УДК 621.773;52.021;372.40.3

Член-корреспондент НАН Украины **Е. М. Ганапольский,**
Ю. В. Тарасов

Квантовый хаос в круговом баллистическом бильярде с шероховатой границей

Досліджуються ефекти, пов'язані з утворенням квантового хаосу в круговому балістичному більярді з шорсткою межею. З цією метою у восьмиміліметровому радіодіапазоні вивчено спектр коливань об'ємного циліндрового резонатора, в якому створені неоднорідності на бічній поверхні. Неоднорідності в резонаторі розташовані випадково, а форма і розміри їх не допускають перетворення різних типів коливань. Завдяки цьому в неоднорідному резонаторі досягалася порівняно висока добротність. Виконано статистичний аналіз спектра коливань резонатора. Він показав, що розподіл міжчастотних інтервалів належить до розподілу Вігнера, тим самим експериментально встановлено, що в круговому балістичному більярді з шорсткою межею реалізуються умови квантового хаосу.

Проблема квантового хаоса привлекает большое внимание исследователей, поскольку она затрагивает принципиальные вопросы квантовой механики и статистической физики, которые уже на протяжении нескольких десятилетий активно обсуждаются в многочисленных работах (см. [1, 2] и приведенную там литературу). Понятие квантового хаоса объединяет широкий круг задач, связанных с квантово-механическим описанием систем, проявляющих хаотические свойства в классическом пределе. Система, в которой имеет место квантовый хаос, — это, прежде всего, классически неинтегрируемая система, в которой отсутствуют какие-либо интегралы движения, кроме интеграла энергии. Гамильтониан такой системы может быть представлен в виде вещественной симметричной случайной матрицы, принадлежащей одному из трех типов гауссовых ансамблей: ортогональному, унитарному или симплектическому. Ввиду случайного характера элементов этой матрицы, спектр системы является хаотическим, и положение спектральной линии на частотной шкале является случайным. Поэтому частота спектральной линии, в данном случае, не имеет глубокого физического смысла. Универсальная информация о спектре содержится в других его характеристиках, таких как вероятностное распределение межчастотных интервалов, спектральная жесткость и коэффициенты корреляции между спектральными линиями.

В регулярных, интегрируемых в классическом смысле, системах коэффициенты корреляции между спектральными линиями равны нулю, а межчастотные интервалы (s) распределены в соответствии с законом Пуассона, $p(s) = \exp(-s)$, где $p(s)$ — вероятность интервала длиной s. При этом вероятность малых межчастотных интервалов в спектре таких систем достаточно велика.

Если же система является классически неинтегрируемой, квантовый хаос в ней проявляется в том, что спектральные линии оказываются скоррелированными, а распределение межчастотных интервалов в спектре с ростом его хаотической составляющей приближается к распределению Вигнера, $p(s) = (\pi/2)s\exp[-(\pi/4)s^2]$. Уменьшение вероятности малых межчастотных интервалов при этом интерпретируется как расталкивание спектральных линий, возникающее вследствие их корреляции. Для адекватного теоретического описания спектра таких систем обычно используется теория случайных матриц (ТСМ), принципы которой детально изложены в хорошо известных работах [3, 4].

Важным обстоятельством, способствующим прогрессу в экспериментальных исследованиях квантового хаоса, оказалась возможность использовать для этих целей модельные системы в виде специальных микроволновых резонаторов [2, 5]. Электромагнитное поле в таких резонаторах описывается уравнением Гельмгольца, которое для резонаторов определенной формы (квазидвумерных объемных резонаторов) совпадает со скалярным уравнением Шредингера и удовлетворяет граничным условиям Дирихле или Неймана, в зависимости от поляризации колебаний в резонаторе. Если форма резонатора подобна неустойчивому бильярду, например, бильярду Синая [6] или Бунимовича [7], то в нем, благодаря неустойчивости лучевых траекторий, складываются условия, необходимые для реализации квантового хаоса. Изучая особенности частотного спектра такого резонатора, можно сделать заключения о хаотических свойствах неустойчивых квантовых бильярдоподобных систем, соответствующих микроволновому резонатору.

