УДК 539.3

В. Н. Ложкин, Н. И. Кодак

Ограничения метода малого параметра изучения упругопластического состояния широкой полосы с круговым отверстием

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. М. Ковалевым)

The limitations of the small-parameter method of study of elastic-plastic states of a wide strip with circular hole are determined.

1. Рассмотрим изотропную среду с круговой цилиндрической полостью радиусом R

$$
\begin{aligned}
&z = R^{-1}(x_1 + ix_2) = \rho\exp(i\theta), \qquad 1 \leqslant \rho < \infty, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \\
&|x_1| \leqslant l, \qquad |x_2| < \infty, \qquad |x_3| < \infty, \qquad R \ll l,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где x_1, x_2, x_3 — прямоугольные; ρ, θ — полярные координаты.

Предположим, что среда находится в условиях плоской деформации, когда достаточно изучить распределение напряжений в сечении $x_3 = 0$ с круговым отверстием. Допустим, что в сплошном сечении заданы упругие напряжения σ_{11}^0, σ_{22}^0, τ_{12}^0, а к контуру отверстия приложено постоянное нормальное давление.

Для достаточно больших значений σ_{11}^0, σ_{22}^0, τ_{12}^0 или большого давления в сечении возле отверстия возникает полностью охватывающая его контур пластическая область. Напряжения в ней описываются решением задачи, состоящей из уравнений равновесия, условия пластичности и граничных условий на контуре отверстия.

Напряжения в упругой области находятся из бигармонической задачи для внешности подлежащей определению границы, на которой пластические и упругие напряжения совпадают, с учетом напряжений, заданных в сплошном сечении.

Предположим, что пластические и упругие напряжения, вызванные наличием отверстия, не влияют на упругое состояние сечения возле его внешней границы.

Решением бигармонической задачи могут быть аналитические функции $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$, характеризующие напряжения, и функция $\omega(\zeta)$, конформно отображающая область $|\zeta| \geqslant 1$ комплексной плоскости ζ на упругую область комплексной плоскости z, для которых имеют место разложения [1–3]

$$
\begin{aligned}
&\Phi(\zeta) = \Phi_0(\zeta) + \sum_{m=1} a_m\zeta^{-m}, \qquad \Psi(\zeta) = \Psi_0(\zeta) + \sum_{m=1} b_m\zeta^{-m}, \\
&z = \omega(\zeta) = c\left(\zeta^{-1} + \varepsilon_0 + \sum_{m=1} \varepsilon_m\zeta^{-m}\right), \qquad |\zeta| \geqslant 1.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Здесь функции $\Phi_0(\zeta)$ и $\Psi_0(\zeta)$ определяются напряжениями, заданными в сплошном сечении [1].

Предположим, что существует аналитическая функция

$$\zeta(z) = C\left(z + E_0 + \sum_{m=1} E_m z^{-m}\right), \qquad |z| \geqslant |t_p(\varphi)|, \tag{3}$$

обратная функции $z = \omega(\zeta)$ и конформно отображающая упругую область плоскости z на область $|\zeta| \geqslant 1$ плоскости ζ. Здесь $t_p(\varphi)$ — граница раздела областей

$$t_p(\varphi) = \omega[\exp(i\varphi)]. \tag{4}$$

Тогда для функций $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$ справедливы переразложения

$$\begin{aligned} &\Phi(z) = \Phi[\zeta(z)] = \Phi_0(z) + \sum_{m=1} A_m z^{-m}, \\ &\Psi(z) = \Psi[\zeta(z)] = \Psi_0(z) + \sum_{m=1} B_m z^{-m}, \qquad |z| \geqslant |t_p(\varphi)|. \end{aligned} \tag{5}$$

В этом случае функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, упругие напряжения и границу раздела (в полярных координатах ρ, θ) можно определить методом малого параметра [4].

