

1. *Дорофеев А. Л., Казамапов Ю. Г.* Электромагнитная дефектоскопия. – Москва: Машиностроение, 1980. – 232 с.
2. *Щербинский В. Г., Феоктистов В. А., Полевик В. А. и др.* Методы дефектоскопии сварных соединений. – Москва: Машиностроение, 1987. – 336 с.
3. *Колчин А. В.* Датчики средств диагностирования машин. – Москва: Машиностроение, 1984. – 120 с.
4. *Никитин А. И., Бабушкина Л. В.* Решение задачи о вихревых токах в проводящей сфере, расположенной в поле накладного преобразователя // Дефектоскопия. – 1988. – № 12. – С. 70–77.
5. *Морозов Б. М., Портникова Р. Г., Гончаров Э. Н. и др.* Контроль качества продукции машиностроения. – Москва: Изд-во стандартов, 1974. – 448 с.
6. *Бессонов Л. А.* Теоретические основы электротехники. – Москва: Высш. шк., 1978. – 528 с.
7. *Электротехника* / Под ред. проф. В. С. Пантюшина. – Москва: Высш. шк., 1976. – 560 с.
8. *Ступель Ф. А.* Электромеханические реле. – Харьков: Харьк. гос. ун-т, 1956. – 355 с.

*Институт проблем машиностроения  
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков*

*Поступило в редакцию 13.10.2006*

УДК 531.37:531.396:537.634:537.612.4:519.6

© 2007

**Л. В. Григор'єва, В. В. Козоріз, О. В. Козоріз,  
член-кореспондент НАН України С. І. Ляшко**

## **Про динамічну задачу двох вільних циліндричних магнітів та її Maple-моделювання**

*A nonlinear system of ordinal differential equations of the 18-th order is derived, the Cauchy problem is solved, and phase portraits are constructed by means of the Maple-software.*

Задача двох тіл розглядалася, починаючи з багатьох класичних робіт (див., наприклад, [4, 5]), без урахування протяжності тіла у полі центральних сил, коли потенціальна енергія залежить лише від відстані. В подальшому, зокрема для задач космічної механіки [8, 1], враховувалася протяжність тіла (супутника) введенням його шести степенів свободи. Центральний характер гравітаційної та електричної взаємодії, а також інші параметричні обмеження (наприклад, мализна розмірів супутника відносно розмірів Землі) зумовлюють декомпозицію динамічної системи, коли рівняння, що відповідають за поступальний рух вільного тіла, та рівняння обертання тіла навколо його точки не залежать одні від одних. Задача двох тіл у магнітному полі ускладнена нецентральністю магнітної взаємодії. Поступальний рух істотно впливає на обертальний рух вільного тіла навколо точки і, навпаки, зміна орієнтації викликає значні зміни в поступальному русі. Перші спроби задачі двох магнітних тіл були здійснені в роботах І. Е. Тамма [10], який встановив принципову особливість магнітних планетарних конфігурацій. Ця особливість, названа “проблемою  $1/R^3$ ”, що зводиться до неможливості стійкої магнітної конфігурації з магнітною взаємодією, досліджувалася в роботах В. Л. Гінзбурга [2] і інших авторів.

Пізніше, на основі методів функцій Ляпунова [6] та теорії стійкості відносно частини змінних, для деяких планетарних геометричних форм магнітів була вперше обґрунтована можливість стійких планетарних магнітних конфігурацій [3].

