

УДК 539.3

УТОЧНЕНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ С. П. ТИМОШЕНКА ДЛЯ ОРТОТРОПНОЇ БАЛКИ НА ЖОРСТКІЙ ОСНОВІ

В. І. ШВАБ'ЮК, Я. М. ПАСТЕРНАК, С. В. РОТКО

Луцький національний технічний університет

Отримано розв'язок задачі для частково опертої на абсолютно жорстку основу композитної (ортотропної) балки під рівномірно розподіленим навантаженням. Для розрахунку використана уточнена модель балок, що враховує деформації поперечного зсуву та обтиснення. Одержано рівняння для визначення розміру області контакту, а також формули для розрахунку контактної тиску жорсткої основи на зовнішню поверхню балки. Числові результати уточненої моделі для ізотропного та ортотропного матеріалів порівняно з відповідними класичної теорії, зсувної моделі балок і плоскої задачі теорії пружності.

Ключові слова: *уточнена модель балки, поперечний зсув і обтиснення, контактний тиск, область контакту, жорстка основа.*

Задачу про контакт частково опертої на жорстку основу балки розв'язав С. П. Тимошенко [1] у поставі класичної теорії балок Кірхгофа. На основі аналізу результатів досліджень подібну методику застосували також В. С. Гудрамович та В. І. Моссаковський [2], розглядаючи взаємодію пружного кільця, що підкріплювало оболонку, з абсолютно жорсткою основою.

Для уточнення розв'язку задачі, одержаного С. П. Тимошенко і В. І. Феодосєєвим [3], використовували (з урахуванням деформації зсуву) теорію балок, а Л. Кір та М. Сільва [4] її розглядали як мішану задачу теорії пружності для напівсмуги.

Нижче застосовано уточнену модель балок [5], що враховує, крім деформації поперечного зсуву, ще й поперечне обтиснення. Одержані за цією моделлю результати порівняно із додатково знайденим (за методом граничних елементів (МГЕ)) числовим розв'язком. Подібну задачу, коли балка приклеєна до основи, розв'язали [6] за допомогою теорії пластин Тимошенка з додатковим урахуванням обтиснення.

Постава задачі. Розглянемо симетричний згин балки довжиною $2l$ під дією власної ваги $q = 2P/2l$ та сил P_1 , прикладених до правого та лівого кінців, що піднімають їх. Середня частина балки лежить на жорсткій основі та знаходиться під дією власної ваги q та контактної тиску $p(x)$. Вважаємо, що кожна із сил P_1 має бути менша, ніж половина ваги правої чи лівої частин балки – $P = ql$. Необхідно визначити розподіл тиску $p(x)$ у зоні контакту та розмір області контакту $2a$ балки з жорсткою основою, коли кожна з сил $P_1 = P/3$. Враховуючи симетричність задачі, розглянемо рівновагу тільки правої її половини (рис. 1а).

Тимошенко цю задачу розв'язав, припускаючи, що контактний тиск $p(x)$ під балкою є сталий і дорівнює $q = P/l$, а на межі дотику основи балки з жорсткою поверхнею (точка A) для задоволення умов рівноваги мусить **виникати**

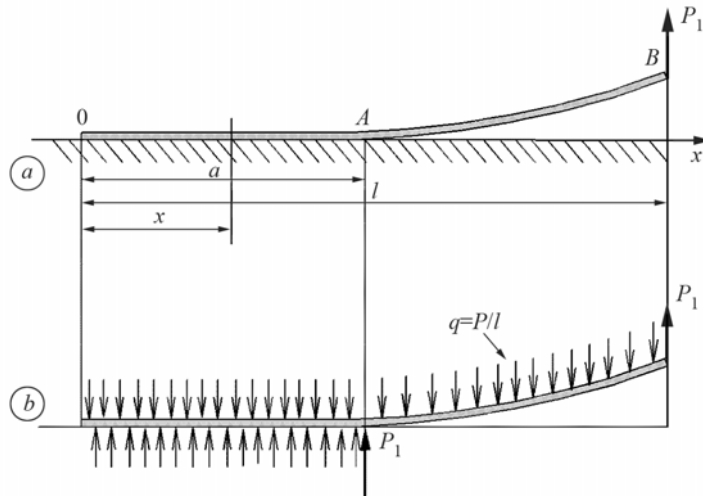


Рис. 1. Схема навантаження половини балки за моделлю Тимошенка.