2. Пусть напряжения в сечении принимают значения

$$\begin{aligned} &\sigma_{11}^0 = -2\eta k, \qquad \sigma_{22}^0 = -2\lambda\eta k, \qquad \tau_{12}^0 = 0, \qquad \lambda > 0, \qquad \eta > 0; \\ &\rho = 1: \quad \sigma_\rho = \tau_{\rho\theta} = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Возникновение пластических напряжений определяется условием [2]

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\tau_{12}^2 = 4k^2. \tag{7}$$

Сплошное сечение находится в упругом состоянии, а пластическая область полностью охватывает контур отверстия при выполнении неравенств [5]

$$(1+\lambda)\eta + 2\ln(1 - |1-\lambda|\eta) > 1, \qquad |1-\lambda|\eta \leqslant 0{,}5758. \tag{8}$$

Задача (1), (6)–(8) имеет решение Л. А. Галина [2], в котором функция $\omega(\zeta)$ принимает вид

$$z = \omega(\zeta) = c[\zeta - (1-\lambda)\eta\zeta^{-1}], \qquad c^2 = \exp[(1+\lambda)\eta - 1]. \tag{9}$$

Утверждение 1. *Решение [4] задачи* (1), (6)–(8), *построенное методом малого параметра, справедливо при выполнении условия статической определимости Л. А. Галина [2]*

$$|1-\lambda|\eta < (\sqrt{2} - 1)^2 = 0{,}1715. \tag{10}$$

Доказательство. Из равенств (4), (9) найдем, что

$$\begin{aligned} &\zeta(z) = (2c)^{-1} z\{1 + [1 + 4(1-\lambda)\eta c^2 z^{-2}]^{1/2}\}, \\ &|z| \geqslant |t_p(\varphi)| \geqslant c(1 - |1-\lambda|\eta). \end{aligned} \tag{11}$$

Тогда разложение (3) будет иметь место во всей упругой области при выполнении неравенства

$$4|1-\lambda|\eta < (1-|1-\lambda|\eta)^2, \tag{12}$$

из которого следует ограничение (10).

3. Пусть напряжения в сечении принимают значения (6), а возникновение пластических напряжений определяется условием [3]

$$(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + 4\tau_{12}^2 = 4k^2\{1-\exp[-\delta+(2k)^{-1}(\sigma_{11}+\sigma_{22})]\}^2, \qquad \delta \ll 1. \tag{13}$$

Сплошное сечение находится в упругом состоянии, а пластическая область полностью охватывает контур отверстия при выполнении неравенств [5]

$$(1+\lambda)\eta + 2\ln(1-|1-\lambda|\eta) > \gamma, \qquad |1-\lambda|\eta \leqslant \mu_0 < 1, \tag{14}$$

где

$$\gamma = \delta_1\left(1-\frac{\delta_1}{3}+\frac{\delta_1^2}{36}+\frac{\delta_1^3}{270}\right), \qquad \delta_1 = (2\delta)^{1/2}, \qquad \delta \leqslant \frac{1}{8};$$

$$\mu_0 = (1-\mu)^{-1}\mu, \qquad \mu = \delta_2\left(1+\frac{\delta_2}{3}+\frac{\delta_1^2}{36}-\frac{\delta_2^3}{270}+\frac{\delta_2^4}{1620}\right), \qquad \delta_2 = \gamma^{1/2}.$$

Задача (1), (6), (13), (14) имеет решение Б. Д. Аннина [3], в котором функция $\omega(\zeta)$ принимает вид

$$z = \omega(\zeta) = c[\zeta-(1-\lambda)\eta\zeta^{-1}], \qquad c^2 = \exp[(1+\lambda)\eta-\gamma]. \tag{15}$$

Из сравнения равенств (9) и (15) следует, что для рассматриваемой задачи справедливо утверждение 1.