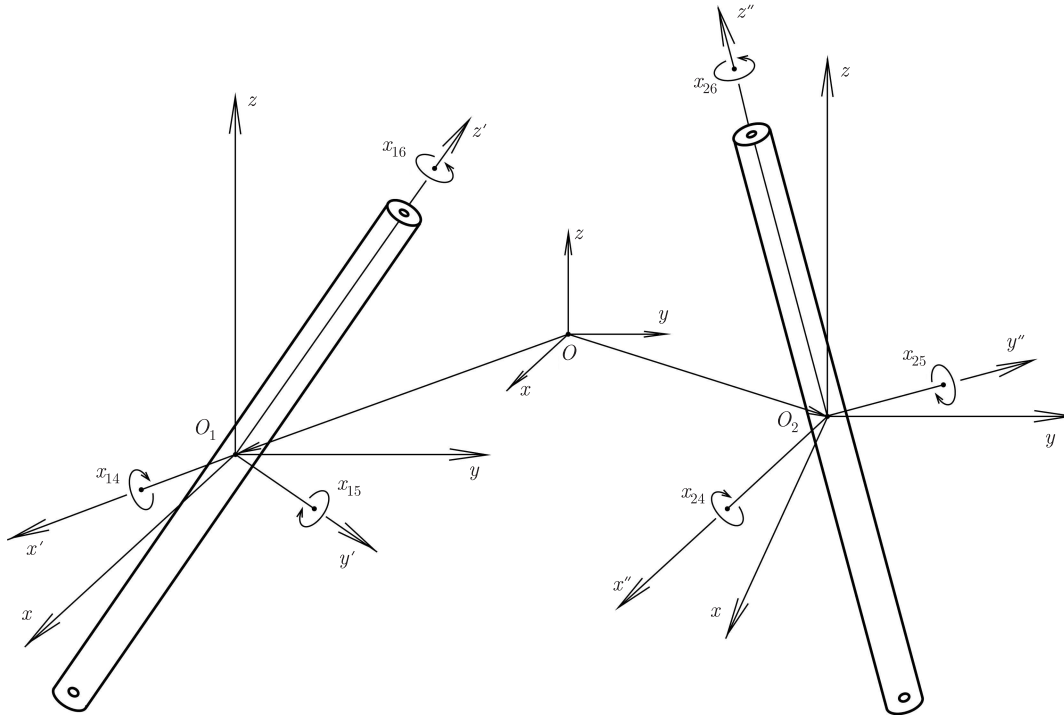


Рис. 1. Два вільні циліндричні магніти

В загальному випадку задача двох магнітів, крім проблем інтегрування нелінійних систем високого порядку, ускладнена необхідністю визначення магнітних сил залежно від відносного розміщення та орієнтації двох магнітів.

Нами розглянутий частинний випадок довгих циліндричних магнітів, однорідно намагнічених вздовж своїх осей. В класичній роботі В. Смайта [9] показано, що магнітне поле на осі довгого циліндра еквівалентне полю двох однакових за величиною і різних за знаком точкових магнітних зарядів на торцях циліндра (“тантелі”). Цей результат підсилено еквівалентністю поля не тільки на осі, а й магнітної взаємодії взагалі [3]. Тому взаємодію довгих циліндричних магнітів зручно моделювати взаємодією точкових зарядів, розташованих на магнітній осі кожного магніту і віддалених один від одного на кінцеву відстань для обох магнітів. Це приводить до формули потенціальної енергії магнітної взаємодії у вигляді

$$U = \chi^2 \left( -\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right), \quad (1)$$

де  $\chi$  — величина заряду.

Якщо  $Oxyz$  — нерухомий інерціальний тригранник, відносно якого розглядається рух двох вільних магнітів, а  $O_1x'y'z'$  і  $O_2x''y''z''$  — тригранники, зв'язані з вільними магнітами так, що їх осі направлені вздовж головних центральних осей інерції вільних тіл (рис. 1), то в (1) відстані  $R_i$  між магнітними зарядами на кінцях циліндрів визначаються з векторних рівностей, очевидних з рис. 1:

$$\vec{R}_i = \vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1 + \delta_i \vec{l}_2 + (-1)^i \vec{l}_1, \quad \delta_i = 1, 1, -1, -1, \quad i = 1, 2, \dots, 4, \quad (2)$$

де  $\vec{\rho}_1$  та  $\vec{\rho}_2$  — радіуси-вектори центрів мас циліндрів;  $\vec{l}_1$  та  $\vec{l}_2$  — вектори з початком в центрах мас циліндрів і кінцем в точках розташування зарядів.

Нехай орієнтацію тригранників, зв'язаних з вільними тілами, відносно нерухомої системи відліку описано кутами Ейлера-Крилова  $x_{14}, x_{15}, x_{16}$  та  $x_{24}, x_{25}, x_{26}$  ( $x_{14}, x_{24}$  — кути крену,  $x_{15}, x_{25}$  — кути тангажу,  $x_{16}, x_{26}$  — кути ширяння відповідно для першого і другого циліндра).