Fig. 1. The loading scheme for a half of a beam by Tymoshenko's model.

реакція $R = P_1$ (рис. 1b). З'ясовано, що для $P_1 = P/3$ розмір області контакту балки з жорсткою основою $a = l/3$, та визначено переміщення вільного кінця балки. Але такі припущення суперечливі, бо за гладкого контакту контактний тиск і уявна реакція на межі контакту мають дорівнювати нулю.

В. І. Феодос'єв [2] ці суперечності пояснив вибором розрахункової схеми. Він запропонував, крім згинальної жорсткості, враховувати ще й зсувні деформації у поперечних перерізах балки. За такого **уточнення зникає** зосереджена сила на межі контакту балки з жорсткою основою, але з'являється нова вже на лівому кінці половини балки. Контактний тиск $p(x)$ перестає бути сталим уздовж зони контакту і його описують гіперболічні функції. Такий розподіл тиску відповідає розв'язкам контактних задач для балок і пластин, рівняння згину яких враховують тільки деформації поперечного зсуву. Тому розв'язок В. І. Феодос'єва також має недоліки, притаманні "зсувним" теоріям балок і пластин [7].

Розв'язок задачі на основі уточненої моделі балок. Щоб позбутися згаданих недоліків, використаємо рівняння уточненої моделі балок [5], що враховує, крім деформації поперечного зсуву, ще й поперечне обтиснення:

$$EIw^{IV} = q_2 - \varepsilon_1 h^2 q_2^{II} - \varepsilon_2 h^4 q_2^{IV}, \quad (1)$$

де $\varepsilon_1 = \frac{1}{10} \left(4 \frac{E}{G'} - 3\nu'' \right)$; $\varepsilon_2 = \frac{1}{20} \left(\frac{E}{E'} - \nu'' \frac{G'}{E'} \right)$; $I = 2h^3/3$; $q_2 = q^+ + q^-$; E, E', G', ν''

– модулі пружності та коефіцієнт Пуассона матеріалу балки у поздовжньому та поперечному (зі штрихами) напрямках; q^+, q^- – розподілене навантаження, прикладене до зовнішніх граней балки ($z = \pm h$); w – переміщення середньої лінії балки; $2h$ – висота її перерізу.

Вирази для напруження σ_x та переміщень $W(x, \pm h)$ зовнішніх граней балки, згідно з цією моделлю, мають вигляд

$$\sigma_x = \frac{M}{I} z + \frac{z}{I} \left(z^2 - \frac{3}{5} h^2 \right) \left[\left(\frac{E}{2G'} - \nu'' \right) q_2 - \frac{E}{E'} \left(1 - \frac{\nu'' G'}{E} \right) \frac{h^2}{4} q_2^{II} \right];$$

$$W(x, \pm h) = w(x) \pm (q^+ - q^-) \frac{h}{2E'} + \frac{5h\varepsilon_0}{16E'} (q^+ + q^-) + \frac{h^2}{2} \nu'' w'', \quad (2)$$

де $v'' = v'E/E'$; $M = \int_{-h}^h z\sigma_x dz = -EI \frac{d\tilde{w}}{dx^2} - \varepsilon_1 h^2 q_2$ – згинальний момент у балці;

$\varepsilon_0 = 1 + v'(E/G' - 0,8v'')$; $\tilde{w} = w + 1,5\varepsilon_2 q_2 h/E$.

Надалі вважатимемо, що в області контакту балки з жорсткою основою $q^+ = -p(x)$, а $q^- = q = P/l$. Враховуючи умову рівності нулю переміщення нижньої грані балки $W(+h)$ в області контакту, за цією моделлю запишемо додаткову залежність між переміщенням середньої лінії балки w та реактивним тиском $p(x)$:

$$W(x, +h) = w(x) + 0,5v''h^2w'' - (8 + 5\varepsilon_0) \frac{hp(x)}{16E'} - (8 - 5\varepsilon_0) \frac{hq}{16E'} = 0. \quad (3)$$

Звідси знайдемо вираз для контактного тиску на нижню грань балки:

$$p(x) = k[w(x) + 0,5v''h^2w''] - \varepsilon_q q, \quad (4)$$

де $k = [16E'/h]/(8 + 5\varepsilon_0)$; $\varepsilon_q = (8 - 5\varepsilon_0)/(8 + 5\varepsilon_0)$.

