УДК 517.929

А. В. Шатырко

Абсолютная интервальная устойчивость систем регулирования нейтрального типа

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины С. И. Ляшко)

Розглянуто задачу побудови достатніх умов абсолютної інтервальної стійкості. Побудовано оцінки експоненціального згасання розв'язків систем регулювання з аргументом, що відхиляється, нейтрального типу у вигляді алгебраїчних нерівностей. Апаратом дослідження обрано прямий метод Ляпунова з функціоналом Ляпунова–Красовського.

В работе рассмотрены нелинейные системы дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа. Нелинейность имеет заранее заданный "секторный" вид. Асимптотическая устойчивость в целом нулевого решения такого вида систем называется абсолютной устойчивостью. Исследование абсолютной устойчивости систем регулирования проводится в двух направлениях. Одно из них известно как частотный метод и получило развитие в работах [1, 2]. Вторым является метод функций Ляпунова. Причем функция ищется в виде суммы квадратичной формы и интеграла от нелинейности [3, 4]. Как правило, системам регулирования присущ фактор запаздывания, обусловленный техническими особенностями. Поэтому более адекватными моделями систем являются дифференциальные уравнения с последействием [5, 6]. В последнее время появились работы по интервальной абсолютной устойчивости [7]. Достаточно хороший обзор последних результатов исследования задач абсолютной устойчивости содержится в работах [8, 9]. В настоящей работе рассматриваются системы прямого регулирования, описываемые дифференциальными уравнениями с интервально заданными параметрами с отклоняющимся аргументом нейтрального типа. Исследование абсолютной устойчивости проводится с использованием функционала Ляпунова–Красовского [10].

Абсолютная устойчивость систем прямого регулирования. Будем рассматривать системы нелинейных дифференциально-разностных уравнений с отклоняющимся аргументом нейтрального типа

$$\frac{d}{dt}[x(t) - Dx(t-\tau)] = Ax(t) + Bx(t-\tau) + bf(\sigma(t)), \qquad \sigma(t) = c^T x(t), \qquad t \geqslant 0. \tag{1}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$, A, B, D — квадратные матрицы с постоянными коэффициентами, $b \in \mathbb{R}^n$, $\tau > 0$ — постоянное запаздывание, $f(\sigma)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию Липшица и $f(0) = 0$. Под решением системы будем понимать кусочно-непрерывно дифференцируемую функцию $x(t)$, которая тождественно удовлетворяет системе (1) и начальным условиям $x(t) = \varphi(t)$, $\dot{x}(t) = \psi(t)$, где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — произвольные непрерывные функции, определенные при $-\tau \leqslant t \leqslant 0$.

Определение 1. Будем говорить, что нулевое решение системы нейтрального типа экспоненциально устойчиво в метрике C^0, если существуют постоянные $N_i > 0$, $i = \overline{1,2}$, и $\gamma > 0$ такие, что для любого решения $x(t)$ уравнения при $t > 0$ выполняется неравенство

$$|x(t)| \leqslant [N_1\|x(0)\|_\tau + N_2\|\dot{x}(0)\|_\tau] \exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma t\right\}, \qquad t > 0. \tag{2}$$

Определение 2. Будем говорить, что нулевое решение уравнения нейтрального типа экспоненциально устойчиво в метрике C^1, если оно устойчиво в метрике C^0 и существуют постоянные $R_i > 0$, $i = \overline{1,2}$, и $\eta > 0$ такие, что для любого решения $x(t)$ уравнения при $t > 0$ выполняются неравенства

$$|\overset{\bullet}{x}(t)| \leqslant [R_1\|x(0)\|_\tau + R_2\|\overset{\bullet}{x}(0)\|_\tau]\exp\left\{-\frac{1}{2}\eta t\right\}, \qquad t > 0. \tag{3}$$

Здесь и в дальнейшем используются следующие векторные и матричные нормы

$$\begin{gathered}|A| = \{\lambda_{\max}(A^TA)\}^{1/2}, \quad |x(t)| = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t)\right\}^{1/2}, \quad \|x(t)\|_\tau = \max_{-\tau\leqslant s\leqslant 0}\{|x(s+t)|\},\\ \|x(t)\|_{\tau,\varsigma} = \left\{\int\limits_{t-\tau}^{t} e^{-\varsigma(t-s)}x^2(s)\,ds\right\}^{1/2}, \qquad \|\overset{\bullet}{x}(t)\|_{\tau,\varsigma} = \left\{\int\limits_{t-\tau}^{t} e^{-\varsigma(t-s)}\overset{\bullet}{x}{}^2(s)\,ds\right\}^{1/2},\end{gathered} \tag{4}$$

$\lambda_{\max}(\bullet)$, $\lambda_{\min}(\bullet)$ — наибольшее и наименьшее собственные числа соответствующих симметричных, положительно определенных матриц.