Целью настоящей работы является выяснение возможности реализации квантового хаоса в системе, отличной от системы, подобной бильярду Синая или Бунимовича. Речь идет о круговом баллистическом бильярде, в котором нет областей локальной неустойчивости в виде регулярных вогнутых границ, таких как в бильярде Синая, но на границе бильярда имеются неоднородности в виде случайных шероховатостей. Бильярды с шероховатой границей рассматривались в работах [8, 9] с точки зрения квантовой эргодичности и возможности наблюдения в них динамической локализации.

В качестве модельного объекта нами был использован объемный квазиоптический цилиндрический резонатор, имеющий форму кругового цилиндра со случайными неоднородностями на его боковой поверхности. Квазиоптичность резонатора и относительно малые размеры неоднородностей позволяют отнести такой резонатор к системам баллистического типа. При этом в резонаторе были созданы условия, при которых в нем возбуждалась лишь одна мода колебаний ТЕ типа с минимальным коэффициентом преобразования ее в другие моды. Чувствительность этой моды к шероховатостям боковой стенки резонатора заметно выше чувствительности ТМ колебаний. Кроме того, размеры неоднородностей были выбраны достаточно малыми по сравнению с радиусом резонатора. Уравнение Гельмгольца для электромагнитного поля ТЕ колебаний в резонаторе приводится к стационарному уравнению Шредингера, в котором неоднородности на боковой стенке учитываются с помощью эффективного потенциала [10]

$$(\widehat{H} + \widehat{V})\psi = E\psi, \tag{1}$$

где $\widehat{H}$ — оператор электромагнитного поля в пустом резонаторе; $\widehat{V}$ — эффективный потенциал; ψ — собственная функция, соответствующая резонансной частоте $\omega_r \propto \sqrt{E}$; E — собственное значение полного волнового оператора. В потенциал $\widehat{V}$ входит связанная с шероховатостями стенки случайная функция $\zeta(\varphi)$, которая описывает отклонение боковой границы резонатора от кругового цилиндра. Величина неоднородности $\zeta(\varphi)$ при заданном φ считается относительно малой по модулю $|\zeta(\varphi)/R| \ll 1$, где R — радиус резонатора. Распределение неоднородности подчиняется гауссовой статистике, ее вероятность $p(\zeta) = A\exp(-\zeta^2/2a^2)$, где A — нормирующий множитель; a — длина корреляции.

Поскольку суммарный оператор в (1), описывающий поле в резонаторе, является инвариантным по отношению к операции обращения знака времени, матрица его вещественна

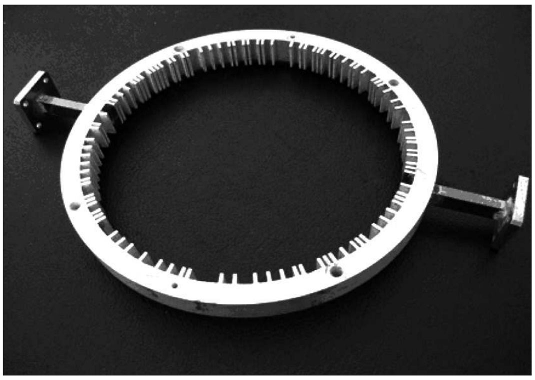

Рис. 1. Модельный цилиндрический резонатор со снятыми торцевыми крышками. Показаны случайные неоднородности на боковой стенке

и симметрична. Поэтому система кругового баллистического бильярда со случайными неоднородностями на боковой границе, как можно предполагать, принадлежит гауссовому ортогональному ансамблю вещественных и симметричных случайных матриц [2]. Следствием этого является возможность использовать для описания спектра бильярда ТСМ. Более того, если такое предположение справедливо, то из этой теории вытекает, что между спектральными линиями резонатора должна существовать заметная корреляция, а распределение межчастотных интервалов в спектре при достаточно большом количестве неоднородностей должно быть близким к распределению Вигнера.