Тоді якщо в (2) врахувати відомі матриці направляючих косинусів (див., наприклад, [7, (7.12.1)]), записані відносно кутів Ейлера-Крилова, вважати довжини циліндрів  $2l_1 = 2l_2 = 2l$  та визначити  $\vec{\rho}_1$  і  $\vec{\rho}_2$  через декартові координати, матиме місце співвідношення для безрозмірних відстаней між зарядами  $r_i$ :

$$r_i = \frac{R_i}{l} = [((x_2 - x_1) + \delta_i b_{31} + (-1)^i a_{31})^2 + ((y_2 - y_1) + \delta_i b_{32} + (-1)^i a_{32})^2 + ((z_2 - z_1) + \delta_i b_{33} + (-1)^i a_{33})^2]^{1/2}, \quad i = 1, 2, \dots, 4, \quad (3)$$

де  $x_1, y_1, z_1$  та  $x_2, y_2, z_2$  — безрозмірні декартові координати (утворені діленням декартових координат центрів мас циліндрів на половину довжини циліндра  $l$ ),  $a_{3j}$  та  $b_{3j}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) — компоненти матриць направляючих косинусів:

$$\begin{aligned} a_{31} &= \sin x_{15}, & a_{32} &= -\sin x_{14} \cos x_{15}, & a_{33} &= \cos x_{14} \cos x_{15}, \\ b_{31} &= \sin x_{25}, & b_{32} &= -\sin x_{24} \cos x_{25}, & b_{33} &= \cos x_{24} \cos x_{25}. \end{aligned} \quad (4)$$

Тоді з (1) і (3), (4) безрозмірну потенціальну енергію можна записати у вигляді

$$u = U \frac{l}{\chi^2} \left( -\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} \right). \quad (5)$$

Для руху центрів мас системи (точок  $O_1$  і  $O_2$ ) можна записати рівняння другого закону Ньютона:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{\chi^2}{l^3 w^2} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = -\frac{\chi^2}{l^3 w^2} \frac{\partial u}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = -\frac{\chi^2}{l^3 w^2} \frac{\partial u}{\partial z_i}, \quad (6)$$

де  $w$  — характерна кутова частота;  $t$  — безрозмірний час;  $x_i, y_i, z_i$  — безрозмірні декартові координати центру мас, а  $m_i$  — маса  $i$ -го вільного тіла.

Враховуючи те, що потенціальна енергія (5) залежить лише від  $(x_2 - x_1)$ ,  $(y_2 - y_1)$ ,  $(z_2 - z_1)$ , маємо:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = 0, \quad m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = 0, \quad m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} = 0. \quad (7)$$

У випадку розміщення точки  $O$  у центрі інерції системи

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0, \quad m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0, \quad m_1 z_1 + m_2 z_2 = 0. \quad (8)$$

У подальшому покладемо маси двох циліндрів рівними і  $m_1 = m_2 = m$ . Якщо

$$X = x_2 - x_1, \quad Y = y_2 - y_1, \quad Z = z_2 - z_1, \quad (9)$$

динамічними змінними будуть відповідно безрозмірні параметри  $X, Y, Z$  та  $x_{ij}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 4, 5, 6$ .

Тоді можна одержати такі вихідні рівняння динамічної системи двох вільних магнітних циліндрів:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = -A \frac{\partial u}{\partial X}, \quad \frac{d^2 Y}{dt^2} = -A \frac{\partial u}{\partial Y}, \quad \frac{d^2 Z}{dt^2} = -A \frac{\partial u}{\partial Z}, \quad (10)$$

$$\frac{dn_{i1}}{dt} + k_i n_{i3} n_{i2} = -A_i \frac{\partial u}{\partial x_{i4}}, \quad \frac{dn_{i2}}{dt} - k_i n_{i3} n_{i1} = -A_i \frac{\partial u}{\partial x_{i5}}, \quad \frac{dn_{i3}}{dt} = 0, \quad (11)$$

$$n_{i1} = \cos x_{i5} \cos x_{i6} \frac{dx_{i4}}{dt} + \sin x_{i6} \frac{dx_{i5}}{dt}, \quad n_{i2} = -\cos x_{i5} \sin x_{i6} \frac{dx_{i4}}{dt} + \cos x_{i6} \frac{dx_{i5}}{dt}, \quad (12)$$

$$n_{i3} = \sin x_{i5} \frac{dx_{i4}}{dt} + \frac{dx_{i6}}{dt}, \quad i = 1, 2,$$