Определение 3. Будем говорить, что система (1) абсолютно устойчива, если ее нулевое решение экспоненциально устойчиво при произвольной функции $f(\sigma)$, удовлетворяющей “условиям сектора”

$$[k\sigma - f(\sigma)]\sigma > 0, \qquad k > 0. \tag{5}$$

Широко используемым методом исследования устойчивости функционально-дифференциальных систем является метод функционалов Ляпунова–Красовского. Как правило, при исследовании систем регулирования нейтрального типа используются функционалы вида суммы квадратичной формы от левой части системы (1), интеграла от нелинейности и квадратичной формы от предыстории [9]

$$\begin{aligned}V[x(t)] &= [x(t) - Dx(t-\tau)]^T H[x(t) - Dx(t-\tau)] + \\ &+ \int\limits_{t-\tau}^{t} x^T(s)Gx(s)\,ds + \beta\int\limits_{0}^{\sigma(t)} f(\sigma)\,d\sigma, \qquad \sigma(t) = c^Tx(t), \qquad \beta > 0.\end{aligned}$$

Однако с использованием функционалов такого вида можно получить только утверждение об асимптотической устойчивости в интегральной метрике.

В настоящей работе будем использовать функционал Ляпунова–Красовского квадратичного вида как от текущих координат, так и от производных

$$\begin{gathered}[x(t)] = x^T(t)Hx(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} e^{-\varsigma(t-s)}\{x^T(s)G_1x(s) + \overset{\bullet}{x}{}^T(s)G_2\overset{\bullet}{x}(s)\}\,ds + \beta\int\limits_{0}^{\sigma(t)} f(\sigma)\,d\sigma,\\ \sigma(t) = c^Tx(t), \qquad \beta > 0,\end{gathered} \tag{6}$$

с положительно определенными матрицами H, G_1, G_2. Как следует из введенных векторных и матричных норм и условия (5), накладываемого на функцию $f(\sigma)$, для функционала (6) справедлива следующая двусторонняя оценка

$$\lambda_{\min}(H)|x(t)|^2 + \int\limits_{t-\tau}^{t} e^{-\varsigma(t-s)}\{x^T(s)G_1x(s) + \overset{\bullet}{x}^T(s)G_2\overset{\bullet}{x}(s)\}\,ds \leqslant V[x(t)] \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\lambda_{\max}(H) + \frac{1}{2}\beta k|c|^2\right\}|x(t)|^2 + \int\limits_{t-\tau}^{t} e^{-\varsigma(t-s)}\{x^T(s)G_1x(s) + \overset{\bullet}{x}^T(s)G_2x(s)\}\,ds. \quad (7)$$

Обозначим

$$S_1[\beta,\varsigma,\nu,H,G_1,G_2] = \begin{bmatrix} S_{11}^1 & S_{12}^1 & S_{13}^1 & S_{14}^1 \\ (S_{12}^1)^T & S_{22}^1 & \Theta & S_{24}^1 \\ (S_{13}^1)^T & \Theta & S_{33}^1 & S_{34}^1 \\ (S_{14}^1)^T & (S_{24}^1)^T & (S_{34}^1)^T & S_{44}^1 \end{bmatrix},$$

$$S_{11}^1 = -A^TH - HA - G_1 - A^TG_2A, \qquad S_{12}^1 = -HB - A^TG_2B,$$

$$S_{13}^1 = -HD - (A+B)^TD, \qquad S_{14}^1 = -Hb - A^TG_2b - \frac{1}{2}(\beta A^T + \nu I)c,$$

$$S_{22}^1 = e^{-\varsigma\tau}G_1 - B^TG_2B, \qquad S_{24}^1 = -B^T\left(G_2b + \frac{1}{2}\beta c\right),$$

$$S_{33}^1 = e^{-\varsigma\tau}G_2 - D^TG_2D, \qquad S_{34}^1 = -D^T\left(G_2b + \frac{1}{2}\beta c\right),$$

$$S_{44}^1 = -b^TG_2b - \beta c^Tb + \frac{k}{\nu},$$

$\nu > 0$ — положительная постоянная, Θ — нулевая матрица, I — единичная матрица,

$$\varphi_{11}(H) = \frac{\lambda_{\max}(H) + \frac{1}{2}\beta k|c|^2}{\lambda_{\min}(H)}, \quad \varphi_{12}(H,G_1) = \frac{\lambda_{\max}(G_1)}{\lambda_{\min}(H)}, \quad \varphi_{13}(H,G_2) = \frac{\lambda_{\max}(G_2)}{\lambda_{\min}(H)}. \quad (8)$$

Приведем утверждение об устойчивости нулевого решения системы (1) и, соответственно, оценки сходимости решений, полученные с использованием функционала Ляпунова–Красовского (6).