4. Пусть напряжения в сечении принимают значения

$$\begin{aligned} &\sigma_{22}^0 = -2\alpha_1 k l^{-1} x_1, \qquad \sigma_{11}^0 = \tau_{12}^0 = 0, \qquad 0<\alpha_1<1;\\ &\rho = 1: \quad \sigma_\rho = -\alpha_0 k, \qquad \tau_{\rho\theta} = 0, \qquad \alpha_0 > 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Возникновение пластических напряжений определяется условием (7). Сплошное сечение находится в упругом состоянии, а полный пластический охват контура отверстия обеспечивается давлением на его контуре.

Задача (1), (7), (16) имеет решение Г. Н. Савина–О. С. Парасюка [1], уточненное учетом однозначности упругих смещений [6], в котором функция $\omega(\zeta)$ принимает вид

$$z = \omega(\zeta) = c[\zeta-\varepsilon_0-\varepsilon_1\zeta^{-1}-\varepsilon_2\zeta^{-1}(\zeta+\zeta_0)^{-1}], \tag{17}$$

где, с точностью до δ^4,

$$\begin{aligned} &c_0 = (1+\delta^2)c, \qquad \varepsilon_0 = \delta+4\delta^3, \qquad \varepsilon_1 = -3\delta^2, \qquad \varepsilon_2 = \delta+5\delta^3,\\ &\zeta_0 = \delta+2\delta^3, \qquad \delta = \alpha_1(2l)^{-1}cR, \qquad c^2 = \exp(\alpha_0-1). \end{aligned} \tag{18}$$

Утверждение 2. *Для задачи* (1), (7), (16) *справедливо решение [7], построенное методом малого параметра [4].*

Доказательство. После подстановки значений (18) в равенство (17) с точностью до δ^3 будем иметь, что

$$z_0 = c_0^{-1} z = \zeta - \delta + 3\delta^3\zeta^{-1} - \delta\zeta^{-2} + \delta^2\zeta^{-3}. \tag{19}$$

Из уравнения (19) найдем функцию (3)

$$\zeta(c_0^{-1}z) = z_0 + \delta(1 + z_0^{-2}) - \delta^2(3z_0^{-1} + 3z_0^{-3} + 2z_0^{-5}). \tag{20}$$

5. Пусть напряжения в сечении принимают значения

$$\begin{gathered}\sigma_{11}^0 = -2\eta k, \qquad \sigma_{22}^0 = -2k(\lambda\eta - \alpha_1 l^{-1} x_1), \qquad \tau_{12}^0 = 0;\\ \rho = 1: \quad \sigma_\rho = \tau_{\rho\theta} = 0;\\ \alpha_1 > 0, \qquad \lambda > 0, \qquad \eta > 0, \qquad \alpha_1 + |1-\lambda|\eta < 1.\end{gathered} \tag{21}$$

Возникновение пластических напряжений определяется условием (7). Сплошное сечение находится в упругом состоянии.

В решении [8] задачи (1), (7), (21) функция $\omega(\zeta)$ определяется равенством (17), в котором ее коэффициенты с точностью до δ^3 будут такими:

$$\begin{gathered}c_0 = [1 + (1-\varepsilon)\delta^2]c, \qquad \varepsilon_0 = \varepsilon_2 = (1-\varepsilon)\delta, \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon - 3(1-\varepsilon)\delta^2,\\ \zeta_0 = \delta, \qquad \varepsilon = (1-\lambda)\eta, \qquad \delta = \alpha_1(2l)^{-1}cR, \qquad c^2 = \exp[(1+\lambda)\eta - 1].\end{gathered} \tag{22}$$

Утверждение 3. *Решение [8, 9] задачи* (1), (7), (21), *построенное методом малого параметра [4], справедливо при выполнении условия*

$$\begin{gathered}-\mu_1 < (1-\lambda)\eta < \mu_2,\\ \mu_1 = (\sqrt{2}-1)^2 - \frac{\sqrt{2}}{6}\delta - \frac{71\sqrt{2}}{144}\delta^2 = 0{,}1715 - 0{,}2357\delta - 0{,}6972\delta^2,\\ \mu_2 = (\sqrt{2}-1)^2 - 4\left(1 - \frac{5\sqrt{2}}{8}\right)\delta + \frac{17\sqrt{2}}{16}\delta^2 = 0{,}1715 - 0{,}4644\delta + 1{,}5026\delta^2.\end{gathered} \tag{23}$$

