

УДК 517.958:536.12

## НЕСТАЦІОНАРНЕ ТЕПЛОВЕ ПОЛЕ В НЕОДНОРІДНИХ МАТЕРІАЛАХ З НЕЛІНІЙНОЮ ПОВЕДІНКОЮ ЇХ КОМПОНЕНТ

*Л. М. ЖУРАВЧАК, Н. В. ЗАБРОДСЬКА*

Карпатське відділення Інституту геофізики ім. С. І. Суботіна НАН України, Львів

Розглянуто дво- або тривимірне кусково-однорідне тіло довільної форми із залежними від температури теплофізичними характеристиками. На межі тіла задані умови першого, другого і третього родів, між компонентами є ідеальний тепловий контакт. Запропоновано спосіб спільного використання перетворення Кірхгофа, приграничних або граничних елементів та покрової часової схеми єдиної початкової умови для побудови інтегральних зображень температури і теплового потоку у довільній просторово-часовій точці. Обчислювальні експерименти засвідчили доцільність поєднання непрямого методу приграничних елементів з перетворенням Кірхгофа, коли враховують залежність коефіцієнта теплопровідності матеріалу від температури.

**Ключові слова:** *матеріали із залежними від температури характеристиками, нестационарне теплове поле, непрямий метод приграничних елементів, перетворення Кірхгофа.*

Проблеми зниження матеріаломісткості неоднорідних елементів конструкцій, які працюють в умовах граничних теплових навантажень або з різкими перепадами температур, та оцінки їх міцності і надійності є актуальні в різних галузях економіки й техніці, зокрема, в машино- і приладобудуванні, тепловій енергетиці, проектуванні термотривких матеріалів. Їх вирішення ґрунтується на знаходженні теплових полів у кусково-однорідних об'єктах довільної форми, тобто побудові розв'язків дво- чи тривимірних нестационарних задач теплопровідності. Лінійні математичні моделі, побудовані у припущенні кусково-сталої залежності теплофізичних характеристик матеріалів від координат, не завжди адекватно описують реальні процеси. Достовірніші моделі, що враховують вплив температури на коефіцієнти тепло- та температуропровідності матеріалів компонентів, призводять до нелінійних крайових задач математичної фізики, для розв'язування яких переважно використовують чисельні методи. Зокрема [1], для знаходження розв'язків стаціонарних задач теплопровідності з урахуванням залежності коефіцієнта теплопровідності від температури поєднано перетворення Кірхгофа з прямим методом граничних елементів (МГЕ). Для знаходження нестационарного температурного поля розглянуто [2] підхід, який ґрунтується на спільному використанні методів розщеплення, занурення, приграничних елементів, неklasичних скінченно-різницевого співвідношень та методу продовження розв'язку за параметром. Нижче для математичного моделювання нестационарного процесу теплопровідності у кусково-однорідних матеріалах з нелінійною поведінкою їх компонент запропоновано непрямий метод приграничних елементів (МПГЕ) [3] та перетворення Кірхгофа.

**Постава задачі.** Припустимо, що коефіцієнт теплопровідності  $\lambda^{(m)}$ , густина  $\rho^{(m)}$  та теплоємність  $c^{(m)}$  ( $m=1, \dots, M$ ) матеріалу області  $\Omega_m$  кусково-однорідного тіла  $\Omega = \cup_{m=1}^M (\Omega_m \cup \Gamma_m)$  є неперервні функції від температури  $\theta^{(m)} = \theta^{(m)}(x, \tau)$  [2], тобто

$$\phi^{(m)}(\theta^{(m)}) = \phi_m + \phi_\theta^{(m)}(\theta^{(m)}) S_+(\theta^{(m)} - \theta_\phi^{(m)}) \chi_\theta^{(m)}, \quad \phi \in \{\lambda, \rho, c\}, \quad (1)$$

де  $\chi_\theta^{(m)}$  – характеристична функція області  $\Omega_m^m$ , в якій  $\theta^{(m)} > \min(\theta_\lambda^{(m)}, \theta_\rho^{(m)}, \theta_c^{(m)})$ ,  $S_+(z) = 1$ , якщо  $z > 0$ ,  $S_+(z) = 0$ , коли  $z \leq 0$ ,  $\Gamma_m$  – межа області  $\Omega_m$ .

Тоді для знаходження невідомої температури  $\theta^{(m)}(x, \tau)$  у кусково-однорідному тілі маємо нелінійне вихідне рівняння [4]

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda^{(m)}(\theta^{(m)}) \frac{\partial \theta^{(m)}(x, \tau)}{\partial x_i}) - c^{(m)}(\theta^{(m)}) \rho^{(m)}(\theta^{(m)}) \frac{\partial \theta^{(m)}(x, \tau)}{\partial \tau} = -\psi^{(m)}(x, \tau), \quad (2)$$

$$(x, \tau) \in \Omega_m \times \mathbf{T}, \quad \Omega_m \subset \mathbf{R}^n, \quad n = 2, 3,$$