Підставивши вираз (4) у рівняння (1) та нехтуючи коефіцієнт біля **старшої** похідної (шостого порядку), одержимо диференціальне рівняння четвертого порядку для визначення переміщення w :

$$w^{IV} - 2g^2w'' + \lambda^4w = (1 + \varepsilon_q)q/A_0, \quad (5)$$

де $\lambda^4 = k/A_0$; $g^2 = 0,2\left(\frac{E}{G'} - 2v''\right)h^2\lambda^4$; $A_0 = EI - \frac{kh^4}{20}\left[1 + v''\left(4\frac{E'}{G'} - \frac{G'}{E}\right) - 3v'v''\right]\frac{E}{E'}$.

Розв'язком рівняння (5) за умови, що $g^2 < \lambda^2$, буде вираз

$$w(x) = A_1K_1(x) + A_2K_2(x) + A_3K_3(x) + A_4K_4(x) + w^*. \quad (6)$$

Тут $w^* = (1 + \varepsilon_q)q/k$ – частковий розв'язок рівняння (5); A_i ($i = 1 \div 4$) – невідомі коефіцієнти, які знаходять з крайових умов на кінцях балки та умов рівноваги; $K_i(x)$ – фундаментальні функції Крилова:

$$K_1(x) = \text{ch}\alpha x \cdot \cos\beta x; \quad K_2(x) = \text{sh}\alpha x \cdot \sin\beta x; \quad K_3(x) = \text{sh}\alpha x \cdot \cos\beta x; \quad (7)$$

$$K_4(x) = \text{ch}\alpha x \cdot \sin\beta x; \quad \alpha = \sqrt{(\lambda^2 + g^2)/2}; \quad \beta = \sqrt{(\lambda^2 - g^2)/2}.$$

З умови симетричності задачі два з чотирьох невідомих коефіцієнтів A_i дорівнюють нулю ($A_3 = A_4 = 0$). Інші два (A_1, A_2) та розмір області контакту $2a$ знаходять з умов, що невідомий контактний тиск $p(x)$ на межі області контакту $x = \pm a$ дорівнює нулю, а всередині області має задовольнити умову рівності **нулю суми проєкцій** всіх сил на вісь Oz та умові рівності нулю суми моментів проєкцій всіх сил відносно початку системи координат ($x = 0$):

$$p(\pm a) = 0; \quad \int_{-a}^a p(x) dx = 2ql - 2P_1; \quad \int_0^a xp(x) dx = \frac{1}{2}ql^2 - P_1l. \quad (8)$$

Підставивши в умови (8) замість величини $p(x)$ вираз (4) та задовольнивши їх, знаходимо трансцендентне рівняння для визначення розміру області контакту $2a$, а також залежності для сталих A_1, A_2 :

$$(1 - K_1)\tilde{K}_1 + K_2\tilde{K}_2 + (K_3\tilde{K}_3 + K_4\tilde{K}_4)(\alpha^2 + \beta^2) = \frac{1}{2}l^2(\alpha^2 + \beta^2)^2\left(\frac{1}{3} - \theta^2\right),$$

$$A_1 = \frac{q}{k} \frac{(v_0\alpha - \tilde{g}\beta)K_3 + (v_0\beta + \tilde{g}\alpha)K_4 + l\left(\frac{2}{3} - \theta\right)(\alpha^2 + \beta^2)(v_0K_1 + \tilde{g}K_2)}{[(\alpha R_1 + \beta R_2)K_3 + (\beta R_1 - \alpha R_2)](v_0K_1 + \tilde{g}K_2)},$$

$$A_2 = -\omega A_1 - \frac{q}{k} \left((v_0 K_1 + \tilde{g} K_2)^{-1} \right); R_1 = (\tilde{g} - v_0 \omega), R_2 = (\omega \tilde{g} + v_0), v_0 = v'' h^2 \alpha \beta, \quad (9)$$

де $\omega = (\tilde{g} K_1 - v_0 K_2) / (v_0 K_1 + \tilde{g} K_2)$; $\tilde{g} = 1 + 0,5 v'' h^2 g^2$; $\tilde{K}_1 = \tilde{R}_1 g^2 + 2 \alpha \beta \tilde{R}_2$; $\tilde{K}_2 = \tilde{R}_2 g^2 - 2 \alpha \beta \tilde{R}_1$; $\tilde{K}_3 = a \alpha \tilde{R}_1 + a \beta \tilde{R}_2$; $\tilde{K}_4 = a \beta \tilde{R}_1 - a \alpha \tilde{R}_2$; $\tilde{R}_1 = k A_1 R_1 - v_0 (\tilde{g} K_2 + v_0 K_1)^{-1}$; $\tilde{R}_2 = k A_1 R_2 + \tilde{g} (\tilde{g} K_2 + v_0 K_1)^{-1}$; **величини** K_i ($i = 1, 2, 3, 4$) – відповідні **значення** функцій Крилова в перерізі балки $x = a$.

