# ЛИСТИ З МИНУЛОГО

## Дванадцять листів Василя Єрмакова до Бориса Букреєва

### Лист перший

Милостивый Государь Борис Яковлевич!

*Зачем Вы так далеко заехали? Вам бы следовало сидеть в Университетском городке и штудировать математику. Неужели Вы будете сидеть все над одною темою. Нужно больше разносторонности. Следует по разнообразным частям математики написать несколько статей и поместить их в разных журналах.*

*Вот Вам верный путь для успеха. Достижения сей цели я готов способствовать всеми моими силами. Вы знаете, что за Вас в Киеве только я и Захарченко. О командировках ничего не известно.*

*Стряхните с себя болезнь, поправляйтесь и принимайтесь за дело. Извините, что так поздно отвечаю. Так занят, что и присланные письма читаю в сокр.[ащенном] виде и потому не заметил, что в конце Вы просите прислать №№ Ж.[урнала]. Посылаю. Захарченко[1] тоже удивился Вашему исчезновению из Киева.*

*В.Ермаков*

*1886*
*Февр.16 дня*

### Лист другий

Милостивый Государь Борис Яковлевич!

*Странное дело, что Ваши первые письма мною не получены. Вероятно цензура (тайная) сочла нужным не допустить их по назначению. Из иностранных газет Вы уже более подробно знаете, что у нас в Университетах творится то, что немыслимо в заграничных Университетах. За границею на студентов смотрят, как на юношей, которым нужны развлечения, и потому им разрешили verein'ы[2] и удешевленные билеты в театры. У нас на них смотрят как на опасную силу и потому решили держать в строгой субординации.*

---

[1] Ващенко-Захарченко Михайло Юрійович (1825–1912) — український математик. Народився в селі Маліївка (тепер Полтавська область). Навчався в Київському університеті (1845–1846), в Парижі — в Сорбонні і Колеж де Франс, де слухав лекції О.Л.Коші і Ж.Ліувілля. В 1852 р. склав іспити за весь курс у Київському університеті. Працював тут, з 1868 — професор. Основні роботи присвячені теорії лінійних диференціальних рівнянь, символічним методам, теорії ймовірностей та історії математики. Мав великий вплив на розвиток математичного просвітництва в Україні та Росії.

[2] Verein (нім.) — спілка, товариство. — *Ред.*

*Вы говорите, что Kroneker*[3] *Вам не нравится, но это потому, что он читает обрывки высшей теории. Но не следует пренебрегать теорией чисел, хотя и изучение ее можно отложить на долгое время. Потом еще предстоит Вам знакомство с трудами петербургских ученых. Я враг узкой специальности. Надо понемногу следить за всем и какой-нибудь отдел избрать главным — чтобы состряпать диссертацию.*

*У нас скоро выслуживают Рахманинов и Ромер и потому нужны два новых преподавателя. Я не пользуюсь влиянием и не имею в высших сферах знакомств; хотел ехать в Петербург, но по болезни не могу. Но если Вы желаете, то могу о Вас написать официальное письмо Любимову или министру, чтобы при назначении имели ввиду Вас.*

*Забыл Вам написать, что на вступительной лекции Максимовича было множество студентов и профессоров; никто ничего не понял и потому решили, что Максимович должно быть великий математик. Лекция должна была появиться в печати, но что-то до сих пор нет. Речь на акте будет читать Максимович о системе баллов на экзаменах Политехнической школы в Париже и о поверке на них закона больших чисел.*

*Признак сходимости помещен во 2-ом томе Bulletin Darboux*[4] *первой серии за 1872 год.*

*Первая часть задачи, посланной Вам, известна в науке под названием теоремы Клебша, что я узнал из недавно появившихся лекций по гидродинамике Жуковского.*

*Если Вы слушаете Фукса*[5]*, то вот Вам и тема для диссертации. Примените его теорию к уравнению 2-го порядка. Чтобы было ясно для читателей, Вы можете и первоначальные доказательства провести только для 2-го порядка. Далее займитесь условиями, при которых частный интеграл, или полный интеграл, будут алгебраическими. При каких условиях частный интеграл или полный могут быть выражены отношением двух рядов, сходящихся для всех значений переменных. Если и эта задача покажется обширною, то ограничьтесь случаем алгебраических рациональных коэффициентов. Примените все исследования к уравнению*

$$(ax^2+bx+c)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(dx+e)\frac{\partial y}{\partial x}+fy=0.$$

*Литературу по сему предмету найдете достаточную, даже обширную.*

*В.Ермаков*

*12 Декабря*
*1887 года*

[3] Кронекер Леопольд (1823–1891) — німецький математик, член Берлінської АН (1861) викладач Берлінського університету (1888 – професор). Основні роботи — з теорії чисел, теорії квадратичних форм і теорії груп, а також з теорії еліптичних функцій.

[4] Дарбу Жан Гастон (1842–1917) — французький математик, член Паризької АН (з 1884), член-кореспондент Петербурзької АН (з 1895). Основні праці присвячені аналізу, теорії диференціальних рівнянь, диференціальній геометрії, аналітичній механіці. В 1870 заснував «Bulletin des sciences mathématiques».