де  $A = \chi^2 (Ml^3 w^2)^{-1}$  — параметр, що позначає відношення характерної магнітної енергії до кінетичної енергії тіла  $Ml^2 w^2$ , а  $M$  — зведена маса:  $M = 1/2m$ ;  $k_i = (I_{i3} - I_{i1})I_{i1}^{-1}$  — параметри, що визначають співвідношення між головними центральними моментами інерції вільних магнітів, отримані з урахуванням їх динамічної симетрії (тобто враховано, що  $I_{i1} = I_{i2}$ ),  $I_{i1}, I_{i3}$  — центральні моменти інерції тіла відносно осей абсцис і аплікват  $i$ -го циліндра;  $A_i = \chi^2 I_{i1}^{-1}$  — параметри з (11).

Перші три рівняння (10) є другим законом Ньютона для координат поступального руху  $X, Y, Z$ . Рівняння (11) є динамічними рівняннями Ейлера, що зв'язують проекції векторів кутового прискорення вільних магнітів на зв'язані з ними осі та головні моменти магнітних сил відносно тих же осей (див., наприклад, [4, (36.4)]). Останні шість рівнянь (12) — кінематичні рівняння Ейлера, записані для кутів Ейлера–Крилова, — пов'язують складові векторів безрозмірної кутової швидкості  $n_{i1}, n_{i2}, n_{i3}$   $i$ -го тіла за напрямками зв'язаних з ним декартових осей координат та похідні за часом кутів Ейлера–Крилова (див., наприклад, [7, (7.16.2)]).

Отримана система нелінійних диференціальних рівнянь 18-го порядку з урахуванням (3) і (5) визначає характер динамічної поведінки двох вільних магнітів. Вона є громіздкою і складною для аналізу. Відомі аналітичні методи не дозволяють отримати загальний розв'язок.

Застосування чисельних методів, реалізованих у комп'ютерній системі символічної математики Maple10 [11], дає можливість одержати розв'язки для проблеми Коші і встановити деякі нові, на наш погляд, властивості.

Спочатку доцільно запропонувати Maple-процедури, що дають вираз потенціальної енергії системи:

```
> get_dist_vector := proc(dist_vector)
local i, d;
for i from 1 by 1 while i < 5 do
if i < 3 then d := 1 else d := -1 end if;
dist_vector[i] := ((X(t) + (d * b[3, 1] + (-1)^i * a[3, 1]))^2 + (Y(t) +
(d * b[3, 2] + (-1)^i * a[3, 2]))^2 + (Z(t) + (d * b[3, 3] + (-1)^i * a[3, 3]))^2)^(1/2);
end do;
end proc;
> r := Vector[row](4) : get_dist_vector(r) :
> get_potential_energy := proc()
return - 1/r[1] + 1/r[2] + 1/r[3] - 1/r[4];
end proc;
```

Якщо обмежитися задачею стійкості планетарної конфігурації, доцільно при встановленні початкових умов задачі Коші врахувати умову врівноважування магнітних сил і відцентрової сили [3, (9.3)], що у введених позначеннях і при  $X(0) = 2a$  буде мати вигляд