крайові

$$\theta^{(m)}(x, \tau) = \theta_\Gamma(x, \tau), \quad (x, \tau) \in \partial\Omega^{(1)} \times \mathbf{T}, \quad -\lambda^{(m)}(\theta^{(m)}) \frac{\partial \theta^{(m)}(x, \tau)}{\partial \mathbf{n}^{(m)}(x)} = q_\Gamma(x, \tau), \quad (3)$$

$$(x, \tau) \in \partial\Omega^{(2)} \times \mathbf{T},$$

$$\lambda^{(m)}(\theta^{(m)}) \frac{\partial \theta^{(m)}(x, \tau)}{\partial \mathbf{n}^{(m)}(x)} + \nu^{(m)}(x, \tau) \theta^{(m)}(x, \tau) = \nu^{(m)}(x, \tau) f_\Gamma(x, \tau), \quad (x, \tau) \in \partial\Omega^{(3)} \times \mathbf{T}, \quad (4)$$

контактні

$$\theta^{(m)}(x, \tau) = \theta^{(s)}(x, \tau), \quad \lambda^{(m)}(\theta^{(m)}) \frac{\partial \theta^{(m)}(x, \tau)}{\partial \mathbf{n}^{(m)}(x)} = -\lambda^{(s)}(\theta^{(s)}) \frac{\partial \theta^{(s)}(x, \tau)}{\partial \mathbf{n}^{(s)}(x)}, \quad (5)$$

$$(x, \tau) \in \partial\Omega^{ms} \times \mathbf{T}, \quad s > m, \quad s \in \{2, \dots, M\},$$

та початкові

$$\theta^{(m)}(x, 0) = \theta^{(m0)}(x), \quad x \in \Omega_m, \quad (6)$$

умови. Тут  $\Omega_m$  – однорідна, за винятком деякої локальної області  $\Omega_\theta^m$ , зона зі сталими характеристиками  $c_m, \rho_m, \lambda_m$ ;  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ;  $\mathbf{T} = \{\tau : 0 < \tau < \infty\}$ ,  $\tau$  – час;  $\psi^{(m)}(x, \tau)$  – потужність заданих внутрішніх джерел в області  $\Omega_m$ ;  $\cup_{i=1}^3 \partial\Omega^{(i)} = \partial\Omega$  – межа області  $\Omega$ ;  $\partial\Omega^{(i)} \cap \partial\Omega^{(j)} = \emptyset$ , якщо  $i \neq j$ ;  $\partial\Omega^{ms} = \partial\Omega_m \cap \partial\Omega_s$  – межа поділу середовищ  $\Omega_m$  та  $\Omega_s$ ;  $\mathbf{n}^{(m)}(x) = (\mathbf{n}_1^{(m)}(x), \dots, \mathbf{n}_n^{(m)}(x))$  – вектор зовнішньої однозначно визначеної одиничної нормалі до межі  $\Gamma_m$ ;  $\nu^{(m)}(x, \tau)$  – коефіцієнт тепловіддачі з частини  $\partial\Omega^{(3)}$  поверхні тіла.

**Часткова лінеаризація задачі за допомогою перетворення Кірхгофа.** Як відомо, коефіцієнти температуропровідності  $a^{(m)}(\theta^{(m)}) = \lambda^{(m)}(\theta^{(m)}) / (\rho^{(m)}(\theta^{(m)}) c^{(m)}(\theta^{(m)}))$  багатьох чистих металів, графіту й деяких теплозахисних матеріалів незначно залежать від шуканої температури, тому

їх можна вважати сталими [4, 5, 6]. Тоді для розв'язання задачі (2)–(6) можна використати перетворення Кірхгофа [7]

$$\vartheta^{(m)}(x, \tau) = \mathbf{K}_m(\theta^{(m)}(x, \tau)) = \frac{1}{\lambda_m} \int_{\theta^{(m0)}(x)}^{\theta^{(m)}(x, \tau)} \lambda^{(m)}(\zeta) d\zeta,$$

яке лінеаризує вихідне рівняння (2), крайові умови першого та другого родів (3), а також другу з умов контакту (5). Крайова умова третього роду (4) та перша з умов контакту (5) залишаються нелінійними.

Тоді для знаходження змінної Кірхгофа  $\vartheta^{(m)}(x, \tau)$  одержимо таку задачу [7]:

$$\Delta \vartheta^{(m)}(x, \tau) - \frac{1}{a_m} \frac{\partial \vartheta^{(m)}(x, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\psi^{(m)}(x, \tau)}{\lambda_m}, \quad (x, \tau) \in \Omega^m \times \mathbf{T}, \quad m=1, \dots, M, \quad (7)$$

$$\vartheta^{(m)}(x, \tau) = \mathbf{K}_m(\theta_\Gamma(x, \tau)), \quad (x, \tau) \in \partial\Omega^{(1)} \times \mathbf{T},$$

$$-\lambda_m \frac{\partial \vartheta^{(m)}(x, \tau)}{\partial \mathbf{n}^{(m)}(x)} = q_\Gamma(x, \tau), \quad (x, \tau) \in \partial\Omega^{(2)} \times \mathbf{T}, \quad (8)$$