[5] Фукс Іммануель Лазарус (1833–1902) — німецький математик, член Берлінської АН (з 1884). Основні дослідження — в теорії диференціальних рівнянь з аналітичними коефіцієнтами. Створив школу лінійних диференціальних рівнянь.

## Лист третій

*Милостивый Государь Борис Яковлевич!*

*Прошу извинить меня, я не желал Вас обидеть. Но я сам был в Вашем положении и также думал, что необходимо залезть в большую глубину премудрости. К тому же я не имел советников и руководителей и не знал, за что взяться. Вам же в общих чертах знакомы все направления в науке. Я никоим образом не против того, чтобы изучать самые трудные вещи — именно это и нужно изучать. Я только желал бы, чтобы Вы в диссертации не ударились в слишком большие обобщения, чтобы предварительно были исследованы подробно частные случаи. Чтобы именно Ваши сочинения не были похожи на труды Ли (или Лье)[6], который и простую вещь запутывает. Но еще хуже, если в погоне за обобщениями математик врет и сам того не замечает. Живой пример Максимович, две работы которого содержат вранье. Магистерская диссертация Ваша была совсем уместною, и детскою работою ее никто не называет. Конечно, от докторской ожидается больше.*

*Брошюра Дарбу о задаче Пфаффа[7] очень хороша, но изложена сжато, так что ее могут читать лишь немногие. А много ли у нас хороших математиков? Вот почему выбирайте хотя и самый трудный предмет, но излагайте возможно проще, возможно яснее. Наметьте тему, составьте план и несколько раз переделайте и переработайте.*

*Во всем университете лекции начаты и страхи прошли. На праздниках в СПБ действительно начальство растерялось, но теперь все успокоились. Рахманинов сверх выслуги 35 лет оставлен еще на один год. Это для него несколько обидно, потому обыкновенно оставляют на 5 лет. В этом месяце и Ромер выслуживает 30 лет (место будет свободно), но его, вероятно, оставят еще на 5 лет с жалованьем 1200. Далее выслуживают сроки Авенариус и Феофилактов. Ромер назначен цензором. Я уже утвержден ординарным.*

*Преданный Вам*

*В.Ермаков*

*1888*
*2-го февраля*

*Не разыщете ли Вы мне указатель (Verzeichniss) статей помещенных в журнале Крелля.[8] У меня есть уже Verzeichniss der Abhandlungen der*

[6] Лі Маріус Софус (1842–1899) — норвезький математик. Автор теорії груп (групи Лі) та їх інваріантів. Розвинув теорію простору Гельмгольца.

[7] Пфафф Йоган Вільгельм Андреас (1774–1835) — німецький математик і астроном. Основні дослідження стосуються теорії логарифмів і небесної механіки. Розвинув теорію пертурбації і теорію руху комет. Член-кореспондент Петербурзької АН (з 1807).

[8] «Journal für reine und angewandte Mathematik» («Журнал чистої і прикладної математики»), який заснував 1826 р. німецький математик та інженер Август Леопольд Крелль (1780–1855).

*Kais. Kön. Akademie; есть также указатель для журнала Liouville. Но это указатели старые. Если найдете подобные указатели для главных журналов Крелля, Лиувилля[9], Политехнической школы, то пришлите; стоимость немедленно уплачу.*

## Лист четвертий

*Милостивый государь Борис Яковлевич!*

*В настоящее время я изучаю произведения петербургских математиков: Чебышева[10], Маркова[11] и Поссе[12]. Они трактуют вопросы о приближенном вычислении интегралов и о разложении функций в ряды по знаменателям подходящих дробей. Ряды Фурье (по синусам) представляют частный случай такого разложения. Но и тут встречаются весьма запутанные вопросы. Так я никак не могу освоиться с задачею: по данным* $\int_a^b F(x)dx,\ \int_a^b xF(x)\,dx,\ \int_a^b x^2F(x)\,dx, \dots, \int_a^b x^m F(x)\,dx$ *найти наибольшую и наименьшую величину* $\int_a^z F(x)\,dx$, *если* $F(x)$ *всегда положительна и* $a < z < b$. *Марков и Поссе дали решение этой задачи, но с какой стороны я не подойду к этой задаче, всегда оказывается, что без длинных рассуждений обойтись нельзя. Самый же результат может быть выражен в краткой форме.*

*Если пришлете Verzeichniss, то напишите, сколько он стоит и как переслать Вам деньги.*

*Шиллер мне сказал, что Вы для диссертации поменяли тему: об обращении интегралов от произвольных функций. Не знаю, быть может и можно сделать интересные обобщения, но все сведется в конце концов на обращение элл.[иптических], ультраэл.[липтических] и абелевых интегралов. Для диссертации могут годиться и вопросы*

---

9 Ліувілль (1809–1882) — французький математик, наукові інтереси якого охоплювали майже всі галузі математики. Багато років видавав «Jouurnal de mathѐmatiques pure et appliquѐe» («Журнал Ліувілля»).

10 Чебишев Пафнутій Львович (1821–1894) російський математик і механік, академік Петербурзької АН, основоположник петербурзької математичної школи.