$$\dot{Y}(0) = \sqrt{2Aa \frac{\partial u}{\partial X} \Big|_0}. \quad (13)$$

Процедура, що за вхідними матрицями направляючих косинусів, вектором відстані, векторами кутової швидкості та початковою умовою для  $X(0)$  будує нелінійну систему (10)–(12), виглядає так:

```

> get_solve := proc(a_Krylov, b_Krylov, R, N1, N2, X_0)
local Omega1, Omega2, Iner1, Iner2, T, u, V, Y_0:
global L, a, b, eq, A1, k1, k2:
a := get_angle_matrix(a_Krylov, false):
b := get_angle_matrix(b_Krylov, false):
V := VectorCalculus:-diff(R, t):
Omega1 := get_rot_veloc_vector(a_Krylov, false):
Omega2 := get_rot_veloc_vector(b_Krylov, false):
Iner1 := Vector[row](3):
Iner2 := Vector[row](3):
T := get_kinetic(V):
u := get_potential_energy():
L := T - u:
A1 := 2*q2/m/l^2:
k1 := q^2/1:
k2 := k1:
Iner1[1] := m*l^2/12:
Iner1[2] := Iner1[1]:
Iner1[3] := m*rr^2/2:
Iner2[1] := Iner1[1]:
Iner2[2] := Iner1[1]:
Iner2[3] := Iner1[3]:
Digits := 5:
Y_0 := evalf(subs(X = X_0, Y(t) = 0, Z(t) = 0, x1(t) = 0, x2(t) = 0, x1s(t) = 0, x2s(t) = 0,
(diff(subs(X(t) = X, u), X))*A1*X_0)^(1/2)):
Digits := 10:
eq := Vector[row](nops(R)+nops(a_Krylov)*2+nops(b_Krylov)*2):
get_equations_forw(u, Iner1, Iner2, N1, N2, Omega1, Omega2):
return dsolve(eq[1], eq[2], eq[3], eq[4], eq[5], eq[6], eq[7], eq[8], eq[9], eq[10], eq[11], eq[12],
eq[13], eq[14], eq[15], X(0) = X_0, D(X)(0) = 0, Y(0) = 0, Z(0) = 0, D(Y)(0) = Y_0,
D(Z)(0) = 0, a_Krylov[1](0) = 0, a_Krylov[2](0) = 0, a_Krylov[3](0) = 0,
b_Krylov[1](0) = 0, b_Krylov[2](0) = 0, b_Krylov[3](0) = 0, N1[1](0) = 0, N1[2](0) = 0,
N1[3](0) = 20, N2[1](0) = 0, N2[2](0) = 0, N2[3](0) = 20, X(t), Y(t), Z(t), a_Krylov[1](t),
a_Krylov[2](t), a_Krylov[3](t), b_Krylov[1](t), b_Krylov[2](t), b_Krylov[3](t), N1[1](t),
N1[2](t), N1[3](t), N2[1](t), N2[2](t), N2[3](t), type = numeric, maxfun = 100000):
end proc:

```

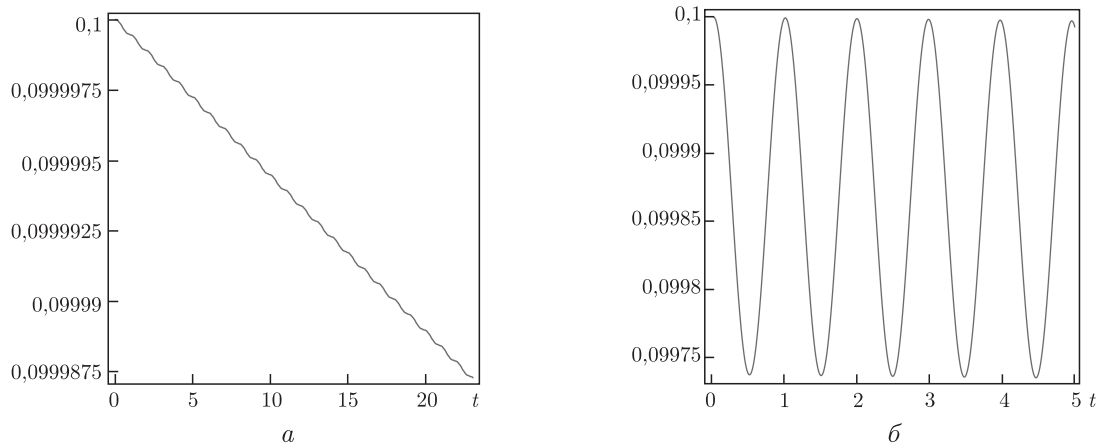


Рис. 2. Зміна радіуса орбіти з часом (а); при малому збуренні орбітальної швидкості (б)

