

Л.М. Васильев, докт. техн. наук, проф.,
К.В. Цепков, мл.научн.сотр.,
А.В. Пазынич, инж. I кат.,
Д.Л. Васильев, к.т.н.
(ИГТМ НАН Украины)
Ю.А. Костандов, к.т.н., ст. научн.сотр.
(Таврический национальный университет
им. В.И. Вернадского)

АНАЛИЗ СВЯЗИ МЕЖДУ КОНТАКТНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ ПРИ СЖАТИИ ГОРНЫХ ПОРОД

Виконано аналіз рішень задачі про формування контактних напружень і розрахунок граничного стану зразка гірської породи при його одноосному стисненні. Отримано експериментальні залежності зсувного зусилля від величини нормального навантаження. Зроблено висновок про те, що закон Кулона-Амонтона про лінійний зв'язок між контактними дотичними і нормальними напруженнями можна використовувати лише при відносно невеликих значеннях нормального навантаження, а вживання його поблизу граничного стану неправомірне.

THE ANALYSIS OF CONNECTION BETWEEN CONTACT STRAINS AT THE COMPRESSION OF ROCKS

The analysis of decisions of a problem about formation of contact strains and calculation of a limiting state of a rock sample at it monoaxial compression is executed. The experimental dependences of shearing effort from value of normal loading are received. The conclusion was made about that Coulomb-Amonton law about linear connection between contact tangential and normal strains can be used only at rather small values of normal loading and its application near to a limiting state is unauthorized.

Введение

Одним из важнейших направлений современной геомеханики является исследование разрушения в горных породах с целью обеспечения безопасного состояния подземных сооружений, выработок различного назначения, откосов различного происхождения. В связи с этим возникают задачи установления параметров предельного состояния горных пород, которые определяют, как правило, при одноосном сжатии их образцов. Решение подобных задач в значительной степени определяется правильным заданием условий на контактных поверхностях. При сжатии образцов это сводится к заданию связи между возникающими при этом контактными касательными и нормальными напряжениями при обязательном учёте контактного трения, под которым подразумевается касательное сопротивление сдвигу, приведённое к номинальной контактной поверхности. Обычно для описания контактного трения используют закон Кулона-Амонтона, состоящий в пропорциональности касательного и нормального напряжений. Настоящая работа направлена на установление возможности использования этого закона для расчёта параметров предельного состояния образца горной породы при его одноосном сжатии.

Одним из основных параметров, характеризующих механические свойства

горных пород, является их сопротивляемость одноосному раздавливанию, которая определяется при одноосном сжатии образцов правильной формы. В работах [1, 2] представлен аналитический метод расчёта предела прочности образцов горных пород. Учёт закономерности распределения нормальных напряжений на контактной поверхности позаимствован из смежной области – теории обработки металлов давлением при условии выполнения закона Кулона-Амонтона

$$\tau_k = f\sigma_y, \quad (1)$$

где τ_k – контактное касательное напряжение; f – коэффициент внешнего трения; σ_y – нормальное контактное напряжение при одноосном сжатии.

В работе [3] распределение контактных напряжений при деформировании материалов определяется из решения двух дифференциальных уравнений (2) и алгебраического уравнения пластичности (предельного состояния) (3):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\sigma_x - \sigma_y = 2k \sqrt{1 - \frac{\tau_{xy}^2}{k^2}}, \quad (3)$$

где σ_y , σ_x и τ_{xy} – продольные и поперечные нормальные и касательные напряжения в материале соответственно; k – сопротивление материала сдвигу.

Однако учет контактного трения создает непреодолимые трудности при точном интегрировании этих трех уравнений. Вследствие этого при решении практических задач по определению деформирующих усилий приходится вводить определенные упрощения. В работе [3] приведен детальный анализ возможности упрощения уравнений и экспериментально определены границы их применимости в пределах практически допускаемой точности. С этой целью:

- а) задачу приводят к осесимметричной или плоской;
- б) принимают, что нормальные напряжения зависят только от одной координаты, в частности от x , а зависимость касательных напряжений от координаты y принимают линейной.