11 Марков Андрій Андрійович (1856–1922) російський математик, ординарний академік Петербурзької АН (з 1896, ад'юнкт з 1886, екстраординарний академік — з 1890). Учень П.Л.Чебишева. Основні роботи — з теорії чисел, теорії ймовірностей, математичного аналізу. Він уперше дав строге доведення граничної теореми і поширив отримані результати на послідовності залежностей величин, що привело його до загальної схеми «випробувань, пов'язаних в ланцюг» (ланцюги Маркова). За допомогою цієї схеми він установив низку закономірностей, що поклали початок сучасної теорії марковських процесів.

12 Поссе Костянтин Олександрович (1847–1928) — російський математик, почесний член Петербурзької АН (з 1916). Основні роботи присвячені математичному аналізу і теорії функцій.

*частные, даже решение отдельных задач, если только почему-либо это решение заслуживает внимания.*

*У нас уже получены программы для государственного экзамена; довольно краткие. По астрономии есть такой вопрос: определение дня недели для данного года, месяца и числа.*

*За сим в Киеве все благополучно, а если есть какие-нибудь страхи и волнения, то они исходят из Вашего Берлина.*

*Преданный Вам*

*В.Ермаков*

*21 апреля*
*1888*

## Лист п'ятий

*Милостивый Государь Борис Яковлевич!*

*Я пред Вами виноват, что так долго не отвечал Вам. Verzeichniss я получил. Сначала думал, что Вы присылаете за 50 томов и потому был на Вас сердит. Но недавно вскрыл и очень обрадовался, что Вы разыскали за 100 номеров. Быть может найдется Verzeichniss и к Mathematische Annalen. Суслов только магистр и прислан исправляющим должность экстраординарного. Диссертация его никуда не годится, хотя быть может и не содержит вранья. Ваш отчет так понравился, что решили его напечатать в Журнале М.[инистерства] Н.[ародного] Пр.[освещения]. Зачем же мне еще давать отзыв? Да и факультет мне этого не поручал. Начиная с меня многие русские желали одолеть премудрость Вейерштрасса, но никому не удавалось. Вот по этой то причине Ваш отчет и произвел такое хорошее впечатление. Весьма приятно будет, если Вы поймете и изучите Вейерштрасса, тогда и я от Вас кое-чему научусь. На днях у нас будет Министр с Любимовым. Я постараюсь побывать у Любимова и буду говорить ему об Вас. Я прямо заявлю, что Министерство делает худо, присылая новых профессоров (Максимович и Суслов), не отбирая мнения о них от профессоров того университета, куда они посылаются. Желаю Вам всего хорошего и главным образом здоровья.*

*В.Ермаков*

*1888*
*Сентября 16 дня*

*P.S.Краткое изложение свойств интегралов без доказательства можно поместить впереди. После этого изложите без доказательств результаты Вашей диссертации и укажите на то, что сделано Вами. Не только вначале каждой главы, но и вначале каждого параграфа говорите предварительно: о чем будет речь. Вообще нужно, чтобы результаты бросались в глаза, а то во многих сочинениях только после больших усилий разыщешь результаты.*

*24-го сентября (стар.стиля) Коркину исполнится 30 лет службы. Может быть по сему поводу у Вас найдутся охотники послать ему приветственную телеграмму.*

## Лист шостий

*Милостивый Государь Борис Яковлевич!*

*Зачем Вы оправдываетесь, что писали ко мне четыре раза? Попросту я Вам больше не нужен и потому Вы и не вспомнили обо мне, а писали Шиллеру, Ромеру, Захарченку и Ренненкампфу.*

*В Берлин Вы попали в хорошее время, постарайтесь воспользоваться всем, чем можно. Если есть время, то не упускайте и физики, хотя бы тех теоретических отделов, которые Вам мало известны.*

*Вы знаете, что Рахманинов учредил премию в 500 р. за лучшее сочинение по физико-математическому факультету. Эта премия назначена только для бывших воспитанников Киевского университета и выдается через два года. Два года назад премию получил Бобрецкий. Теперь премия предложена мне, но я отказался, мотивируя тем, что я член той коллегии, которая присуждает премию, что таким образом, как будто я присуждаю премию самому себе, — по этой причине считаю для себя неприличным получать премию. Напишите хороший увраж[13] и Вы можете рассчитывать на получение этой премии.*

*Прочтите в математическом Обществе о моем признаке сходимости, так как, вероятно, он неизвестен там.*

*В настоящее время я занят задачею Пфаффа. Оказывается, что все способы интегрирования в простом и изящном виде заканчиваются в этой задаче, т.е. в интегрировании уравнения*

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdot s + X_m dx_m = 0.$$

*По сему поводу я послал в Харьков в Матем.[атическое] Общество следующую задачу. Даны три функции трех переменных $P, Q$ и $R$, требуется найти такую поверхность, чтобы на ней интеграл $\int (Pdx + Qdy + Rdz)$ не зависел от промежуточного пути. Иначе нужно найти такую зависимость между переменными, при которой $Pdx + Qdy + Rdz$ обращается в полный интеграл. Легко показать, что задача приводится к совокупности уравнениям*

$$\frac{dx}{\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}} = \frac{dy}{\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}} = \frac{dz}{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}.$$