$$\lambda_m \frac{\partial \vartheta^{(m)}(x, \tau)}{\partial \mathbf{n}^{(m)}(x)} + \nu(x, \tau) \mathbf{K}_m^{-1}(\theta_\Gamma(x, \tau)) = \nu(x, \tau) f_\Gamma(x, \tau), \quad (x, \tau) \in \partial\Omega^{(3)} \times \mathbf{T}, \quad (9)$$

$$\mathbf{K}_m^{-1}(\vartheta^{(m)}) = \mathbf{K}_s^{-1}(\vartheta^{(s)}), \quad \lambda_m \frac{\partial \vartheta^{(m)}(x, \tau)}{\partial \mathbf{n}^{(m)}(x)} = -\lambda_s \frac{\partial \vartheta^{(s)}(x, \tau)}{\partial \mathbf{n}^{(s)}(x)}, \quad (x, \tau) \in \partial\Omega^{ms} \times \mathbf{T}, \quad (10)$$

$$\vartheta^{(m)}(x, \tau) = \vartheta_0^{(m)}(x) = \mathbf{K}_m(\theta_0^{(m)}(x)), \quad x \in \Omega_m, \tau = 0, \quad (11)$$

де  $a_m = \lambda_m / (\rho_m c_m) = \text{const}$ ;  $\mathbf{K}_m^{-1}(\vartheta^{(m)}(x, \tau)) = \theta^{(m)}(x, \tau)$  – обернене перетворення Кірхгофа [7].

**Побудова інтегральних зображень розв'язків частково лінеаризованої задачі з використанням непрямих МГЕ або МПГЕ.** Для побудови алгоритмів розв'язування задачі (7)–(11) розглянемо множину  $\mathbf{R}^n(M)$ , складену з  $M$  площин  $\mathbf{R}_m^2$  або  $M$  просторів  $\mathbf{R}_m^3$ , яка володіє такими властивостями:  $\mathbf{R}_m^n \cap \mathbf{R}^n = \Omega_m \cup \Gamma_m$ ,  $\mathbf{R}^n(M) \cap \mathbf{R}^n = \Omega \cup \partial\Omega$ ,  $\mathbf{R}_m^n \cap \mathbf{R}_s^n = \partial\Omega^{ms}$  [3]. Уведемо на межах  $\Gamma_m$  компонент тіла та у зовнішніх приміжових до них областях  $G_m = B_m \setminus \Omega_m$  товщиною  $h$  ( $\Omega_m \subset B_m \subset \mathbf{R}^n$ ,  $\Gamma_m \cap \partial B_m = \emptyset$ ,  $\partial B_m$  – межа розширеної області  $B_m$ ) фіктивні джерела невідомої інтенсивності  $\varphi^{(m\gamma)}(\xi, \xi_4)$  ( $\gamma \in \{\Gamma, G\}$ ) [8, 3]. Тоді інтегральні зображення розв'язків рівнянь (7) та похідних від них за нормаллю з урахуванням початкового розподілу (11) матимуть вигляд [8, 3]

$$\vartheta^{(m\gamma)}(x, \tau) = \mathbf{F}_\tau^{(m\gamma)}(x, \tau, U^{(m)}) + b_\tau^{(m)}(x, \tau, U^{(m)}), \quad (x, \tau) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{T}, \quad (12)$$

$$-\lambda_m \frac{\partial \vartheta^{(m\gamma)}(x, \tau)}{\partial \mathbf{n}^{(m)}(x)} = \mathbf{F}_\tau^{(m\gamma)}(x, \tau, Q^{(m)}) + b_\tau^{(m)}(x, \tau, Q^{(m)}), \quad (13)$$

де  $\mathbf{F}_\tau^{(m\gamma)}(x, \tau, \Phi) = \int_0^\tau \int_{\gamma_m} \Phi(x, \tau, \xi, \xi_4) \varphi^{(m\gamma)}(\xi, \xi_4) d\gamma_m(\xi) d\xi_4$ ,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n$ ,

$\xi_4 \in \mathbf{T}$ ;  $b_\tau^{(m)}(x, \tau, \Phi) = \frac{a_m}{\lambda_m} \int_0^\tau \int_{\Omega_m} \Phi(x, \tau, \xi, \xi_4) \psi^{(m)}(\xi, \xi_4) d\Omega_m(\xi) d\xi_4 +$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega_m} \Phi(x, \tau, \xi, 0) \vartheta_0^{(m)}(\xi) d\Omega_m(\xi); U^{(m)}(x, \xi, \tau, \xi_4) = \frac{1}{[4\pi a_m(\tau - \xi_4)]^{n/2}} \times \\
& \times \exp\left(-\frac{r^2}{4a_m(\tau - \xi_4)}\right), r^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2, y_i = x_i - \xi_i; Q^{(m)}(x, \tau, \xi, \xi_4) = \\
& = -\lambda_m \frac{\partial U^{(m)}(x, \tau, \xi, \xi_4)}{\mathbf{n}^{(m)}(x)} = -\lambda_m \sum_{l=1}^n \frac{U^{(m)}(x, \tau, \xi, \xi_4) y_l}{2a_m(\tau - \xi_4)} \mathbf{n}_l^{(m)}(x).
\end{aligned}$$