В результате дифференциальные уравнения упрощаются. Их число сокращается до одного, которое содержит простые производные взамен частных. Контактные касательные напряжения τ_k принимают равными постоянной пластичности k . Тогда второе уравнение в (2) сводят к выражениям $\sigma_x = \sigma_y$ и $d\sigma_x = d\sigma_y$. При этом указывается, что последние выражения рекомен-

дуются применять при условии $\tau_k \geq 0,7$.

Однако напряжения τ_k , как правило, не равны k . Тем более эти напряжения не равны k применительно к образцам горных пород, которые подвергаются согласно ГОСТу предварительной шлифовке. Кроме того, как показано в работе [1], при деформировании горных пород, обладающих внутренним трением, выражение (3) будет представлено в виде (4):

$$\sigma_x - \sigma_y = \frac{2(k + \mu\sigma_y)}{\cos \rho} \left(\sin \rho - \sqrt{1 - \frac{\tau_{xy}^2}{(k + \mu\sigma_y)^2}} \right), \quad (4)$$

где $\rho = \arctg \mu$; ρ и μ – угол и коэффициент внутреннего трения соответственно.

В работах [1, 2] условие $\sigma_x = \sigma_y$ распространено и на случаи, когда τ_k значительно меньше величины сопротивляемости горных пород сдвигу k . В итоге были получены формулы расчёта нормального сжимающего напряжения σ_y по ширине образца [2] (5) и среднего контактного давления (6):

$$\sigma_y = \sigma_{y_0} e^{\frac{fb}{h}} \quad (5)$$

$$p = \sigma_{y_0} \frac{h}{fb} \left(e^{\frac{fb}{h}} - 1 \right). \quad (6)$$

где a и h – ширина и высота образца соответственно.

Примем эти формулы в качестве эталонных.

Несмотря на то, что авторами [1, 2] получена удовлетворительная сходимость результатов, полученных аналитически, с экспериментальными данными, проведём анализ их решения с позиций точной формулировки задачи об одноосном сжатии образца.

Заметим, что касательное напряжение $\tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y)$: 1) равно на контактной поверхности касательному напряжению τ_k , обусловленному трением тела об инструмент; 2) уменьшается при удалении от контактной поверхности; и 3) равно нулю на середине высоты образца вследствие симметрии задачи (рис. 1).

Поэтому будем считать, что

$$\tau_{xy} = \tau_k \left(1 - \frac{2y}{h} \right). \quad (7)$$

Тогда из уравнений (2) и (7) следует:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} = \frac{2\tau_k}{h}. \quad (8)$$

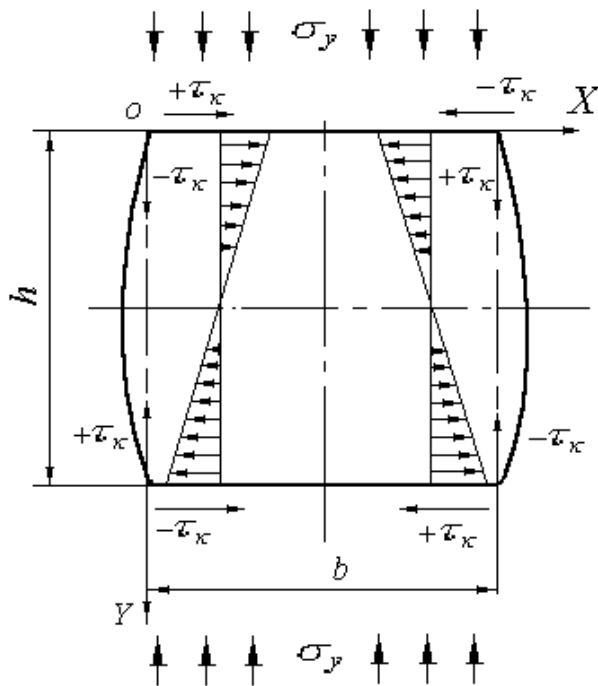


Рис. 1 – Схема формирования контактных напряжений в образце горной породы при наличии внешнего трения