За останніми залежностями (9) можна знайти розмір області контакту та контактний тиск жорсткої основи на балку, а також переміщення та напруження у тій частині балки, що не контактує з основою.

Аналіз задачі за допомогою МГЕ. **Задачу розв'язували** додатково за допомогою МГЕ **для плоскої задачі теорії** пружності. Тут через тонкостінність балки класичний МГЕ [8] стає неефективним, оскільки виникає **ефект межового шару** та появляються майже-сингулярні інтеграли [9, 10], правильне обчислення яких є визначальним для точності отримуваних результатів. Щоб врахувати тонкостінність балки (l/H , де $H \equiv 2h$), у МГЕ застосували регуляризаційний підхід [10], за яким інтегральне рівняння задачі має вигляд

$$\int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{A}, \mathbf{x}) \sigma_i(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{A}, \mathbf{x}) [u_i(\mathbf{x}) - u_i(\mathbf{A})] d\Gamma(\mathbf{x}) + [u_i(\mathbf{A}) - u_i(\mathbf{B})] R_{ij}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 0, \quad (10)$$

де $U_{ij}(\mathbf{A}, \mathbf{x})$, $T_{ij}(\mathbf{A}, \mathbf{x})$ – фундаментальні розв'язки для переміщень і напружень; $u_i(\mathbf{x})$, $\sigma_i(\mathbf{x})$ – вектори переміщень і напружень на межі балки; \mathbf{A} – точка колокації; \mathbf{B} – вузлова точка, що розташована найближче до точки \mathbf{A} , але лежить на протилежній грані балки; $R_{ij}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ – множники [11], що враховують тонкостінність балки і похибку числового визначення майже сингулярних інтегралів; $\Gamma(\mathbf{x})$ – контур інтегрування.

Для розв'язання задачі використали відому процедуру [8] покрокового “відривання” вузлів із контактними напруженнями розтягу та “фіксування” вузлів із переміщеннями, що перетинають межу жорсткої основи. Ітераційний процес тривав доти, поки в усіх вузлових точках нижньої грані балки не були виконані (з наперед заданою точністю) умови контакту з жорсткою основою.

За рекомендацією праці [8] у МГЕ-моделі задачі використали лінійні ізопараметричні граничні елементи. Для підвищення точності обчислення довжини зони контакту, а також контактних напружень по обидва боки від точки відриву сітку граничних елементів згущували.

Результати та їхній аналіз. На основі формул (4), (6) побудовані графіки (рис. 2 і 3) зміни розміру області контакту (a/l) та розподілу контактного тиску ($p(x)/q$) для ізотропного матеріалу ($\nu = 0,3$) залежно від параметрів тонкостінності балки (l/H) і розрахункової моделі. За цими ж формулами досліджено кількісний вплив поперечної анізотропії на розмір області контакту та максимальний контактний тиск для ортотропного матеріалу з деревини ($E/E' = 10$; $E/G' = 20$; $\nu'' = 0,3$). Одержані дані порівнювали з результатами для ізотропного матеріалу (див. таблицю). Результати МГЕ для ізотропного матеріалу розміщені в другому стовпчику, в дужках – одержані за допомогою розв'язку В. І. Феодосєва [2], в останній стрічці – з розв'язку С. П. Тимошенка [1].

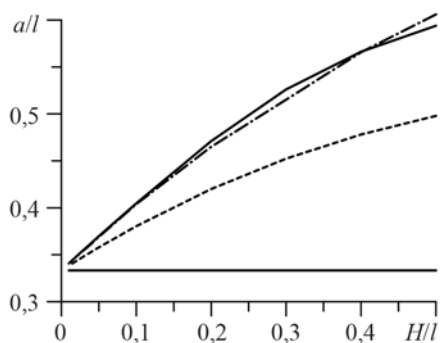


Рис. 2. Fig. 2.