*Если $U = C$ и $V = C'$ суть интегралы, то произвольная зависимость между $U$ и $V$ будет искомою функциею. Но интерес задачи заключается в том, чтобы доказать следующие два предложения:*

*1. Если дана одна функция $U$, то другая функция $V$ находится при помощи квадратуры.*

---

[13] Ouvrage (фр.) — твір. — *Ред.*

*2. Если формулы преобразования содержат произвольное постоянное, которое не входит ни в данный интеграл, ни в преобразованный, то обе функции $U$ и $V$ находятся при помощи одних дифференцирований и квадратур.*

*Предложите эту задачу в математическом обществе.*

*Пишите подробно, чем Вы занимаетесь, что Вас интересует, какие именно слушаете лекции.*

*Кроме одного пустяка у Шпачинского, я по неевклидовой геометрии ничего не писал.*

*Нечего удивляться, что курс жизни падает и будет падать, пока у нас много казнокрадов и воров, на которых вешают кресты; пока вся эта сволочь в силе, до тех пор внутреннее и внешнее положение будет ухудшаться. Берегитесь и Вы, не свихнитесь, будьте честным и истинным патриотом, а то и теперь у Вас замечают Ромеровские приемы, а там пожалуй и Ренненкампфовские.*

*Преданный Вам*

*В.Ермаков*

*P.S. Супруге Вашей передайте нижайший поклон.*

## Лист сьомий

*Милостивый Государь Борис Яковлевич!*

*Я готов держать корректуру, но при существовании одного из двух условий: или Ваша рукопись написана четко, или корректируемое мне понятно. Вы занимаетесь вопросом об изображении. Вероятно Вы решаете задачу: по данным двум площадям и их контурам найти $f(z)$ так, чтобы при помощи $Z=f(z)$ одна площадь превращалась в другую. Но быть может изображение является у Вас только главным средством для изучения Фуксовых функций, тогда я буду спорить и протестовать против способа изложения Poincaré. Вот почему*

*Если $F\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)=F(x)$, то такая функция называется Фуксовою, или Клейновою. Для существования такой функции необходимо, чтобы ряд*

$$z, \varphi(z), \varphi^2(z), \varphi^3(z), \ldots \qquad (1)$$

*где $\varphi(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$, был прерывный, т.е. нельзя подобрать так, чтобы $\varphi^m(z)-z$ было различно от нуля и имело весьма малый модуль.*

*Ряд (1) может быть непрерывным только в одном случае: если корни уравнения $\varphi(z)=z$ различны, то $\dfrac{\varphi(z)-\alpha}{\varphi(z)-\lambda}=K\dfrac{z-\alpha}{z-\lambda}$; если при этом модуль $K=1$, и само $K$ не есть $\sqrt[n]{1}$. Во всех других случаях ряд (1) прерывный.*

*Далее пусть* $Q(z)=\dfrac{a'z+b'}{c'z+d'}$ *не заключается в (1) ряду, и положим, для существования такой функции необходимо, чтобы ряд, общий член которого*

$$\varphi^a\theta^{a'}\varphi^b\theta^b\ldots\varphi^m\theta^{m'}(z) \qquad (2)$$

*был прерывный, т.е. чтобы в нем не было членов весьма мало разнящихся от z. При каких условиях ряд (2) прерывный?*

*Вот задача простая и достойная внимания; от ее решения зависит многое. Poincaré не решает этой задачи, а переходит к весьма сложным и запутанным соображениям о делении части плоскости на клетки. Так поступать нельзя; вопрос должен быть решен всесторонне, следовательно и аналитически.*

*Если* $\varphi$ *и* $\theta$ *не могут быть перемещаемы, т.е.* $\varphi\theta(z)=0$ *на* $\theta\varphi(z)$, *то я сильно сомневаюсь в том, чтобы ряд (2) был прерывен. Но если я и неправ, то в таком случае* $F(x)$, *обладающая свойствами* $F(yx)=F(x)$, $F(\theta x)=F(x)$ *имеет бесчисленное множество существенно особенных точек.*

*Даже и в том случае, когда функции перемещаемы, т.е.* $\varphi\theta(z)=\theta(\varphi(z))$, *ряд (2) может быть непрерывен. Если и Вы занимаетесь Фуксовыми функциями и не решаете основного вопроса, на который я указываю, а занимаетесь Пуанкаревскими соображениями, то я, вероятно, не в состоянии буду осилить Вашей диссертации.*

*Если* $\varphi$ *и* $\theta$ *перемещаемы, то корни уравнений* $\varphi(z)=z$, $\theta(z)=z$ *одинаковы. Если корни уравнения равны, то ряд (2) прерывен. Если же корни различны, то*

$$\frac{\varphi(z)-\alpha}{\varphi(z)-\beta}=K\frac{z-\alpha}{z-\beta};\quad \frac{\theta(z)-\alpha}{\theta(z)-\beta}=K'\frac{z-\alpha}{z-\beta}.$$

*Если между K и K′ нет зависимости:* $\mathrm{mod}(K^mK'^n)=1$, *то ряд непрерывный. При существовании этой зависимости ряд также непрерывный, если* $K^mK'^n$ *не есть* $\sqrt{\;}\ldots$