Для задоволення крайових умов (8), (9) та умов контакту (10) запишемо систему граничних інтегральних рівнянь:

$$\mathbf{F}_\tau^{(m\gamma)}(x, \tau, U^{(m)}) = \mathbf{K}_m(\theta_\Gamma(x, \tau)) - b_\tau^{(m)}(x, \tau, U^{(m)}), \quad (x, \tau) \in \partial\Omega^{(1)} \times \mathbf{T}, \quad (14)$$

$$\mathbf{F}_\tau^{(m\gamma)}(x, \tau, Q^{(m)}) = q_\Gamma(x, \tau) - b_\tau^{(m)}(x, \tau, Q^{(m)}), \quad (x, \tau) \in \partial\Omega^{(2)} \times \mathbf{T}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{F}_\tau^{(m\gamma)}(x, \tau, Q^{(m)}) + \mathfrak{v}(x, \tau) \mathbf{K}_m^{-1}(\mathbf{F}_\tau^{(m\gamma)}(x, \tau, U^{(m)}) + b_\tau^{(m)}(x, \tau, U^{(m)})) = \\
& = \mathfrak{v}(x, \tau) f_\Gamma(x, \tau) - b_\tau^{(m)}(x, \tau, Q^{(m)}), \quad (x, \tau) \in \partial\Omega^{(3)} \times \mathbf{T}, \quad (16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{K}_m^{-1}(\mathbf{F}_\tau^{(m\gamma)}(x, \tau, Q^{(m)}) - b_\tau^{(m)}(x, \tau, Q^{(m)})) - \mathbf{K}_s^{-1}(\mathbf{F}_\tau^{(s\gamma)}(x, \tau, Q^{(s)}) - \\
& - b_\tau^{(s)}(x, \tau, Q^{(s)})) = 0, \quad (17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{F}_\tau^{(m\gamma)}(x, \tau, Q^{(m)}) - \mathbf{F}_\tau^{(s\gamma)}(x, \tau, Q^{(s)}) = -b_\tau^{(m)}(x, \tau, Q^{(m)}) + b_\tau^{(s)}(x, \tau, Q^{(s)}), \\
& (x, \tau) \in \partial\Omega^{ms} \times \mathbf{T}. \quad (18)
\end{aligned}$$

**Побудова дискретно-континуальної моделі для знаходження змінних Кірхгофа та температури.** Здійснимо просторово-часову дискретизацію (14)–(18) за допомогою таких кроків. Межі  $\Gamma_m$  та прилежові області  $G_m$  дискретизуємо на граничні  $\Gamma_v^m$  та приграничні  $G_v^m$  елементи, причому  $\bigcup_{v=1}^{V_m} \Gamma_v^m = \Gamma_m$ ,  $\bigcup_{v=1}^{V_m} G_v^m = G_m$ . Для зручності опису залежності невідомої інтенсивності від часу часовий промінь  $\mathbf{T}$  розбили на інтервали  $\mathbf{T}_p = ]\tau_{p-1}, \tau_p]$  ( $p=1, 2, \dots, P$ ,  $\tau_0=0$ ) і в межах кожного  $\mathbf{T}_p$  на  $v$ -му елементі дискретизації для спрощення алгоритму невідомі інтенсивності фіктивних джерел  $\varphi^{(m\gamma)}(\xi, \xi_4)$  ( $\gamma \in \{\Gamma, G\}$ ) апроксимували сталими  $d_v^{m\gamma p}$ . Дискретно-континуальну модель побудовано для покрокової часової схеми – схеми єдиної початкової умови (СЄПУ) [8], у якій інтегрування за часом завжди починається з одного і того ж реального моменту. Задовольняючи в сенсі колокації (14)–(18) в центрах граничних елементів у момент часу  $\tau_p$ , одержимо систему нелінійних алгебричних рівнянь для знаходження невідомих  $d_v^{m\gamma p}$ :

