^{(o)}, y_m^{(o)}, z_m^{(o)}), T_{э1}(x_m^{(1)}, y_m^{(1)}, z_m^{(1)}), \qquad m = 1, 2, \ldots, m. \tag{16}
$$

Тогда идентификацию условий теплообмена по информации об экспериментальных данных или данных из вычислительного эксперимента о температурном поле в рассматриваемой трехмерной системе можно сделать следующим образом.

На первом этапе идентификации определим коэффициенты $a_{km}^{(0)}$ и $a_{km}^{(1)}$ тепловых потоков на нижнем и верхнем основаниях тела из системы уравнений

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial a_{km}^0} \sum_{m=1}^{m_1} [T(x_m^{(0)}, y_m^{(0)}, z_m^{(0)}, a_{km}^{(0)}, a_{km}^{(1)}) - T_{э0}(x_m^{(0)}, y_m^{(0)}, z_m^{(0)})] = 0, \\
&\frac{\partial}{\partial a_{km}^1} \sum_{m=1}^{m_1} [T(x_m^{(1)}, y_m^{(1)}, z_m^{(1)}, a_{km}^{(0)}, a_{km}^{(1)}) - T_{э1}(x_m^{(1)}, y_m^{(1)}, z_m^{(1)})] = 0
\end{aligned}
\tag{17}
$$

на базе точечного метода наименьших квадратов [3], используя данные вычислительного или теплофизического эксперимента (16).

На втором этапе идентификации условий теплообмена по данным вычислительного или теплофизического эксперимента (16) представим искомые функции $h_0(x,y)$ и $h_1(x,y)$ в виде функциональных рядов по полиномам Чебышева $P_k(x)$, $P_S(y)$ с неопределенными коэффициентами $\mu_{ks}^{(0)}$ и $\mu_{ks}^{(1)}$

$$
h_0(x,y) = \sum_{kS} \mu_{kS}^{(0)} P_k(x) P_v(y), \qquad h_1(x,y) = \sum_{kS} \mu_{kS}^{(1)} P_k(x) P_j(y). \tag{18}
$$

Применяя интегральный метод наименьших квадратов, используя граничные условия (2) и учитывая, что коэффициенты $a_{km}^{(0)}$ и $a_{km}^{(1)}$ определены из системы уравнений (17), для определения коэффициентов $\mu_{ks}^{(0)}$ и $\mu_{ks}^{(1)}$ получим систему уравнений

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial\mu_{kS}^{(0)}}\iint\limits_{S_0}\left\{\sum_{km}a_{km}^{(0)}P_k(x)P_m(y)-\sum_{kS}\mu_{kS}^{(0)}P_k(x)P_S(y)[T(x,y,0,a_{km}^{(0)},a_{km}^{(1)})+\right.\\
\left.+T_{cp_0}(x,y)]\right\}^2=0,\\
\frac{\partial}{\partial\mu_{kS}^{(1)}}\iint\limits_{S_1}\left\{\sum_{km}a_{km}^{(1)}P_k(x)P_m(y)+\sum_{kS}\mu_{kS}^{(1)}P_k(x)P_S(y)[T(x,y,d,a_{km}^{(0)},a_{km}^{(1)})+\right.\\
\left.+T_{cp_1}(x,y)]\right\}^2=0.
\end{gathered}
\tag{19}
$$

Если в граничных условиях (2) неизвестными функциями являются $T_{C_0}(x,y)$ и $T_{C_1}(x,y)$, то аналогично, как и при идентификации функций $h_0(x,y)$ и $h_1(x,y)$, представим функции $T_{C_0}(x,y)$ и $T_{C_1}(x,y)$ в виде функциональных рядов по полиномам Чебышева $P_k(x)$, $P_S(y)$ с неопределенными коэффициентами $\beta_{ks}^{(0)}$ и $\beta_{ks}^{(1)}$

$$
T_{C_0}(x,y)=\sum_{kS}\beta_{rS}^{(0)}P_k(x)P_j(y);\qquad T_{C_1}(x,y)=\sum_{kS}\beta_{rS}^{(1)}P_k(x)P_j(y).
$$