Доказательство. После подстановки значений (22) в равенство (17) с точностью до δ^3 будем иметь

$$z_0 = c_0^{-1} z_0 = \zeta - (1-\varepsilon)\delta - [\varepsilon - 3(1-\varepsilon)\delta^2]\zeta^{-1} - (1-\varepsilon)\delta\zeta^{-2} + (1-\varepsilon)\delta^2\zeta^{-3}. \tag{24}$$

Из равенства (24) найдем

$$\begin{aligned}\rho_p^2(\varphi) = |z_0|^2 = 1 &- 2\delta\cos\varphi - 2\varepsilon\cos 2\varphi - 2\delta\cos 3\varphi + \varepsilon^2 + 2\delta^2 +\\ &+ 6\varepsilon\delta\cos\varphi + 8\delta^2\cos 2\varphi + 2\varepsilon\delta\cos 3\varphi + 2\delta^2\cos 4\varphi;\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{gathered}\zeta(z_0) = g_0(z_0) + \delta g_1(z_0), \qquad g_0(z_0) = \frac{z_0}{2}[1 + (1 + 4\varepsilon z_0^{-2})^{1/2}],\\ g_1(z_0) = (1-\varepsilon)(1 + 2\varepsilon/z_0 g_0)^{-1}[1 + (1+\varepsilon)/z_0 g_0].\end{gathered} \tag{26}$$

При $|z_0|^2 = \rho_p^2(\varphi) > 4|\varepsilon|$ для функции (26) справедливо разложение (3)

$$\zeta(c_0^{-1}z) = z_0 + \varepsilon z_0^{-1} - \varepsilon^2 z_0^{-3} + (1-\varepsilon)\delta[1 + (1+\varepsilon)(z_0^{-2} - 3\varepsilon z_0^{-4})]. \tag{27}$$

Пусть

$$-1 < \varepsilon < -\psi_0(1-3\delta)\delta, \qquad \psi_0 = 0{,}8284. \tag{28}$$

В этом случае [9]

$$\begin{gathered}\min \rho_p^2(\varphi) = \rho_p^2(\varphi_0), \qquad \varphi_0 = \frac{\pi}{2} + \arcsin\{\delta[(\varepsilon^2 + 6\delta^2)^{1/2} - \varepsilon]^{-1}\},\\ \rho_p^2(\varphi_0) = 1 + 2\varepsilon + 4\delta t_0 - 4\varepsilon t_0^2 - 8\delta t_0^3 + \varepsilon^2 - 4\delta^2 + 8\varepsilon\delta t_0^3 + 16\delta^2 t_0^4,\\ t_0 = \cos\varphi_0 = -\delta[(\varepsilon^2 + 6\delta^2)^{1/2} - \varepsilon]^{1/2}, \qquad -0{,}2928 < t_0 < -\frac{\delta}{2}.\end{gathered} \tag{29}$$

Тогда из соотношения

$$|z_0|^2 \geqslant \rho_p^2(\varphi_0) \geqslant 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 - \frac{4\delta}{3} - 4\delta^2 > -4\varepsilon \tag{30}$$

найдем значение постоянной μ_1 неравенства (23).

Если $\varepsilon = -\psi_0(1-3\delta)\delta$, то $\rho_p^2(\varphi_0) = \rho_p^2(0)$.

Пусть

$$-\psi_0(1-3\delta)\delta < \varepsilon < 0.$$

В этом случае [9] $\min \rho_p^2(\varphi) = \rho_p^2(0)$. Тогда условие

$$|z_0|^2 \geqslant \rho_p^2(0) = 1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 - 4\delta + 8\varepsilon\delta + 12\delta^2 > -4\varepsilon \tag{31}$$

будет выполняться всегда для малых значений δ.