$$\begin{aligned}
& \sum_{v=1}^{V_m} \bar{A}_v^{m\gamma p}(x^{mw}, \tau_p, U^{(m)}) d_v^{m\gamma p} = \mathbf{K}_m(\theta_\Gamma(x^{mw}, \tau_p)) - \\
& - \sum_{p=1}^{P-1} \sum_{v=1}^{V_m} \bar{A}_v^{m\gamma p}(x^{mw}, \tau_p, U^{(m)}) d_v^{m\gamma p} - \\
& - b^{mP}(x^{mw}, \tau_p, U^{(m)}), x^{mw} \in \partial\Omega^{(1)}, w=1, \dots, V_m^{(1)}, \quad (19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{v=1}^{V_m} \widehat{A}_v^{m\gamma P}(x^{mw}, \tau_P, Q^{(m)}) d_v^{m\gamma P} = q_\Gamma(x^{mw}, \tau_P) - b^{mP}(x^{mw}, \tau_P, Q^{(m)}) - \\
& - \sum_{p=1}^{P-1} \sum_{v=1}^{V_m} \overline{A}_v^{m\gamma p}(x^{mw}, \tau_P, Q^{(m)}) d_v^{m\gamma p}, \quad x^{mw} \in \partial\Omega^{(2)}, \quad w = V_m^{(1)} + 1, \dots, V_m^{(2)}, \\
& \sum_{v=1}^{V_m} \widehat{A}_v^{m\gamma P}(x^{mw}, \tau_P, Q^{(m)}) d_v^{m\gamma P} + \nu(x^{mw}, \tau_P) \mathbf{K}_m^{-1} \left( \sum_{v=1}^{V_m} \widehat{A}_v^{m\gamma P}(x^{mw}, \tau_P, U^{(m)}) d_v^{m\gamma P} + \right. \\
& + \sum_{p=1}^{P-1} \sum_{v=1}^{V_m} \overline{A}_v^{m\gamma p}(x^{mw}, \tau_P, U^{(m)}) d_v^{m\gamma p} + b^{mP}(x^{mw}, \tau_P, U^{(m)}) \left. \right) = \nu(x^{mw}, \tau_P) f_\Gamma(x^{mw}, \tau_P) - \\
& - \sum_{p=1}^{P-1} \sum_{v=1}^{V_m} \overline{A}_v^{m\gamma p}(x^{mw}, \tau_P, Q^{(m)}) d_v^{m\gamma p} - b^{mP}(x^{mw}, \tau_P, Q^{(m)}), \quad x^{mw} \in \partial\Omega^{(3)}, \\
& w = V_m^{(2)} + 1, \dots, V_m^{(3)},
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{K}_m^{-1} \left( \sum_{v=1}^{V_m} \widehat{A}_v^{m\gamma P}(x^{mw}, \tau_P, U^{(m)}) d_v^{m\gamma P} + \sum_{p=1}^{P-1} \sum_{v=1}^{V_m} \overline{A}_v^{m\gamma p}(x^{mw}, \tau_P, U^{(m)}) d_v^{m\gamma p} + \right. \\
& + b^{mP}(x^{mw}, \tau_P, U^{(m)}) \left. \right) - \mathbf{K}_s^{-1} \left( \sum_{v=1}^{V_s} \widehat{A}_v^{s\gamma P}(x^{mw}, \tau_P, U^{(s)}) d_v^{s\gamma P} - \right. \\
& - \sum_{p=1}^{P-1} \sum_{v=1}^{V_s} \overline{A}_v^{s\gamma p}(x^{mw}, \tau_P, U^{(s)}) d_v^{s\gamma p} - b^{sP}(x^{mw}, \tau_P, U^{(s)}) \left. \right) = 0, \\
& x^{mw} \in \partial\Omega^{ms}, \quad w = V_m^{(3)} + 1, \dots, V_m,
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{v=1}^{V_m} \widehat{A}_v^{m\gamma P}(x^{mw}, \tau_P, Q^{(m)}) d_v^{m\gamma P} - \sum_{v=1}^{V_s} \widehat{A}_v^{s\gamma P}(x^{mw}, \tau_P, Q^{(s)}) d_v^{s\gamma P} = \\
& = \sum_{p=1}^{P-1} \sum_{v=1}^{V_s} \overline{A}_v^{s\gamma p}(x^{mw}, \tau_P, Q^{(s)}) d_v^{s\gamma p} - \sum_{p=1}^{P-1} \sum_{v=1}^{V_m} \overline{A}_v^{m\gamma p}(x^{mw}, \tau_P, Q^{(m)}) d_v^{m\gamma p} + \\
& + b^{sP}(x^{mw}, \tau_P, Q^{(s)}) - b^{mP}(x^{mw}, \tau_P, Q^{(m)}), \quad x^{mw} \in \partial\Omega^{ms}, \quad w = V_m^{(3)} + 1, \dots, V_m,
\end{aligned} \tag{22}$$

де

$$\begin{aligned}
\widehat{A}_v^{m\gamma P}(x, \tau, \Phi) &= \int_{\gamma_v^m} \int_{\tau_{p-1}}^{\tau} \Phi(x, \tau, \xi, \xi_4) d\gamma_v^m(\xi) d\xi_4, \\
\overline{A}_v^{m\gamma p}(x, \tau, \Phi) &= \int_{\gamma_v^m} \int_{\tau_{p-1}}^{\tau_p} \Phi(x, \tau, \xi, \xi_4) d\gamma_v^m(\xi) d\xi_4, \quad \tau > \tau_p.
\end{aligned}$$

Систему (19)–(23) розв’яжемо ітераційним методом, за початкові наближення в крайовій умові третього роду (21) та в першій умові контакту (22) візьмемо тіло, в якому коефіцієнт теплопровідності матеріалу кожної області  $\Omega_m$  не залежить від температури.