Чтобы верифицировать следствия, вытекающие из ТСМ в отношении баллистического бильярда со случайно-шероховатой границей, нами были проведены экспериментальные исследования на модельном микроволновом резонаторе. Модельная система представляла собой объемный квазиоптический цилиндрический резонатор восьмимиллиметрового диапазона диаметром 130 мм и высотой 14 мм. Общий вид резонатора с внутренними неоднородностями на боковой стенке и подсоединенными к нему антеннами показан на рис. 1. Для достижения высокой добротности резонатор был изготовлен из чистого алюминия, а в качестве рабочей моды использовались колебания H_{nm1}, магнитное поле которых направлено вдоль оси резонатора. Электрические токи такой моды не пересекают зазор между боковой и торцевыми стенками резонатора, благодаря чему не возникает дополнительных потерь на излучение и достигается сравнительно высокая добротность. В нашем случае для основной моды она составляла величину порядка 10^4. Случайные неоднородности в резонаторе, расположенные на боковой поверхности, представляли собой прямоугольные вырезы в боковой металлической стенке, форма которых не нарушала аксиальную симметрию резонатора и, таким образом, не приводила к преобразованию рабочей моды в другие моды с пониженной добротностью. Ширина вырезов составляла 1 мм, глубина — 2,5 мм, а высота — 14 мм. Азимутальное расположение вырезов выбиралось в соответствии с законом случайных чисел. В исходном, "пустом" резонаторе, внутренняя боковая поверхность представляла собой гребенку с периодом в 1° на цилиндрической поверхности резонатора. Для образования неоднородности на этой поверхности определенное число зубьев гребенки удалялось. По количеству удаленных зубьев N и расстоянию между оставшимися можно было определить эффективную величину неоднородностей, а также длину корреляции.

Для возбуждения электромагнитных колебаний в резонаторе применялась волноводная антенна. Аналогичная антенна помещалась на диаметрально противоположной стороне ре-

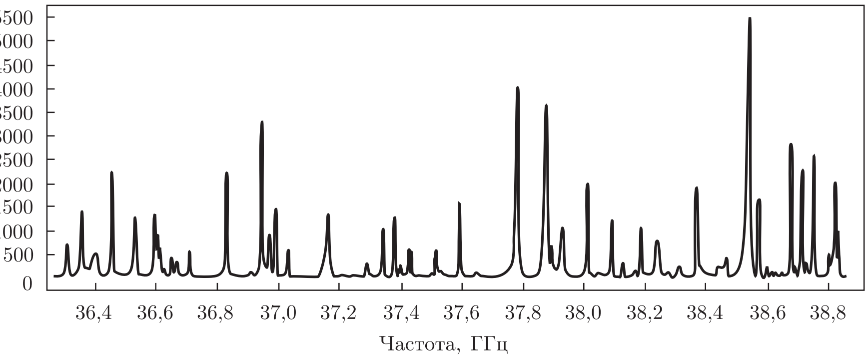

Рис. 2. Фрагмент спектра резонатора

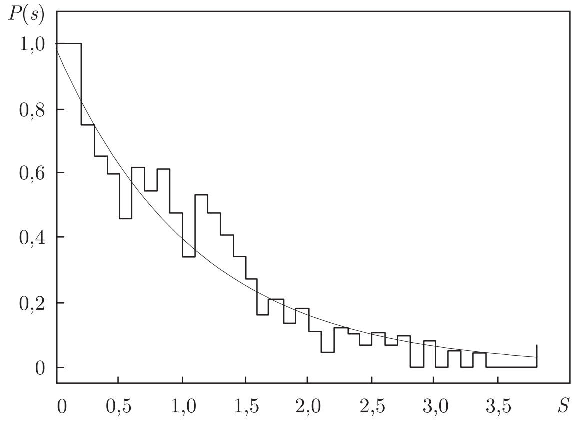

Рис. 3. Распределение межчастотных интервалов в спектре однородного цилиндрического резонатора ($N = 0$). Аппроксимирующая кривая — распределение Пуассона