Теперь можно найти связь между производными $\frac{d\sigma_x}{dx}$ и $\frac{d\sigma_y}{dx}$, что и было сделано в работе [4]. С учётом того, что на контактной поверхности выполняется закон Кулона–Амонтона (1), преобразуем выражение (4) к виду

$$\sigma_x = \frac{2(k + \mu\sigma_y)}{\cos \rho} (\sin \rho - \sqrt{1 - b_1^2}) + \sigma_y, \quad (9)$$

где $b_1 = \frac{f\sigma_y}{k + \mu\sigma_y}$ – коэффициент, физический смысл которого состоит в величине отношения составляющих касательного напряжения, возникающих за счёт внешнего контактного трения и внутреннего трения.

Продифференцировав обе части уравнения (9) по x получим:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} = \frac{d\sigma_y}{dx} \left(1 + \frac{2\mu}{\cos \rho} (\sin \rho - \sqrt{1 - b_1^2}) \right) + \frac{db_1}{dx} \frac{2f\sigma_y (1 - \sin \rho \sqrt{1 - b_1^2})}{b_1 \cos \rho \sqrt{1 - b_1^2}}. \quad (10)$$

Учитывая, что

$$\frac{db_1}{dx} = \frac{fk}{(k + \mu\sigma_y)^2} \frac{d\sigma_y}{dx},$$

выражение (10) примет вид:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} = \frac{d\sigma_y}{dx} \left(1 + \frac{2\mu}{\cos \rho} \left(\sin \rho - \sqrt{1 - b_1^2} \right) + \frac{1}{\sigma_y} \frac{2k(1 - \sin \rho \sqrt{1 - b_1^2})}{\cos \rho \sqrt{1 - b_1^2}} \right). \quad (11)$$

Уравнение (11) с учётом (1) и (8) примет вид

$$\left(A + \frac{B}{\sigma_y} \right) \frac{d\sigma_y}{dx} = \frac{2f\sigma_y}{h}, \quad (12)$$

где $A = 1 + \frac{2\mu}{\cos \rho} \left(\sin \rho - \sqrt{1 - b_1^2} \right)$; $B = \frac{2k(1 - \sin \rho \sqrt{1 - b_1^2})}{\cos \rho \sqrt{1 - b_1^2}}$.

После разделения переменных и интегрирования находим

$$A \ln \sigma_y - \frac{B}{\sigma_y} = \frac{2f}{h} x + C.$$

Вводя граничное условие $\sigma_y|_{x=0} = \sigma_{y_0}$, определим постоянную интегрирования C и получим окончательное выражение

$$A \ln(\sigma_y / \sigma_{y_0}) + B \left(\frac{1}{\sigma_{y_0}} - \frac{1}{\sigma_y} \right) = \frac{2f}{h} x. \quad (13)$$

На рис. 2 представлены эпюры напряжений, построенные для σ_y по формуле (13) и для τ_k по формуле, полученной с учётом закона Кулона–Амонтона (14):

$$A \ln(\tau_k / \tau_{k_0}) + Bf \left(\frac{1}{\tau_{k_0}} - \frac{1}{\tau_k} \right) = \frac{2f}{h} x, \quad (14)$$

где $\tau_{k_0} = f\sigma_{y_0}$.