Одержані як розв’язки системи (19)–(23) інтенсивності фіктивних джерел  $d_v^{m\gamma P}$  підставимо в дискретні аналоги (12), (13) і знайдемо змінні Кірхгофа та похідні від них за нормаллю в довільний момент часу  $\tau_{p-1} < \tau \leq \tau_p$ :

$$\vartheta^{(m\gamma P)}(x, \tau) = \sum_{v=1}^{V_m} \tilde{A}_v^{m\gamma P}(x, \tau, U^{(m)}) d_v^{m\gamma P} + \sum_{p=1}^{P-1} \sum_{v=1}^{V_m} \bar{A}_v^{m\gamma P}(x, \tau, U^{(m)}) d_v^{m\gamma P} + b^{mP}(x, \tau, U^{(m)}), \quad (24)$$

$$-\lambda_m \frac{\partial \vartheta^{(m\gamma P)}(x, \tau)}{\partial \mathbf{n}^{(m)}(x)} = \sum_{v=1}^{V_m} \tilde{A}_v^{m\gamma P}(x, \tau, Q^{(m)}) d_v^{m\gamma P} + \sum_{p=1}^{P-1} \sum_{v=1}^{V_m} \bar{A}_v^{m\gamma P}(x, \tau, Q^{(m)}) d_v^{m\gamma P} + b^{mP}(x, \tau, Q^{(m)}). \quad (25)$$

Далі для знаходження температури і теплового потоку використаємо обернене перетворення Кірхгофа та вирази (24), (25):

$$\theta^{(m\gamma P)}(x, \tau) = \mathbf{K}_m^{-1}(\vartheta^{(m\gamma P)}(x, \tau)), \quad -\lambda^{(m)}(\theta^{(m\gamma P)}) \frac{\partial \theta^{(m\gamma P)}(x, \tau)}{\partial \mathbf{n}^{(m)}(x)} = -\lambda_m \frac{\partial \vartheta^{(m\gamma P)}(x, \tau)}{\partial \mathbf{n}^{(m)}(x)}. \quad (26)$$

**Чисельні дослідження.** Похибки, які виникають під час застосування непрямих методів граничних і приграничних елементів до розв'язування практичних задач, спричинені апроксимаційними й дискретизаційними операціями, а також чисельно-аналітичним інтегруванням.

Для порівняння точності чисельних результатів, одержаних цими методами, з відомим аналітичним розв'язком розглянуто нестационарну задачу теплопровідності з крайовою умовою першого роду для паралелепіпеда з одиничними коефіцієнтами тепло- та температуропровідності матеріалу за відсутності джерел тепла. Аналітичний розв'язок задачі отримують, поєднуючи перетворення Лапласа за часом та скінченне синус-перетворення Фур'є за просторовими координатами [9]. Розглянуто нульову початкову та крайову умови, вибрані так:

$$\theta_{\Gamma}(\pm h_1, x_2, x_3, \tau) = -10, \quad \theta_{\Gamma}(x_1, \pm h_2, x_3, \tau) = -10, \quad \theta_{\Gamma}(x_1, x_2, \pm h_3, \tau) = -10, \quad (27)$$

де  $h_1=1$ ,  $h_2=1$ ,  $h_3=0,5$ . Розмірності всіх величин подано в системі СІ, за винятком температури, яку виміряно в градусах Цельсія.

Задача розв'язана з використанням 16 граничних та приграничних елементів за допомогою ССПУ зі змінним кроком за часом (рис. 1). Як бачимо, і у внутрішніх, і в граничних точках точність збігу чисельних результатів з аналітичним розв'язком є вища для непрямого МПГЕ порівняно з непрямим МГЕ, причому з бігом часу вона поліпшується. Окрім того, під час застосування МГЕ чисельні результати з наближенням до межі тіла погіршуються (з'являються значення температури, нижчі, ніж середовища, що його омиває, а це суперечить фізичному змісту задачі). Отже, під час дослідження температурних полів на межі тіла та у його внутрішніх примежових ділянках МГЕ малоєфективний. Водночас МПГЕ доцільніший, оскільки оперує додатковими параметрами, які можна змінювати, зокрема, товщину  $h$  примежової області.

Встановлено, що непрямий МПГЕ у поєднанні з покроковою часовою ССПУ забезпечує вищу точність розрахунків нестационарного температурного поля, ніж непрямий МГЕ, за використання однакової кількості елементів та однакового ступеня апроксимації невідомих інтенсивностей фіктивних джерел. Це обґрунтовуємо тим, що примежова область послаблює вплив уведених у неї джерел. Щодо вибору параметрів у непрямому МПГЕ рекомендуємо: для модельних задач з відомими аналітичними розв'язками варто виходити з апостеріорних оцінок чисельних результатів, для інших – порівнювати результати обчислень шуканих функцій у певних ділянках межі із заданими на них крайовими умовами.