Пусть

$$0 < \varepsilon < 1.$$

В этом случае [9] $\min \rho_p^2(\varphi) = \rho_p^2(0)$. Тогда из соотношения

$$|z_0|^2 \geqslant \rho_p^2(0) = 1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 - 4\delta + 8\varepsilon\delta + 12\delta^2 > 4\varepsilon \tag{32}$$

найдем значение постоянной μ_2 неравенства (23).

1. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Наук. думка, 1968. – 878 с.
2. *Галин Л. А.* Упругопластические задачи. – Москва: Наука, 1984. – 232 с.
3. *Аннин Б. Д., Черепанов Г. П.* Упругопластическая задача. – Новосибирск: Наука, 1983. – 238 с.
4. *Ивлев Д. Д., Ершов В. Л.* Метод возмущений в теории упругопластического тела. – Москва: Наука, 1978. – 208 с.
5. *Ложкин В. Н., Кодак Н. И.* Условия пластического охвата контура кругового отверстия в задаче Л. А. Галина и в ее обобщениях // Доп. НАН України. – 2003. – № 3. – С. 42–46.
6. *Ложкин В. Н.* Упругопластическое равновесие изгибаемой изотропной полосы с круговым отверстием при учете однозначности перемещений // Там само. – 1996. – № 1. – С. 43–46.

7. *Ложкин В. Н.* Определение упругих и пластических перемещений в изгибаемой изотропной полосе с круговым отверстием // Там само. – 1997. – № 9. – С. 73–77.
8. *Ложкин В. Н.* Упругопластическое равновесие изотропной плоскости с круговым отверстием при неравномерном внешнем нагружении // Там само. – 1998. – № 1. – С. 87–91.
9. *Ложкин В. Н.* Развитие пластической области в изотропной полосе с круговым отверстием при линейном внешнем нагружении // Там само. – 2001. – № 1. – С. 60–64.

*Институт прикладной математики
и механики НАН Украины, Донецк*

Поступило в редакцию 06.04.2007

УДК 539.3

В. А. Меньшиков

Задача механики разрушения для биматериала с круговой межфазной трещиной под воздействием волны растяжения — сжатия

(Представлено академиком НАН Украины А. Н. Гузем)

The paper is devoted to the solution of a fracture mechanics problem for a penny-shaped crack located in the interface of two dissimilar media under the action of a tension-compression wave propagating normally to the interface. The stress intensity factors (the opening mode and the transverse shear mode) are obtained in terms of the strain and displacements fields, which are numerically calculated for the vicinity of the crack front.

Численное решение задачи теории упругости для составного тела с круговой межфазной трещиной под действием гармонической нагрузки получено в [1]. В настоящей работе рассчитаны коэффициенты интенсивности напряжений нормального отрыва и поперечного сдвига в биматериальном теле с круговой трещиной в плоскости раздела упругих сред, находящегося под воздействием волны растяжения — сжатия, которая падает перпендикулярно к плоскости раздела материалов. Коэффициенты получены на основе численного определения полей напряжений и перемещений вблизи фронта трещины.

Постановка задачи. В трехмерном пространстве рассматривается бесконечное тело, состоящее из двух упругих сред, соединенных вдоль общей поверхности Γ^*, которая является плоскостью. Каждое из полупространств однородно, изотропно и характеризуется разными упругими постоянными и плотностями. В теле между полупространствами имеется круговая трещина с границами-берегами Γ^1, Γ^2, характеризующаяся тем, что поверхности берегов принадлежат разным средам, а ее фронт находится на плоскости Γ^*. В составном теле с трещиной распространяется волна растяжения — сжатия в направлении, перпендикулярном к межфазной плоскости. На поверхности Γ^* полагается полное сцепление материалов, т. е. непрерывность перемещений и напряжений. Фронт трещины неподвижен, ее берега перемещаются без взаимного контакта.

Пусть напряженно-деформированное состояние биматериального тела с тещиной описывается уравнениями линейной динамической теории упругости. Тогда, с учетом принципа