зонатора и служила приемником колебаний. Антенна представляла собой отверстие диаметром 2 мм в тонкой (толщина 0,15 мм) торцевой металлической стенке волновода, широкая сторона которого была направлена вдоль оси резонатора. При этом в резонаторе возбуждались колебания H-типа. Колебания других типов, в частности, E-колебания, ввиду аксиально-симметричного расположения неоднородностей и геометрии антенны, практически в резонаторе не возбуждались.

Спектральные измерения производились с помощью панорамного измерителя КСВН восьмимиллиметрового диапазона, который позволял в диапазоне частот 26 ГГц-37,5 ГГц в режиме "на проход" определять затухание сигнала в резонаторе и тем самым регистрировать спектральные линии (рис. 2). Число резонансов, наблюдавшееся в указанном диапазоне, составляло приблизительно 10^3 как в резонаторе с идеальной границей, так и в шероховатом резонаторе. При этом количество спектральных линий практически не изменялось при изменении числа удаленных зубьев N.

При статистической обработке спектра определялось распределение межчастотных интервалов в зависимости от числа удаленных зубьев N. Было установлено, что в исходном резонаторе с гребенкой, обладающем идеальной цилиндрической формой ($N = 0$), это распределение близко к пуассоновскому (рис. 3), если не учитывать очень малые интервалы порядка ширины спектральной линии резонатора. При достаточно большой величине неоднородностей $N = 30$ распределение кардинально меняется. Число близких резонансных

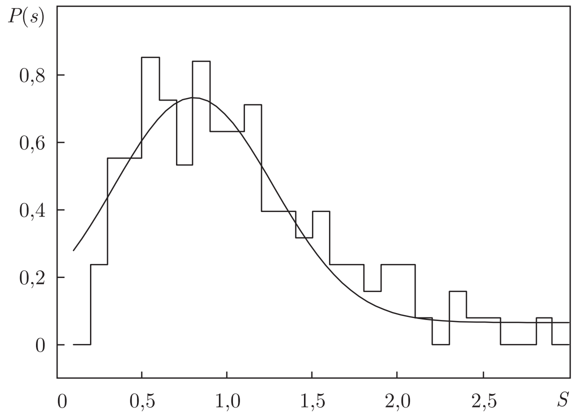

Рис. 4. Распределения межчастотных интервалов в спектре неоднородного резонатора ($N = 30$). Аппроксимирующая кривая близка к распределению Вигнера

линий существенно уменьшается и, соответственно, уменьшается вероятность малых интервалов в спектре. На распределении $p(s)$ появляется четко выраженный широкий максимум при значении относительного интервала $s \simeq 1$ (рис. 4). С увеличением числа неоднородностей максимум уширяется и сдвигается в сторону больших s. Все это свидетельствует о том, что распределение межчастотных интервалов в спектре объемного цилиндрического резонатора и, соответственно, в спектре кругового баллистического бильярда, близко к распределению Вигнера.

Необходимо отметить, что спектр кругового баллистического бильярда с малыми потерями характеризуется тем, что ширина его резонансных линий, малая в отсутствие шероховатостей, с ростом поверхностной неоднородности продолжает оставаться малой и слабо зависит от параметра N. В этом состоит существенное отличие квантового хаоса в баллистической системе от аналогичного явления в системе диффузионной, например, в резонаторе со случайными неоднородностями в его объеме [11].