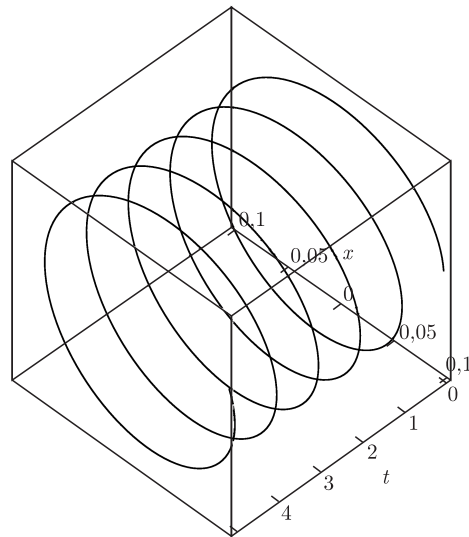


Рис. 3. Графік розв'язків  $X(t)$ ,  $Y(t)$

У випадку високих швидкостей власного обертання вільних магнітів і нульових початкових збурень кутів Ейлера–Крилова, проєкції кутових швидкостей і аплікати, для вибраних  $\chi = 1$ ,  $m = 1$ ,  $l = 10$ ,  $X(0) = 0,1$ , а також радіуса циліндра 0,01 команда

```
> s := get_solve(a_Krylov, b_Krylov, R, N1, N2, 0.1):
with(plots):
```

```
odeplot(s, [t,(X(t)^2+Y(t)^2)^(1/2)], t = 0..20, numpoints = 500)
```

дає графік зміни радіуса орбіти з часом (рис. 2, а). Графік вказує на мале відхилення від початкового на досить тривалому проміжку часу, а при нехтуванні накопиченої чисельної похибки його можна прийняти за пряму.

При наданні малого збурення швидкості по ординаті (задане зменшенням точності при обчисленні  $\dot{Y}(0)$  до трьох знаків) графік на рис. 2, б вказує на мале обмежене коливання радіуса.

На рис. 3 показано графік розв'язків для  $X(t)$ ,  $Y(t)$ , на рис. 4 — фазовий портрет куту крену першого циліндра — радіус орбіти при збуренні аплікати.

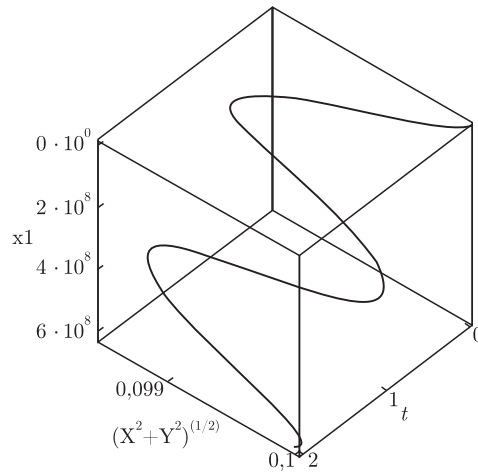


Рис. 4. Фазовий портрет кут крену першого циліндра — радіус орбіти при збуренні аплікати

Можна продемонструвати, що при збільшенні відстані між циліндричними магнітами межі стійкості звужуються.

В [3, с. 110] методом функцій Ляпунова визначено умову стійкості планетарної системи двох циліндричних магнітів. Методи системи символічної математики Maple, як це демонструє проведений аналіз, значно розширюють можливості аналізу складних нелінійних динамічних систем високого порядку.

1. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. — Москва: Наука, 1965. — 416 с.
2. *Гинзбург В. Л.* Теория мезона и ядерные силы // Пробл. теорет. физики (Памяти И. Е. Тамма). — Москва: Наука, 1972. — С. 192–198.
3. *Козорез В. В.* Динамические системы магнитно взаимодействующих свободных тел. — Киев: Наук. думка, 1981. — 140 с.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика. Изд. 3-е. — Москва: Наука, 1973. — 208 с.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. Изд. 5-е. — Москва: Наука, 1967. — 460 с.
6. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. — Москва; Ленинград: Гостехиздат, 1950. — 472 с.
7. *Парс Л. А.* Аналитическая динамика. — Москва: Наука, 1971. — 636 с.
8. *Румянцев В. В., Озиранер А. С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. — Москва: Наука, 1987. — 256 с.
9. *Смайт В.* Электростатика и электродинамика. — Москва: Изд-во иностр. лит., 1954. — 604 с.
10. *Тамм И. Е.* Движение мезона в электромагнитных полях // Докл. АН СССР. — 1940. — **29**, № 8/9. — С. 551–554.
11. *www.maplesoft.com.*

Київський національний університет  
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 07.03.2007