Теорема 1. *Пусть $|D| < 1$ и существуют положительно определенные матрицы H, G_1, G_2 и параметры $\beta > 0$, $\varsigma > 0$, $\nu > 0$, при которых матрица $S_1[\beta,\varsigma,\nu,H,G_1,G_2]$ положительно определенная. Тогда нулевое решение системы* (1) *абсолютно устойчиво в метрике C^1. Причем для произвольного решения $x(t)$, $t > 0$, справедлива следующая оценка сходимости*

$$|x(t)| \leqslant \left[\sqrt{\varphi_{11}(H)}|x(0)| + \sqrt{\varphi_{12}(H,G_1)}\|x(0)\|_{\tau,\xi}^2 + \sqrt{\varphi_{13}(H,G_2)}\|\overset{\bullet}{x}(0)\|_{\tau,\varsigma}^2\right]e^{-\gamma t/2},$$

$$|\overset{\bullet}{x}(t)| \leqslant M\sqrt{\varphi_{11}(H)}|x(0)| + \left[M\sqrt{\varphi_{12}(H,G_1)} + \frac{|B|}{|D|}\right]\|x(0)\|_\tau + \quad (9)$$

$$+ (1 + M\sqrt{\varphi_{13}(H,G_2)})\|\overset{\bullet}{x}(0)\|_\tau e^{-\gamma t/2},$$

$$M = [|A| + |D||b|k|c|] + \frac{[|DA + B| + |D||b|k|c|]}{|D|[1 - |D|e^{\gamma\tau/2}]}, \tag{10}$$

$$\gamma < \min\left\{\varsigma, \frac{2}{\tau}\ln\frac{1}{|D|}, \frac{\lambda_{\min}(S_1[\beta,\varsigma,\nu,H,G_1,G_2])}{\lambda_{\max}(H) + \dfrac{1}{2}\beta k|c|^2},\right\}. \tag{11}$$

Абсолютная интервальная устойчивость систем прямого регулирования. Как правило, параметры систем точно не известны. Они принимают свои значения из некоторых заранее определенных промежутков. Рассмотрим систему прямого регулирования, которая описывается системой дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа с интервально заданными коэффициентами

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}[x(t) - Dx(t-\tau)] = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)x(t-\tau) + bf(\sigma(t)), \\ \sigma(t) = c^T x(t), \qquad x(t) \in \mathbb{R}^n, \qquad t \geqslant 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Здесь матрицы ΔA и ΔB могут принимать свои значения из некоторых заданных фиксированных промежутков

$$\Delta A = \{\Delta a_{ij}\}, \qquad \Delta B = \{\Delta b_{ij}\}, \qquad |\Delta a_{ij}| \leqslant \alpha_{ij}, \qquad |b_{ij}| \leqslant \beta_{ij}, \qquad i,j = \overline{1,n}. \tag{13}$$

Системы такого типа называются интервальными системами. Нелинейная функция $f(\sigma)$, как и в предыдущем пункте, удовлетворяет условию (5). Обозначим

$$\|\Delta A\| = \max_{\Delta a_{ij}}\{|\Delta A|\}, \qquad \|\Delta B\| = \max_{\Delta a_{ij}}\{|\Delta B|\}.$$

Определение 4. Будем говорить, что система (1) абсолютно инервально устойчива, если ее нулевое решение экспоненциально устойчиво при произвольной функции $f(\sigma)$, удовлетворяющей "условиям сектора" (5) для произвольных матриц ΔA, B, удовлетворяющих условиям (13).

Получим условия абсолютной интервальной устойчивости системы (1), аналогичные приведенным для системы без интервальных возмущений.

Теорема 2. *Пусть $|D| < 1$ и существуют положительно определенные матрицы H, G_1, G_2 и параметры $\beta > 0$, $\varsigma > 0$, $\nu > 0$, при которых матрица $S_1[\beta,\varsigma,\nu,H,G_1,G_2]$ положительно определенная и выполняются неравенства*

$$\begin{aligned} |\Delta A| \leqslant{}& \frac{1}{R_2}\sqrt{[|H| + |A^T G_2|]^2 + (1-\xi^2)(1-\eta^2)\lambda_{\min}(S_1[\beta,\varsigma,\nu,H,G_1,G_2])R_2} - \\ &- [|H| + |A^T G_2|], \\ |\Delta B| \leqslant{}& \min\left\{\sqrt{\frac{1-\xi^2}{2}}\frac{\lambda_{\min}(S_1[\beta,\varsigma,\nu,H,G_1,G_2])}{|D|}\eta, \right. \\ &\left. \frac{1}{R_1}\left[\sqrt{|G_2 B|^2 + (1-\xi^2)\lambda_{\min}(S_1[\beta,\varsigma,\nu,H,G_1,G_2])R_1} - |G_2 B|\right]\right\}, \end{aligned} \tag{14}$$