Таким образом, нами установлено, что в круговом квазиоптическом резонаторе, а, следовательно, и в любом круговом баллистическом квантовом бильярде, случайная шероховатость границ создает условия для возникновения в такой системе квантового хаоса. Этот вывод, следующий из проведенных нами экспериментов, имеет практический интерес в связи с интенсивными разработками микролазеров. Дело в том, что основным элементом микролазера служит дисковый резонатор из легированного кремния, диаметр которого составляет несколько мкм. Благодаря исключительно малым диэлектрическим потерям в этом материале на оптических частотах, такие резонаторы обладают сверхвысокой добротностью, порядка 10^7 и выше [12]. Применение такого резонатора в микролазере дает возможность обеспечит низкий уровень порогового тока и очень узкую ширину линии излучения. По этим параметрам микролазеры существенно превосходят лазеры на обычных резонаторах. Однако в силу неустранимых технологических причин на поверхности дисковых лазерных микрорезонаторов всегда присутствуют случайные шероховатости, которые оказывают существенное влияние на их добротность [10] и, таким образом, понижают высокие характеристики лазерного излучения. В связи с этим изучение квантового хаоса в таких резонаторах, которые являются аналогами лазерных микрорезонаторов, представляет значительный интерес с точки зрения поиска возможностей достижения у них высокой добротности при наличии поверхностных неоднородностей.

1. *Заславский Г. М.* Стохастичность динамических систем. – Москва: Наука, 1984. – 365 с.
2. *Штокман Х.-Ю.* Квантовый хаос: введение. – Москва: Физматлит, 2004. – 373 с.
3. *Mehta M. L.* Random matrices. – Amsterdam: Elsevier, 2004. – 702 p.
4. *Guhr T., Muller-Groeling A., Weidenmuller H. A.* Random-matrix theories in quantum physics: common concepts // Phys. Rep. – 1998. – **299**. – P. 189–425.
5. *Ганапольский Е. М.* Электродинамическая К-система с длительным удержанием энергии СВЧ сигнала // Докл. АН СССР. – 1991. – **319**. – С. 1128–1131.
6. *Синай Я. Г.* Динамические системы с упругими отражениями. Эргодические свойства рассеивающих бильярдов // Усп. мат. наук. – 1970. – **25**, вып. 2. – С. 141–192.
7. *Bunimovich L. A.* On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards // Comm. Math. Phys. – 1970. – **65**. – P. 295–312.
8. *Frahm K. M., Shepelyansky D. L.* Quantum localizatiom in rough billiards // Phys. Rev. Lett. – 1997. – **78**, No 8. – P. 1440–1443.
9. *Sirco L., Bauch Sz., Hlushchuk Y. et al.* Observation of dynamical localization in a rough microwave cavity // Phys. Lett. A. – 2000. – **266**. – P. 331–335.
10. *Ganapolskii E. M., Eremenko Z. E., Tarasov Yu. V.* Effect of random surface inhomogeneities on spectral properties of dielectric-disk microresonators: Theory and modeling at millimeter wave range // Phys. Rev. E. – 2009. – **79**. – P. 041136.
11. *Ganapolskii E. M., Eremenko Z. E., Tarasov Yu. V.* Influenct of random bulk inhomogeneities on quasioptical cavity resonator spectrum // Phys. Rev. E. – 2007. – **75**. – P. 026212.
12. *Srivasan K., Borselli M., Johnson J. et al.* Optical loss and lasing characteristics of high-quality-factor AlGaAs microdisk resonators with embedded quantum dots // Appl. Phys. Lett. – 2005. – **86**. – P. 151106.

Институт радиофизики и электроники НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 28.09.2010

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **E. M. Ganapolskii, Yu. V. Tarasov**

Quantum chaos in a circular ballistic billiard with rough border

Effects related to the quantum chaos formation in a circular ballistic billiard with rough border are studied. In the 8-mm band, the oscillation spectrum of a cavity cylindrical resonator with created inhomogeneities on the lateral surface is studied. The inhomogeneities are located randomly, and their form and sizes exclude the conversions of different types of oscillations. Due to it, the comparatively high quality factor was got in a heterogeneous resonator. The statistical analysis of the resonator spectrum is executed. It is shown that the distribution of interfrequency intervals belongs to the Wigner type. It is established that, in the circular ballistic billiard with rough border, the conditions of quantum chaos are realized.