*В.Ермаков.*

## *Лист восьмий*

*Милостивый Государь Борис Яковлевич!*

*Если в наборе оказались ошибки, то я в этом не виноват. Шиллер взял всю корректуру на себя и мне не захотел присылать. В настоящее время я уже настолько овладел предметом, что я полагаю грубых ошибок не сделаю. Благодарю за указание на Stouff'a и Rausenberger'a. Прочту их. Я уже теперь не боюсь чертежей, и то, что Вы пишете, давно знаю. Первый мемуар Пуанкаре[14] уже я изучил без всяких пропусков. Возвращаюсь опять к своему простейшему вопросу.*

[14] Пуанкаре Анрі (1854–1912) — французький математик, фізик, астроном і філософ, член Паризької АН (з 1887), член Французької академії (з 1908), член-кореспондент Петербурзької АН (з 1895). Великий цикл робіт Пуанкаре стосується теорії диференціальних рівнянь.

*Даны две действительные подстановки* $\left(z, \dfrac{az+b}{cz+d}\right)$, $\left(z, \dfrac{a'z+b'}{c'z+d'}\right)$. *Требуется узнать, дают ли они прерывную группу и как в этом случае разделить плоскость на клетки. Вы раньше утверждали, да и теперь вероятно станете утверждать, что этот вопрос решен у Пуанкаре. На мой же взгляд — нет. Действительно, по теории Пуанкаре можно найти неравенства, которым должны удовлетворять коэффициенты (что удается с большим трудом). Но вот курьез: коэффициенты двух данных подстановок могут не удовлетворять никаким неравенствам, вытекающим из теории Пуанкаре; на самом же деле подстановки дают прерывную группу. Дело в том, что неравенства Пуанкаре применимы только к редуцированной системе подстановок. Я ставлю теперь указанный выше вопрос и стараюсь решить прежде вопрос:*

*Заменить систему двух подстановок другою системою простейшего ей равносильного (isomorphe et holoedrique).*

*Я нашел способ приведения, при котором прерывные группы исключаются. Способ этот весьма простой, он зависит не от всех коэффициентов, а лишь от трех инвариантов. Я прихожу таким образом только к шести различным случаям. Приведенные таким образом подстановки во всех шести случаях дают прерывные группы. Это доказывается тем, что в каждом случае плоскость делится на клетки. Вот какой простой вопрос меня интересует. Я не люблю залезать далеко, прежде чем не обработаны частности. А Вы не хотите меня понять и все лезете в более высокие области. Но Stouff'a и Rausenberqer'a нужно прочесть.*

*Ну а Вы же в конце хотели заехать в Петербург. Следовало бы хотя для того, чтобы побывать у Любимова, у Министра и других. Впрочем как знаете.*

*В.Ермаков.*

*NB. О циклах Вы имеете смутное понятие, в том , о котором Вы пишете один цикл со всеми углами. Значит и Фукс не помог Вам добраться до полной глубины.*

## *Лист дев'ятий*

*Милостивый Государь Борис Яковлевич!*

*Куда Вам ехать в Петербург при осложнившихся обстоятельствах. Теперь Вам нужно поскорее готовить диссертацию и защищать, что едва ли Вы успеете сделать до лета. Если поспешность не повредит содержанию диссертации, то хорошо. Но если по Вашим соображениям нужно повременить, тогда нужно ехать в Питер. К Любимову я не могу*

*Вам дать рекомендательного письма, ибо таковое дается только к лицу равному по положению. Но и без этого Вы должны к нему явиться, если конечно будете в Питере. И к министру нужно явиться на 10 минут. Я мог бы дать лишь письмо к какому-нибудь математику, напр.Маркову — это Петербургский Пуанкаре. Опять повторяю, что напрасно Вы браните меня за плохой набор: я не виноват, ибо Шиллер, вероятно по Вашему желанию, корректуры мне не присылал. Беду можно поправить несколькими рублями — перепечатать снова или все, или последние две страницы.*

*Опять по части математики Вы пишете глупости. Замена переменного и подстановки* $(z, f(z))$ *в* $(z, F^{-1}fF(z))$ *есть у Пуанкаре. Далее Вы говорите, что Rausenberger таким путем привел две подстановки к форме* $(x, \lambda x)$, $(x, x+\mu)$.