$$R_1 = \frac{|H + G_2 B| + 2\xi^2 \left| G_2 b + \dfrac{1}{2}\beta c \right|^2}{\xi^2 \lambda_{\min}(S_1[\beta, \varsigma, \nu, H, G_1, G_2])} + |G_2| \left(1 + \frac{1}{\alpha^2} \right),$$

$$R_2 = \frac{|G_2 B| + 2\xi^2 \left(|D|^2 + \left| G_2 b + \dfrac{1}{2}\beta c \right|^2 \right)}{\xi^2 \lambda_{\min}(S_1[\beta, \varsigma, \nu, H, G_1, G_2])} + |G_2| + \alpha^2.$$

$0 < \xi < 1$, $0 < \eta < 1$, α — произвольные постоянные. Тогда система (1) абсолютно интервально устойчива в метрике C^1. Причем для произвольного решения $x(t)$, $t > 0$, справедлива следующая оценка сходимости:

$$|x(t)| \leqslant \left[\sqrt{\varphi_{11}(H)} |x(0)| + \sqrt{\varphi_{12}(H, G_1)} \|x(0)\|^2_{\tau,\varsigma} + \sqrt{\varphi_{13}(H, G_2)} \|\dot{x}(0)\|^2_{\tau,\varsigma} \right] e^{-\gamma t/2},$$

$$|\dot{x}(t)| \leqslant M \sqrt{\varphi_{11}(H)} |x(0)| + \left[M \sqrt{\varphi_{12}(H, G_1)} + \frac{|B + \Delta B|}{|D|} \right] \|x(0)\|_\tau + \tag{15}$$

$$+ (1 + M \sqrt{\varphi_{13}(H, G_2)}) \|\dot{x}(0)\|_\tau e^{-\gamma t/2},$$

$$M = [|A + \Delta A| + |D||b|k|c|] + \frac{[|D(A + \Delta A) + (B + \Delta B)| + |D||b|k|c|]}{|D|[1 - |D| e^{\gamma\tau/2}]}, \tag{16}$$

$$\gamma < \min \left\{ \gamma, \frac{2}{\tau} \ln \frac{1}{|D|}, \frac{\theta[\bullet]}{\lambda_{\max}(H) + \dfrac{1}{2}\beta k |c|^2} \right\}, \tag{17}$$

$$\theta[\bullet] \leqslant (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \lambda_{\min}(S_1[\beta, \varsigma, \nu, H, G_1, G_2]) - 2[|H| + |A^T G_2|] |\Delta A| -$$

$$- \left[|G_2| + \frac{|G_2 B|^2 + 2\xi^2 \left(|D|^2 + |G_2 b + \dfrac{1}{2}\beta c|^2 \right)}{\xi^2 \lambda_{\min}(S_1[\beta, \varsigma, \nu, H, G_1, G_2])} + \alpha^2 \right] |\Delta A|^2.$$

1. *Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. – Москва: Наука, 1978. – 400 с.
2. *Нелинейные* системы, частотные и матричные неравенства / Под ред. А. Х. Гелига, Г. А. Леонова, А. Л. Фрадкова. – Москва: Физматлит, 2008. – 608 с.
3. *Лурье А. И.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. – Москва; Ленинград: Гостехиздат, 1951. – 251 с.
4. *Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р.* Абсолютная устойчивость регулируемых систем. – Москва: Изд-во АН СССР, 1963. – 261 с.
5. *Кореневский Д. Г.* Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. – Киев: Наук. думка, Институт математики АН УССР, 1989. – 208 с.
6. *Хусаинов Д. Я., Шатырко А. В.* Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. – Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1997. – 236 с.
7. *Кунцевич В. М.* Управление в условиях неопределенности: Гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. – Киев: Наук. думка, 2006. – 264 с.
8. *El-Kebir Boukas, Zi-Kuan Liu.* Deterministic and stochastic time delay systems. – Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser, 2002. – 423 p.
9. *Liao X., Yu P.* Absolute stability of nonlinear control systems. – New York: Springer Science + Business Media B. V., 2008. – 390 p.

10. *Liu Mei-gin.* Stability analysis of neutral-type nonlinear delayed systems: An LMI approach // J. Zhejiang University. Sci. A. – 2006. – No 7. – P. 237–244.

Киевский национальный университет
им. Тараса Шевченко

Поступило в редакцию 31.05.2010

A. V. Shatyrko

Absolute interval stability of neutral-type regulator systems

By using the direct Lyapunov's method with a Lyapunov–Krasovsky functional, the problem of the construction of sufficient conditions for absolute interval stability is considered. Estimates of the exponential decay of solutions of the neutral-type regulator systems with a delay argument are obtained in the form of algebraic inequalities.