Определим среднее давление на контактной поверхности:

$$P = 2 \int_0^{b/2} \sigma_y dx = \frac{h}{f} \int_{\sigma_0}^{\sigma_y} \left(A + \frac{B}{\sigma_y} \right) d\sigma_y = \frac{h}{f} \left(A(\sigma_y - \sigma_{y_0}) + B \ln(\sigma_y / \sigma_{y_0}) \right). \quad (15)$$

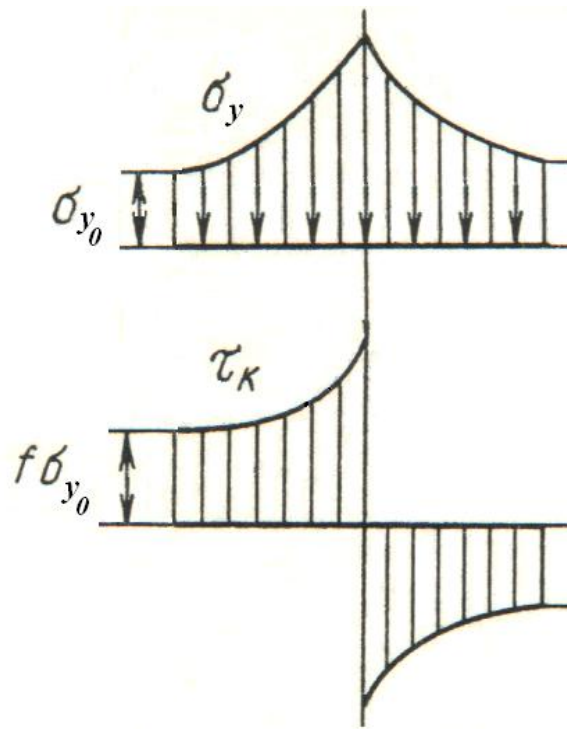


Рис. 2 – Эпюры контактных нормальных σ_y и касательных τ_k напряжений при $\tau_k = f\sigma_y$

Численное решение уравнения (15) получено в системе MathCAD.

На рис. 3 показаны зависимости нормальных напряжений и средних давлений, рассчитанных по эталонным формулам (5) и (6) и формулам (14) и (16), полученным в строгой постановке задачи. Как видно из этих рисунков, имеет место существенное различие в значениях показателя прочности. Более наглядно это видно из рис. 4, на котором приведены расчётные данные соотношения средних давлений.

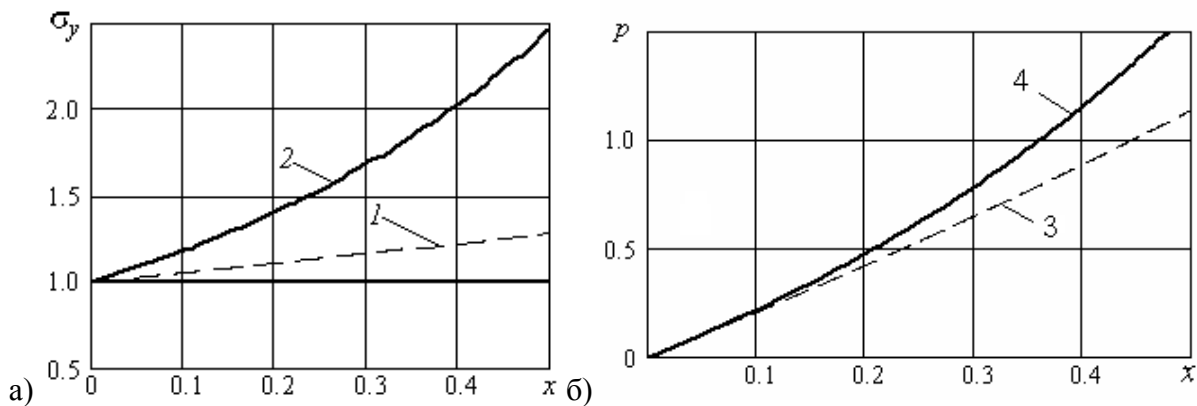


Рис. 3 – Распределение сжимающих нормальных напряжений (а) и среднего давления (б) на контактной поверхности: 1 – по эталонной формуле (5), 2 – по формуле (14) при $\mu = 1,0$; $f = 0,25$; 3 – по эталонной формуле (6); 4 – по формуле (16) при $\mu=1,0$; $f=0,25$