*Такой ошибки Rausenberger не мог сделать, ибо две эти подстановки дают непрерывную группу.*

*Отсюда я вижу, что Ваш предмет 0-го рода имеет лишь малую связь с мемуарами Пуанкаре. Но в чем состоит задача об изображении, которую Вы решили всесторонне, я не знаю. Если это самая общая задача о преобразовании произвольной фигуры в другую, то какую связь она имеет с предметом Вашего сочинения.*

*В.Ермаков*

*Рукописи до сих пор нет.*

## Лист десятий

*Милостивый Государь Борис Яковлевич!*

*Совершенно верно, что я от науки отстал и многих мемуаров по фуксовым функциям не читал. Этого я и не желаю скрывать, особенно пред Вами, чтобы ясно и отчетливо Вы понимали, для каких профанов Вы пишете диссертацию. Заставить таких профанов понять Вашу диссертацию — дело весьма трудное. Не знаю, как Вы справитесь с ним? Конечно, многие стыда ради притворятся понимающими Вашу диссертацию, и Вы подобно Максимовичу приобретете славу великого ученого. Ведь помните мы с Вами Максимовича не поняли, но пред его назначением Ромер (сам мне говорил), по просьбе Ренненкампфа, читал его диссертацию и очень хвалил. Извините за сравнение с Максимовичем, но это делается для того, чтобы немного возвратить Вас из заоблачных высот на землю, чтобы Вы поняли, что недостаточно что-нибудь усвоить, что самый главный труд состоит еще в том, чтобы Вас поняли другие.*

*По разным причинам я много лет не следил за высшей математикой и отстал. Недавно я принялся читать Пуанкаре. Но прежде всего я должен сознаться, что я еще не вошел во вкус функций с бесчисленным мно-*

*жеством существенно особенных точек. Далее… но прежде всего я понимал Фуксовы и Клейновы функции такими, что могут иметь какие угодно особенные точки, и в каком угодно числе, но не точки разветвления. Далее я приступил к чтению массы геометрических рассуждений, из которых я понял, что плоскость (или её часть) может быть разделена на клетки, чтобы каждой точке одной клетки соответствовала только одна точка другой. Вопрос этот сходен и обобщает собою вопрос о числе периодов однозначной функции. Якоби показал, что функция не может иметь трех периодов (Казаратти с этим не согласен). Тогда я оставил дальнейшее чтение, так как у меня явились некоторые вопросы.*

*Может ли существовать Фуксова (Клейнова) такая функция, чтобы*

$$F=\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)=F(x).$$

*Этот вопрос я могу решить. Так, нет функции, удовлетворяющей условию:*

$$F\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=F(x).$$

*Может быть такая функция:*

$$F\left(\frac{x+2}{x+1}\right)=F(x)$$

*Верно ли?*

*2. Далее вместо многих подстановок, как у Пуанкаре, я беру только две и задаю вопрос: существует ли такая функция $F(x)$, чтобы*

$$F\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)=F(x),\ F\left(\frac{a'x+b'}{c'x+d'}\right)=F(x). \qquad \text{(A)}$$

*Этого вопроса я не могу решить. Между тем искомый критерий зависит только от 8 постоянных $a, b, c, d, a', b', c'$ и $d'$. У Пуанкаре конечно решен более общий случай. Но мне трудно добиться до него через массу предварительных рассуждений. Будьте так добры приноровите критерий к интересующему меня случаю (А) двух подстановок и сообщите, в чем он состоит.*

*Чтобы лучше Вы могли меня понять, я обращу Ваше внимание на частный случай: нет однозначной функции, удовлетворяющей двум уравнениям:*

$$F(x+K)=F(x),\ F(x+K')=F(x),$$

*если отношение $\frac{K'}{K}$ есть число действительное. Что-нибудь подобное должно быть и для уравнений (А).*

*Между тем вопрос о двух подстановках должен быть основным в вопросе, опирающемся на многие подстановки.*

*Если и Вы и теперь меня не поняли и не удовлетворите моего преждевременного любопытства, то я приду в отчаяние, и с отчаяния опять примусь за Пуанкаре.*

*Конечно я полагаю, что при корректировании я научусь чему-нибудь.*

*Что Вас так заботит то, что скажет Максимович о Вашем отчете, который уже печатается? Неужели Вы полагаете, что члены Министерства, давшие одобрительный отзыв, считают себя мало компетентными и нуждаются в подтверждении своего мнения. Отчет с мнением ученого Комитета прислан нам просто для сведения и никаких подтверждений от нас не требовалось.*

*Но быть может мои рассуждения покажутся Вам наивными, быть может я не понимаю самых простых вещей, в таком случае прямо укажите, в чем кроются мои недоразумения.*

*Преданный Вам*
*В.Ермаков.*

## Лист одинадцятий

*Милостивый Государь Борис Яковлевич!*

*На мой вопрос Вы не дали ответа. Пуанкаре тоже его не решает. Вы только приводите некоторые теоремы Пуанкаре. Сей ученый показал, какими свойствами обладают многоугольники, на которые делится плоскость; далее показал, как по одному многоугольнику найти основные подстановки группы.*

*Но обратного вопроса Пуанкаре и не думает решать, а этот вопрос состоит в следующем:*

*Если даны несколько подстановок, то как узнать, могут ли они образовать фуксову (прерывную — discontini) группу подстановок, и как тогда разделить плоскость?*

*Вот какова должна быть аналитическая задача:*

*Даны несколько подстановок:*

$$\frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i} \quad (i = 1,2,3,\dots).$$

*Требуется решить следующие вопросы:*

*1. Найти между этими подстановками зависимости, если таковые существуют.*

*2. Узнать, может ли другая подстановка* $\frac{Az+B}{Cz+D}$ *быть комбинацией данных подстановок.*

*3. Могут ли быть данные подстановки выражены через меньшее число других подстановок.*