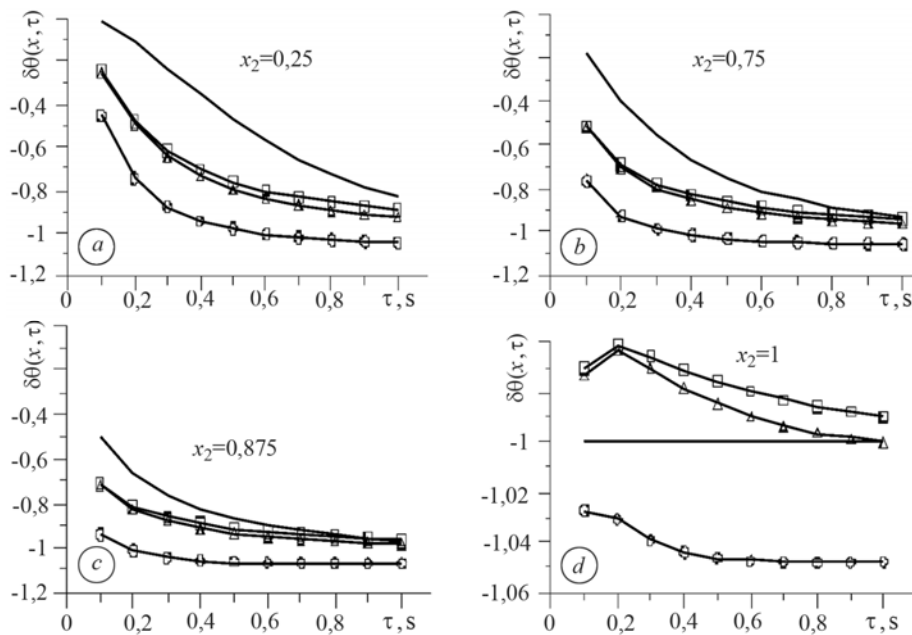


Рис. 1. Порівняння у внутрішніх (a–c) та граничних (d) точках  $(0, x_2, 0)$  паралелепіпеда відносної температури  $\delta\theta(x, \tau) = \theta^{(1\gamma)}(x, \tau) / |\theta_{\Gamma}(x, \tau)|$ , обчисленої за допомогою непрямого МПГЕ ( $\square, \Delta$  – товщина прилеглої області  $h = 2$  і  $1$  м) та непрямого МГЕ ( $\circ$ ), з аналітичним розв’язком ([9]).

Fig. 1. Comparison in internal (a–c) and boundary (d) parallelepiped points  $(0, x_2, 0)$  of relative temperature  $\delta\theta(x, \tau) = \theta^{(1\gamma)}(x, \tau) / |\theta_{\Gamma}(x, \tau)|$  calculated by indirect near-boundary element method ( $\square, \Delta$  are thickness of near-boundary domain  $h = 2$  and  $1$  m) and indirect boundary element method ( $\circ$ ) with analytical solution (curves without symbols, [9]).

Зауважимо, що аналогічні результати для статичних задач теорії пружності, двовимірних стаціонарних і нестаціонарних задач теплопровідності отримані раніше [3, 10–12]. В праці [12] вжито схему послідовності початкових умов [8], у якій кожний крок за часом розглянуто як нову задачу, тобто уведено локальний час і обчислені в кінці кожного часового інтервалу значення температури у внутрішніх точках використано як початкові для подальшого кроку.

Далі обчислювали температуру у паралелепіпеді з ребрами  $2h_1, 2h_2, 2h_3$ , одиничним коефіцієнтом теплопровідності матеріалу та коефіцієнтом теплопровідності, що лінійно залежить від температури [7]. Тоді з формули (1) одержали:

$$\lambda(\theta^{(1\gamma)}) = \lambda_1 + k\theta^{(1\gamma)}(x, \tau) S_+(\theta^{(1\gamma)} - \theta_{\lambda}^{(1\gamma)})\chi_{\theta}^{(1)}, \quad (28)$$

де  $\lambda_1 = 1 \text{ V}/(\text{m}\cdot^{\circ}\text{C})$ ,  $k = \text{const}$  – температурний коефіцієнт теплопровідності, який може набувати додатних або від’ємних значень [13]. Розглянуто нульову початкову та граничну умови (27) за відсутності джерел тепла. Оскільки під час знаходження змінної Кірхгофа непрямий МПГЕ дає точніший результат, ніж непрямий МГЕ, подали (рис. 2) значення температурного поля, отримані саме цим методом. Формула з (26) для визначення температури через змінну Кірхгофа тепер набуде вигляду [7]

$$\theta^{(1\gamma P)}(x, \tau) = \frac{1}{k}(\sqrt{1 \pm 2k\vartheta^{(1\gamma P)}} - 1),$$

де знак “+” вибираємо для додатних  $k$ , а знак “–” – для від’ємних.