Рис. 2. Залежність відносного розміру області контакту (a/l) від відносної товщини балки (H/l): суцільна крива – наша модель; штрихова – зсувна; штрихпунктирна – МГЕ; суцільна лінія внизу – розв’язок Тимошенка.

Fig. 2. Dependences of the contact zone length (a/l) on the relative thickness of a beam (H/l): solid curve – our model; dashed – shear model; dash-dotted – boundary element method; solid line below – Tymoshenko’s solution.

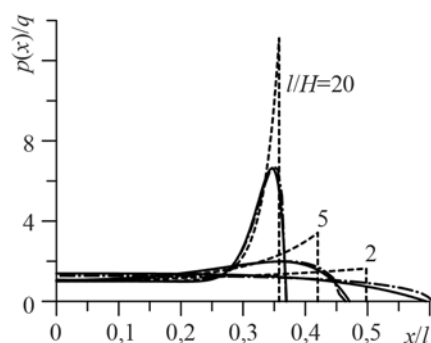


Рис. 3. Fig. 3.

Рис. 3. Розподіл контактної тиску p/q за різними моделями залежно від розміру області контакту та тонкостінності балки (H/H): суцільна крива – наша модель; штрихова – модель; штрихпунктирна – МГЕ.

Fig. 3. Distribution of contact pressure p/q obtained with different models depending on the length of contact zone and the thickness of a beam (H/H): solid curve – our model; dashed – shear model; dash-dotted – boundary element method.

Як бачимо, розмір області контакту, на противагу розв’язку С. П. Тимошенка, є величина змінна і може (залежно від товщини балки) майже удвічі перевищувати значення, які можна одержати на основі гіпотез класичної теорії балок. **Результати** визначення розмірів області контакту, пораховані за методикою В. І. Феодосєєва (штрихова лінія на рисунках та числа таблиці в дужках) з урахуванням тільки деформації поперечного зсуву, **ведуть до** кількісних похибок ($\Delta_{\max} \geq 14,8\%$ для $H/H \geq 3$). Результати, пораховані за формулами (4)–(9) уточненої теорії балок, яка враховує поперечне обтиснення, для ізотропного матеріалу з точністю до 2...3% збігаються із результатами МГЕ плоскої задачі теорії пружності під час визначення і розміру області контакту, і контактної тиску. Найбільша похибка формул уточненої теорії під час обчислення контактної тиску за цих товщин не перевищує 2,1%.

Вплив поперечної анізотропії на розрахункові параметри задачі

H/H	p_{\max}/q			a/l	
	МГЕ	уточнені теорії		уточнені теорії	
		ізотропія	ізотропія	ортотропія	ізотропія
3	1,42	1,45 (2,19)	1,38 (1,18)	0,54 (0,46)	0,59 (0,54)
5	2,00	1,98 (3,42)	1,40 (1,51)	0,47 (0,42)	0,54 (0,51)
10	3,56	3,50 (6,61)	1,89 (2,55)	0,41 (0,38)	0,47 (0,45)
20	6,75	6,63 (13,1)	3,24 (4,82)	0,37 (0,36)	0,41 (0,40)
40	12,9	12,9 (26,2)	6,12 (9,48)	0,35 (0,35)	0,38 (0,37)
Кл. теорія	∞	∞	∞	0,333	0,333

Поперечна анізотропія, починаючи з товщин $H/H \geq 10$, більше ніж удвічі понижує контактний тиск, а також **у межах 10% збільшує** розмір області контакту. Із наведених графічних і числових даних МГЕ та уточненої теорії видно, що зі збільшенням товщини балки ($H/H \geq 3$) пік контактної тиску пе-

реміщується в середину зони контакту, тоді як за формулами В. І. Феодосєва [2] він залишається найбільшим у кінці цієї зони. Тобто якісні та кількісні похибки зсувної моделі балок проявляються під час визначення контактної тиску в області контакту (рис. 3 та дані таблиці), тоді як реальний його розподіл за моделлю, що враховує обтиснення, зовсім інший.