*4. Может ли в числе комбинаций данных подстановок быть такая* $\frac{Az+B}{Cz+D}$, *чтобы модуль* $\left(\frac{1}{2}\frac{A+D}{\sqrt{AD+BC}}\right)$ *был бы весьма близок к единице, но ей не равен. Тогда группа непрерывна (contina) т.е. не годится.*

*Все это весьма ясные аналитические вопросы. Решение их в значительной степени могло бы выяснить теорию фуксовых функций и упростить результаты. А то теперь Вы сами видите, что эта теория настолько сложна, что Вы сочли возможным заняться только частным случаем.*

*Решение поставленных мною вопросов может быть приведет к решению задачи:*

*Можно ли определить целые числа* $m, m', m''$, $n$ *так, чтобы*

$$A\alpha^{m}\beta^{m'}\gamma^{m''}\ldots(C+D_{n})=0.$$

*Если Вы взятый Вами частный случай рассмотрите во всей его полноте, с его важнейшими приложениями, то диссертация будет хороша, но и для этого потребуется большой объем.*

*Я не считаю Вас ни лежачим ни нележачим и не знаю на что Вы намекаете. Но дело в том, что Вы можете о себе быть высокого мнения, что было бы худо. Во-вторых дело в том, что Вам путь-дорога открыта и не я стану Вам мешать, скорее готов способствовать. (Может быть думаете обратно, так [как] я отказался писать ненужную рецензию). Так вот, чтобы быстрое повышение не вскружило Вам головы, чтобы и т.д.*

*Преданный Вам,*
*В.Ермаков*

*P.S. Со временем, я полагаю, Вы не откажетесь попробовать решить поставленные здесь вопросы и будем решать вместе. Надеюсь, что получивши доктора, Вы не будете считать себя всезнающим, а почитаете еще Чебышева и других.*

## Лист дванадцятий

*Милостивый Государь Борис Яковлевич!*

*16 страниц напечатано, наборщики требуют далее, но нет. Шиллер держал корректуру, а мне не давал. Я осилил три мемуара Пуанкаре, но не вполне. Действительно нужно счастливое стечение обстоятельств, чтобы создать эти мемуары. Бесконечное разнообразие случаев трудно подвести под общую теорию, а в геометрическом доказательстве легко не то чтобы ошибиться, но не принять во внимание частных всех случаев, что и встречается у Пуанкаре. Ряд возникающих вопросов при чтении этих мемуаров требует решения. Меня интересует самый простой вопрос: прерывность группы, происшедшей из двух действи-*

*тельных подстановок. Вы советовали обратиться к чертежам. Если нет сторон второго рода, то чертеж четыреугольник. При существовании сторон второго рода, чертеж может быть шести и восьмиугольником. Но и здесь случаев так много, что трудно в них разобраться. Но желательно хотя бы для этого простого случая найти аналитические доказательства. Ведь всё дело сводится к тому, чтобы показать, при каких условиях в каждой производной подстановке* $\frac{a_i z+b_i}{c_i z+d_i}$ *выражение* $(a_i-d_i)^2+$ $+2b_i^2+2c_i^2=(a_i+d_i)^2+2(b_i-c_i)^2-4$ *не может быть сделано бесконечно малым. Но и к решению этого вопроса я не знаю как приступить.*

*Не сердитесь на меня, если я иногда пишу глупости. Я желаю Вам только добра и очень желаю, чтобы Вы попали в Киевский университет. Теперь же есть и место свободное, так как у нас только 2 экстраординарных и то исправляющие должность.*

*В.Ермаков*

***Від редакції:*** Листи професора Єрмакова дають нам відчути атмосферу університетського життя понадстолітньої давнини. Проте в них є чисто математичні міркування, які не всі зрозуміють. На наше прохання випускник Київського університету 1966 року, член-кореспондент Національної академії наук України Юрій Анатолійович Дрозд прочитав листи як математик.

## КОМЕНТАР ФАХІВЦЯ

Листи Єрмакова цікаві, перш за все, тим, що в них обговорюється нова для того часу галузь математики, яка зараз зветься теорією автоморфних функцій. Нагадаємо деякі поняття цієї теорії. (Дивись, наприклад, книгу — *Р.Форм. Автоморфные функции. Москва–Ленинград. 1936,* яка й досі залишається зразковим підручником з даної тематики.

Дробово-лінійним перетворенням розширеної комплексної площини $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ зветься відображення $z\mapsto\frac{az+b}{cz+d}$, де $ad-bc\neq 0$. Позначимо $\mathbf{L}$ множину всіх таких перетворень. Групою дробово-лінійних перетворень зветься підмножина $\Gamma\subseteq\mathbf{L}$ , яка разом з кожним перетворенням містить обернене, а разом з кожними двома — їхню композицію. Група дробово-лінійних перетворень $\Gamma$ зветься розривною (discontinuous)[1], якщо існує точка $z_0$ в деякому околі якої немає точок вигляду $g(z_0)$, де $g\in\Gamma$ — нетотожне перетворення. Наприклад,

[1] Єрмаков зве такі групи «прерывными»; у Р.Форма вони звуться *«собственно разрывными».*