Тогда для определения коэффициентов $\beta_{ks}^{(0)}$ и $\beta_{ks}^{(1)}$, учитывая, что коэффициенты тепловых потоков $a_{km}^{(0)}$ и $a_{km}^{(1)}$ определены из системы уравнений (17), получим систему уравнений

$$
\frac{\partial}{\partial\beta_{kS}^{(0)}}\iint\limits_{S_0}\left\{\sum_{km}a_{km}^{(0)}P_k(x)P_m(y)-h_0(x,y)\left[T(x,y,0,a_{km}^{(0)},a_{km}^{(1)})+\sum_{kS}\beta_{kS}^{(0)}P_k(x)P_v(y)\right]\right\}^2=0,
$$

$$
\frac{\partial}{\partial\beta_{kS}^{(1)}}\iint\limits_{S_0}\left\{\sum_{km}a_{km}^{(0)}P_k(x)P_m(y)-h_1(x,y)\left[T(x,y,d,a_{km}^{(0)},a_{km}^{(1)})+\sum_{kS}\beta_{kS}^{(1)}P_k(x)P_v(y)\right]\right\}^2=0.
$$

Данный подход позволяет достаточно эффективно определять функциональные зависимости от координат как коэффициентов теплообмена на частях поверхности трехмерных систем, так и температуру окружающей среды.

Полученные результаты позволяют также с помощью функций $T_{C_0}(x,y)$, $T_{C_1}(x,y)$ и $h_0(x,y)$, $h_1(x,y)$ формировать тепловые потоки на верхнем и нижнем основаниях тела таким образом, чтобы получать необходимое распределение температуры в подобластях, прилегающих к верхнему и нижнему основаниям тела.

Решение трехмерной задачи теплопроводности (5)–(8) в форме (14) с неопределенными коэффициентами $a_{km}^{(0)}$, $a_{km}^{(1)}$ при спектральных составляющих тепловых потоков на нижнем и верхнем основаниях тела может быть также использовано и при решении обратной задачи по определению спектральных составляющих тепловых потоков таким образом, чтобы можно было формировать любое заданное распределение температуры на нижнем и верхнем основаниях тела, включая и термостабилизацию этих частей поверхности тела.

Важный научно-технический интерес представляют моделирование и идентификация тепловых процессов в трехмерных системах, когда на нижнем и верхнем основаниях тела тепловые потоки заданы не по всей поверхности нижнего и верхнего оснований, а в ряде подобластей областей верхнего и нижнего оснований. Тогда вызывают интерес обратные задачи теплопроводности как об определении оптимального расположения подобластей, занимаемых поверхностными источниками тепловой энергии, так и об их оптимальной величине мощности с учетом заданных ограничений на тепловой режим исследуемой трехмерной системы. Решение трехмерной задачи теплопроводности (5)–(8) в виде (14) с неопределенными коэффициентами $a_{km}^{(0)}$, $a_{km}^{(1)}$ при спектральных составляющих тепловых потоков на верхнем и нижнем основаниях тела может быть также эффективно применено как при определении оптимального расположения подобластей, занимаемых поверхностными источниками энергии на нижнем и верхнем основаниях тела, так и при определении величины мощности этих источников при заданных ограничениях на тепловой режим.


1. *Мацевитый Ю. М.* Обратные задачи теплопроводности. Т. 1. Методология. – Киев: Наук. думка, 2002. – 405 с. Т. 2. Приложения. – Киев: Наук. думка, 2003. – 392 с.
2. *Положий Г. Н.* Уравнения математической физики. – Москва: Высш. шк., 1964. – 559 с.
3. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. – Москва: Наука, 1977. – 455 с.
4. *Рвачев В. Л., Слесаренко А. П.* Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах. – Киев: Наук. думка, 1976. – 287 с.
5. *Слесаренко А. П.* Математическое моделирование тепловых процессов в телах сложной формы при нестационарных граничных условиях // Пробл. машиностроения. – 2002. – **5**, № 4. – С. 72–80.
6. *Мацевитый Ю. М., Слесаренко А. П., Костиков А. О., Курская Н. М.* Численно-аналитическое моделирование и идентификация теплообмена в панелях модулей негерметичных космических аппаратов // Электрон. моделирование – 2006. – **28**, № 6. – С. 3–166.



*Институт проблем машиностроения*
*им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков*



*Поступило в редакцию 13.08.2010*



**A. P. Slesarenko, A. A. Marchenko**


## The spectral functions of influence of boundary effects in the modeling and the identification of thermal processes in three-dimensional systems


*Based on the joint application of spectral functions of influence of boundary effects, finite integral transformations, and the variational-structural method and the introduction of unknown spectral components for the heat flux on the surface of body's parts with complex cross-section, approximate analytical approaches to solving the three-dimensional direct and inverse problems of heat conduction are proposed. The heat transfer coefficient and the ambient temperature are known and unknown functions of the coordinates for the direct and inverse problems of heat conduction, respectively.*