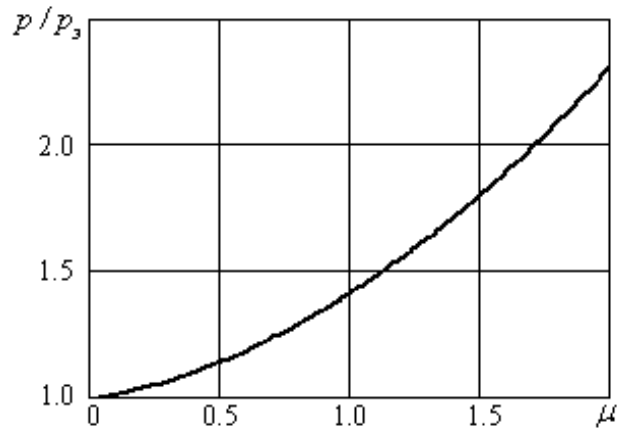


Рис. 4 – Зависимость отношения удельных давлений, рассчитанных по формуле (16) и по эталонной формуле (6) от коэффициента внутреннего трения μ

Исходя из вышеуказанного следует, что закон Кулона-Амонтона о линейной связи между контактными касательными и нормальными напряжениями при одноосном сжатии образцов горных пород не выполняется.

Следует отметить, что и в работе [3] считается, что связь между контактными касательными и нормальными напряжениями может отличаться от концепции Кулона-Амонтона.

Экспериментальные исследования

Постановка и решение рассмотренной выше задачи, как и многих других задач о предельном состоянии тел с учетом внутреннего и внешнего трения требует экспериментального обоснования и проверки. Это связано с установлением как параметров предельного состояния нагружаемых тел, так и влияния условий нагружения на проявление трения в формировании их напряженно-деформированного состояния. Из этого следует необходимость решения конкретной задачи: экспериментального определения зависимостей максимального касательного контактного напряжения и коэффициента внешнего (контактного) трения от величины нормальной нагрузки.

Несмотря на то, что значения коэффициентов контактного трения различных пар материалов сегодня можно найти в различной литературе, необходимо отметить их значительный разброс. Объяснить это можно различием методик и условий определения этих значений (степень параллельности, плоскостности и шероховатости контактирующих поверхностей, величина нормальной нагрузки, однородность нормальных напряжений по поверхности контакта и т.д.). Поэтому для возможности корректной постановки и проверки решения фундаментальных задач представляется целесообразным определять коэффициенты трения заданных пар материалов в тех же условиях и на тех же сериях образцов, которые используются при исследовании их предельного состояния.

В связи с этим была разработана следующая методика определения зависимостей максимального касательного контактного напряжения τ_k и коэффи-

циента контактного трения f , определяемого согласно закону Кулона-Амонтона, от величины сжимающей нагрузки. Согласно этой методике образец 1, (рис. 5), изготовленный из исследуемого материала в виде прямоугольного параллелепипеда размерами 50 x 50 x 20 мм, располагали между плоскими поверхностями двух стальных плит 2 и подвергали одноосному сжатию силой N между этими плитами. Сжатие осуществляли с помощью испытательной машины УМЭ-10ТМ через упругий элемент 3 с тензометрическим мостом. Величину сжатия доводили до значения N_0 . После этого на образец 1 воздействовали сдвигающей нагрузкой F , ортогональной силе N за счет вращения винта 4 в опоре 5, жестко закрепленной относительно плиты 2. Воздействие осуществляли через упругий элемент 6 с тензометрическим мостом. Сигналы от тензометрических мостов упругих элементов 3 и 6 подаются в регистрирующее устройство 7, представляющее собой аналогово-цифровой преобразователь ADA-1292 и устройство памяти компьютера. При этом результат регистрации изменяющихся во времени t величин $N(t)$ и $F(t)$ отображается в реальном времени на мониторе компьютера в виде графиков. Сдвигающую нагрузку $F(t)$ увеличивали до значения $F_c(t_c)$, при котором происходил сдвиг образца 1 относительно плит 2, которое определяли по излому кривой $F(t)$. Затем устанавливали соответствующее этому моменту времени t_c значение силы реакции $N_c(t_c)$, которое превышало первоначальную силу сжатия N_0 за счет действия на образец 1 нагрузки $F_c(t_c)$. Коэффициент контактного трения определяли по формуле