такою буде довільна скінченна група $\Gamma \subset \mathbf{L}$ . Аналітична функція $f(z)$ зветься автоморфною відносно групи $\Gamma$, якщо $f(g(z)) = f(z)$ для всіх перетворень $g \in \Gamma$ і всіх $z$ з області визначення функції $f(z)$. Непостійні автоморфні функції можуть існувати лише відносно розривної групи. Наприклад, тригонометричні функції з періодом $T$ — це автоморфні функції відносно групи зсувів $z \mapsto z+2nT$, де $n$ пробігає цілі числа. Так звані еліптичні (або двоперіодичні) функції — це автоморфні функції відносно подвійної групи зсувів $z \mapsto z+na+mb$, де $m$, $n$ пробігають цілі числа, $a$ і $b$ — фіксовані ненульові комплексні числа такі, що відношення $a/b$ не є дійсним. Розривна група зветься фуксовою, якщо існує круг (або напівплощина) на комплексній площині, який переводиться в себе всіма перетвореннями групи.

Під час навчання в Німеччині Букреєв особливо цікавився теорією автоморфних функцій. На цей час видатний французький математик Анрі Пуанкаре розвинув загальну теорію автоморфних функцій, яка грунтувалася на побудованій ним моделі площини Лобачевського. Саме, він пов'язав з кожною фуксовою групою розбиття площини Лобачевського на конгруентні многокутники («полігони» в термінології, яку застосовував Букреєв), які переводяться один в одний перетвореннями групи, і показав, що кожен з цих многокутників повністю визначає групу. Пуанкаре також дав спосіб побудови, для фуксових груп, всіх автоморфних функцій.

У своїх листах Єрмаков висловлює невдоволення підходом Пуанкаре. Натомість він формулює цілком природне питання: коли даний набір дробово-лінійних перетворень породжує розривну групу. Єрмаков звертає увагу на те, що з конструкції Пуанкаре виводяться лише деякі достатні умови, які не є необхідними навіть для двох перетворень. Знаходження достатніх умов є складною задачею. У листі 7 Єрмаков фактично вимагає, щоб, якщо Букреєв присвятить свою дисертацію автоморфним функціям, він насамперед розв'язав цю задачу принаймні для двох перетворень. На мій погляд, це занадто амбіційна вимога, тим більше, що сам Єрмаков, наскільки можна зрозуміти з його листів, не знайшов шляхів для її розв'язання. Правда, в листі 8 він стверджує, що начебто звів пару перетворень до простішої форми, після чого одержав 6 можливих випадків і всі вони дають розривні групи. Але вже в листі 10 він каже, що задачу для двох перетворень він розв'язати не може. Напевне, у своїх викладках Єрмаков знайшов пробіли.

Єрмаков також висловлює деякі свої думки з цього приводу. На жаль, деякі з них виявляються хибними. Так, у листі 7 він сумнівається, що два некомутуючі перетворення (тобто, такі, що $g_1 g_2 \neq g_2 g_1$) можуть породжувати розривну групу Г. Він також твердить, що, навіть якщо ця група виявиться розривною, відповідні автоморфні функції матимуть безліч істотних особливих точок. Це твердження насправді є неправильним. Наприклад, перетворення $z \mapsto 1-z$ та $z \mapsto z^{-1}$ породжують скінчену групу. Ця група напевно є розривною, а особливими точками відповідних автоморфних функцій може бути лише скінченна кількість полюсів. Більш того, деякі з еліптичних функцій (які теж мають лише полюси та єдину істотну особливу точку $\infty$) є автоморфними відносно більшої групи, ніж подвійна група зсувів, яка включає некомутуючі перетворення. У згадуваній книзі Р.Форма (§§ 57 і 59) дано повний опис скінченних груп дробово-лінійних перетворень, а також скінченних розширень групи зсувів та подвійної групи зсувів. З цих параграфів та § 58 випливає, зокрема, опис всіх розривних груп, які породжені двома комутуючими перетвореннями. Це дає часткову відповідь на питання Єрмакова.

Насправді, Букреєв справді присвятив свою дисертацію теорії автоморфних функцій, але він розглянув зовсім інший клас задач. Вже з назви дисертації «О фуксовых функциях нулевого ранга с симметрическим основным полигоном» видно, що він обмежився спеціальним класом функцій. Накладені обмеження дали йому можливість явно побудувати перетворення, які породжують групу, детально вивчити аналітичні властивості цих функцій та знайти клас диференціальних рівнянь («фуксових рівнянь»), які можуть бути проінтегровані за допомогою цього класу функцій. Ця дисертація, яку Букреєв блискуче захистив у 1889 році, була першим науковим дослідженням в Російській імперії, в якому було одержано глибокі результати в одній з найновіших галузей математики того часу. На жаль (для теорії автоморфних функцій), невдовзі по тому головні наукові інтереси Букреєва перейшли в диференціальну геометрію. Можливо, це було обумовлено тим, що колеги не змогли належно оцінити його здобутки в теорії функцій. Дослідження автоморфних функцій в Київському університеті продовжив П.М.Покровський, але потому, на жаль, вони практично припинилися.

*Юрій ДРОЗД,*
*член-кореспондент Національної академії наук України*