ВИСНОВКИ

За допомогою уточненої теорії балок, що враховує деформації поперечного зсуву та обтиснення, досліджено контакт частково опертої на жорстку основу пружної балки. Одержані результати для ізотропної балки збігаються із результатами МГЕ плоскої задачі теорії пружності та відповідними результатами розв'язку мішаної задачі для нескінченної ізотропної напівсмуги плоскої задачі теорії пружності. Показано, що зі збільшенням товщини балки пік контактної тиску переміщується в середину зони контакту і має характер “герцівського розподілу”, тоді як за формулами “чисто зсувних” теорій балок він максимальний на межі зони контакту. Зі збільшенням поперечної анізотропії матеріалу суттєво знижується абсолютний контактний тиск жорсткої основи на балку і одночасно зростає розмір області контакту.

РЕЗЮМЕ. Получено решение задачи для частично опертой на жесткое основание композитной (ортоотропной) балки при равномерно распределенной нагрузке. Для расчета использовано уточненную модель балок, которая учитывает поперечный сдвиг и обжатие. Получены уравнение для определения размера области контакта, а также формулы для расчета контактного давления жесткого основания на внешнюю поверхность балки. Численные результаты уточненной модели для изотропного та ортоотропного материалов сравнены с соответствующими классической теории, сдвиговой модели балок и плоской задачи теории упругости.

SUMMARY. Solution of the problem for a partly supported composite (orthotropic) beam on a rigid base under evenly distributed loading has been obtained. The refined model of beams, that takes into account the transversal shear and compression is used for calculation. Equations for evaluation of the contact zone size and also formulas for calculation of contact pressure of a rigid base on the beam external surface have been obtained. Numerical results obtained by the refined model for isotropic and orthotropic materials are compared with those corresponding to the classical theory, beam shear model and a plane problem of the elasticity theory.

1. Тимошенко С. П. Сопrotивление материалов. – М.: Наука, 1965. – Т. II. – 480 с.
2. Гудрамович В. С., Моссаковский В. И. Контактная задача для упругого кольца, подкрепляющего цилиндрическую оболочку // Изв. АН СССР. – 1961. – № 2. – С. 153–156.
3. Феодосєв В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1973. – 400 с.
4. Кир Л. М., Сильва М. А. Две смешанные задачи для полуполосы // Прикл. механика. – 1972. – № 4. – С. 266–270.
5. Шваб'юк В. І., Маткова А. В. Вплив поперечної анізотропії на напружено-деформований стан в балці-смугі // Наук. нотатки. – Луцьк: ЛДТУ, 2005. – С. 258–261.
6. Прокопишин І. А., Сулим Г. Т., Хлебніков Д. Г. Квазістатичне відшарування плоско здеформованої пластини від вінклерової основи // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1999. – № 5. – С. 33–38.
(Prokopyshyn I. A., Sulym H. T., and Khlebnikov D. H. Quasistatic Exfoliation of a Plate Subjected to Plane Deformation from the Winkler Base // Materials Science. – 1999. – № 5. – P. 634–641.)
7. Шваб'юк В. И. Учет эффекта сжимаемости нормали в контактных задачах для трансверсально изотропных плит // Прикл. механика. – 1980. – 16, № 4. – С. 71–77.
8. Man K. W. Contact mechanics using boundary element. – Comput. Mech. Publ., 1994. – 183 p.
9. Luo J. F., Liu Y. J., and Berger E. Analysis of two-dimensional thin-structures (from micro- to nano-scales) using the boundary element method // Computat. Mech. – 1998. – 22. – P. 404–412.
10. Lu S. and Dong M. An Advanced BEM for Thermal and Stress Analyses of Components with Thermal Barrier Coating // Electronic J. of Boundary Elements. – 2003. – 1, № 2. – P. 302–315.
11. Сулим Г. Т., Пастернак Я. М. Дослідження точності різних реалізацій ПМГЕ для плоских задач теорії пружності тіл із включеннями // Наук. нотатки. – Луцьк: ЛДТУ, 2008. – 21. – С. 290–298.

Одержано 18.10.2008

Шановні автори!

Посилаємо на візування відредагований варіант Вашої статті. Просимо уважно прочитати і звернути увагу на виділені місця. Виправлення робити у цьому ж файлі і виділяти їх. Цей файл якнайшвидше надіслати в редакцію. Просимо подати повністю ініціали авторів (це потрібно для російського змісту). В підписі до рисунка 1 пояснити точку *B*. Перевірте, будь ласка, формули, рисунки та надписи на них. У рисунках 2 і 3 додайте англійською мовою підписи.

З повагою редактор Д. Бриняк.