В приведенной формуле коэффициент 2 в знаменателе учитывает то, что сдвигающая сила F приложена к двум поверхностям образца, контактирующим с плитами нагружающего устройства.

$$f = \frac{F_c(t_c)}{2N_c(t_c)}.$$

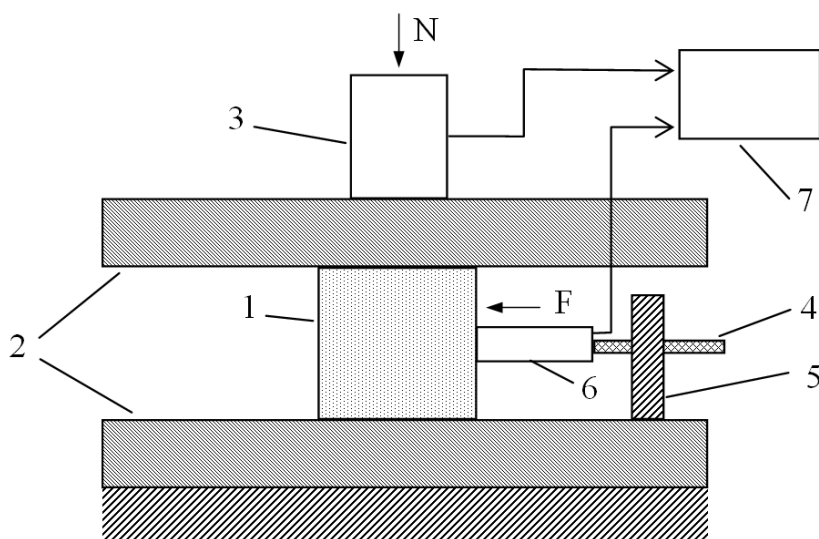


Рис. 5—Схема определения зависимости сдвигающих усилий F_c от нормальной нагрузки N_c

При необходимости изучения зависимости сдвигающей нагрузки от нормальной при контакте образца с иными, нежели сталь, материалами, достаточно к стальным плитам приклеить пластины из интересующих материалов и сжатие образца осуществлять между ними.

На рис. 6 и рис. 7 приведены результаты определения зависимости сдвигающего усилия F_c от силы реакции N_c , равной по модулю величине нормальной нагрузки, для различных пар материалов.

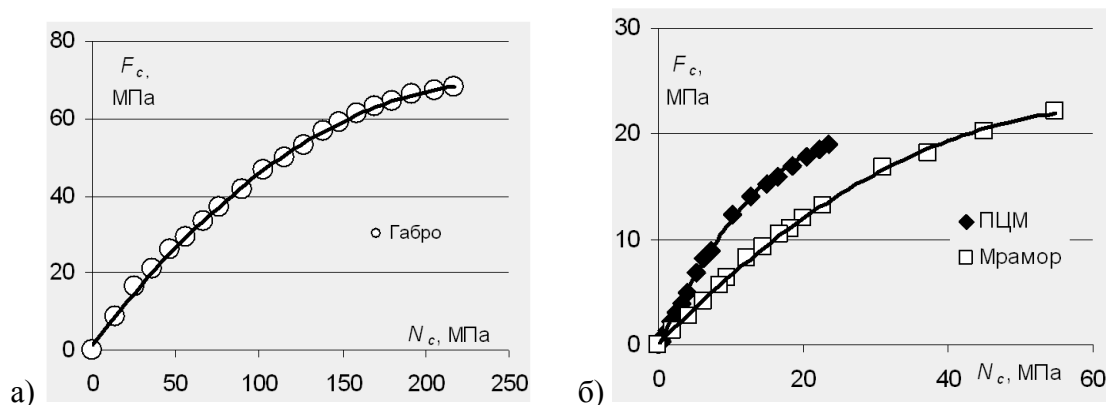


Рис. 6 – Экспериментальные зависимости сдвигающего усилия F от нормальной нагрузки N_c при сдвиге относительно стальных плит образцов, выполненных из: а) песчано-цементного материала (ПЦМ) и мрамора; б) габро

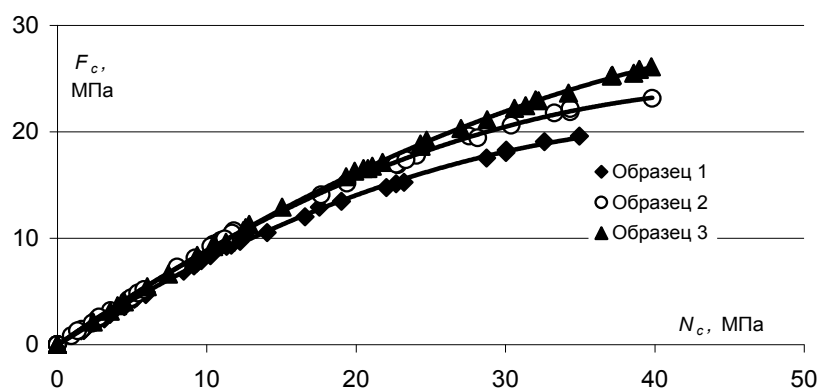


Рис. 7 – Экспериментальные зависимости сдвигающего усилия F_c от нормальной нагрузки P при сдвиге относительно текстолитовых пластин образцов, выполненных из песчано-цементных материалов с различным составом

Из полученных результатов следует, что зависимость сдвигающего усилия F_c от нормальной нагрузки N_c для материалов, значительно отличающихся по составу, структуре и прочностным характеристикам, отличается от линейной тем значительней, чем выше значения N_c . Это означает, что закон Кулона-Амонтона можно использовать для описания напряженно-деформированного состояния нагруженных тел лишь при относительно небольших значениях нормальной нагрузки, а применение его вблизи предельного состояния не правомочно.

Заклучение

В результате анализа решения задачи о формировании контактных напряжений и расчете предельного состояния образца горной породы при его одноосном сжатии показано, что использование закона Кулона-Амонтона о линейной связи между контактными напряжениями приводит к многократному завышению предельных сжимающих нагрузок по сравнению с экспериментальными данными. В совокупности с экспериментально полученными зависимостями сдвигающего усилия от величины нормальной нагрузки это даёт основание предположить, что закон линейной связи между контактными касательными и нормальными напряжениями не выполняется при взаимодействии плиты пресса с образцами горных пород.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев Д.Л. Закономерности формирования горизонтальных нормальных напряжений в массиве горных пород / Д.Л. Васильев // Геотехническая механика: Межвед. сб. науч. работ. – Днепропетровск, 2001. – Вып. 29. – С. 17–21.
2. Васильев Л.М. Метод расчёта прочности горных пород на одноосном сжатии при линейной связи между контактными напряжениями / Л.М. Васильев, Д.Л. Васильев // Геотехническая механика: Межвед. сб. науч. тр. – Днепропетровск, 2003. – Вып. 42. – С. 73-80.
3. Сторожёв М.В. Теория обработки металлов давлением / М.В. Сторожёв, Е.А. Попов. – М.: Машиностроение, 1977. – 423 с.
4. О правомочности применения закона о линейной связи между контактными напряжениями для расчёта предела прочности горных пород / Л.М. Васильев, К.В. Цепков, А.В. Пазынич [и др.] // Научный вестник : Сб. науч. тр. – Днепропетровск: НГУ, 2008. – № 3. – С. 3-6.

Рекомендовано до публікації д.т.н. М.С. Четвериком 18.08.09