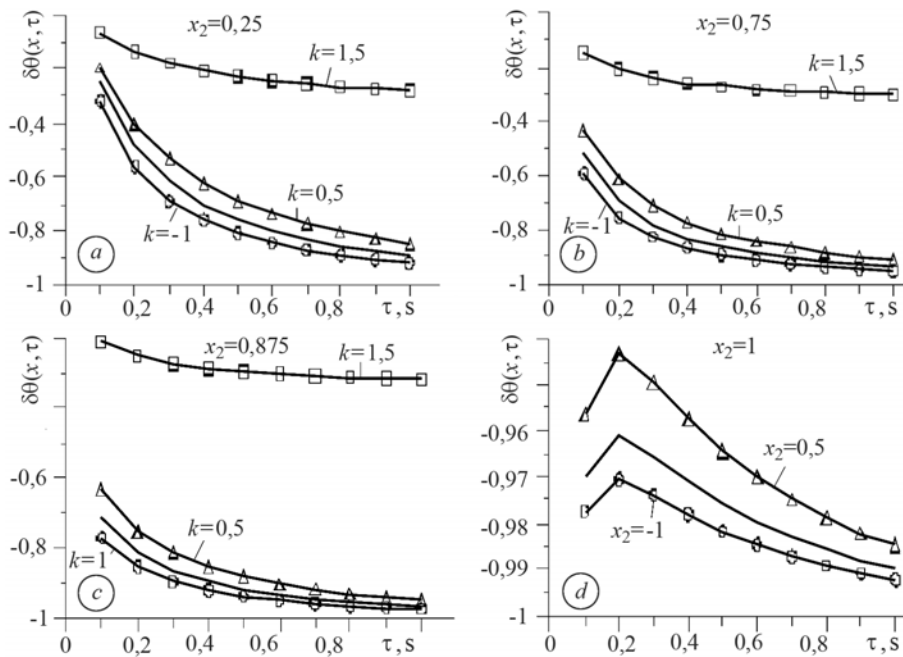


Рис. 2. Порівняння у внутрішніх (а–с) та граничних (d) точках  $(0, x_2, 0)$  паралелепіпеда відносної температури  $\delta\theta(x, \tau) = \theta^{(IG)}(x, \tau) / |\theta_{\Gamma}(x, \tau)|$ , обчисленої непрямим МПГЕ з урахуванням лінійної залежності коефіцієнта теплопровідності від температури (28) (криві зі знаками:  $\square, \Delta, \circ - k = 1,5; 0,5; -1 \text{ V}/(\text{m } (^{\circ}\text{C})^2)$  та без нього.

Fig. 2. Comparison in internal (a–c) and boundary (d) parallelepiped points  $(0, x_2, 0)$  of relative temperature  $\delta\theta(x, \tau) = \theta^{(IG)}(x, \tau) / |\theta_{\Gamma}(x, \tau)|$  calculated by indirect near-boundary element method with consideration of the linear dependence of heat conduction coefficient on temperature (28) (curves with symbols  $\square, \Delta, \circ$  for  $k = 1.5; 0.5; -1 \text{ V}/(\text{m } (^{\circ}\text{C})^2)$ ) and without it.

Отже, розглядаючи матеріали, в яких лінійну залежність коефіцієнта теплопровідності від температури можна описати з додатним температурним коефіцієнтом  $k$  (наприклад, азбест, газоскло, шамотна цегла [13]), отримуємо вищі значення температурного поля, ніж без її урахування, тобто у припущенні сталості коефіцієнта теплопровідності. Натомість, для матеріалів, в яких цю залежність можна описати з від'ємним температурним коефіцієнтом  $k$  (наприклад, магнезитова цегла, карборундові вироби, магнезійний бетон, промисловий графіт [13]), отримаємо нижчі значення температурного поля, ніж вони були б без її урахування.

## ВИСНОВКИ

Обчислювальні експерименти засвідчили доцільність поєднання непрямого МПГЕ і перетворення Кірхгофа під час моделювання нестационарних процесів теплопровідності в об'єктах з нелінійною поведінкою матеріалів, коли коефіцієнт температуропровідності області незначно залежить від температури, а також підтвердили необхідність урахування залежності коефіцієнта теплопровідності матеріалу від температури, оскільки відносна похибка значень теплового поля, отриманих з урахуванням цієї залежності і без нього, досягає 8...10% і не зменшується з бігом часу.

Отримані результати можна використати для створення сучасних методик ідентифікації включень у твердих термомпружних тілах.



**РЕЗЮМЕ.** Рассмотрено двух- или трехмерное кусочно-однородное тело произвольной формы с зависимыми от температуры теплофизическими характеристиками. На границе тела заданы условия первого, второго и третьего родов, составляющие области находятся в идеальном тепловом контакте. Предложен способ совместного использования преобразования Кирхгофа, приграничных или граничных элементов, а также пошаговой временной схемы единого начального условия для построения интегральных изображений теплового поля в произвольной пространственно-временной точке. Показано целесообразность совместного использования непрямого метода приграничных элементов с преобразованием Кирхгофа при решении нестационарных задач теплопроводности в областях с нелинейным поведением материалов.

**SUMMARY.** The bi- or three-dimensional piece-wise homogeneous solid of any shape is considered. Its heat-physical characteristics depend of the temperature. On the solid boundary surface the conditions of the first, second and third types are set. Using the Kirchhoff transformation, near-boundary and boundary element methods and the stepwise temporal scheme of a unique initial condition, the integral representations of the heat field were constructed at the arbitrary space-time point. Calculation experiments have shown the expediency of using the near-boundary element methods with Kirchhoff transformation when solving the non-stationary heat conductivity problems in domains with nonlinear material behavior.

1. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
2. Журавчак Л. М. Розв'язування просторової нестационарної задачі теплопровідності для зонально-однорідного термочутливого тіла // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 1. – С. 137–142.
3. Журавчак Л. М., Грицько Є. Г. Метод приграничних елементів у прикладних задачах математичної фізики. – Львів: Карпатське відділення ін-ту геофізики НАН України, 1996. – 220 с.
4. Беляев Н. М., Рядно А. А. Математические методы теплопроводности. – К.: Вищ. шк., 1992. – 415 с.
5. Кушнір Р. М., Попович В. С., Гарматій Г. Ю. Аналітико-чисельне розв'язування контактних задач термопружності для термочутливих тіл // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2001. – **37**, № 6. – С. 39–44.  
(Kushnir R. M., Popovych V. S., and Harmatii H. Yu., Analytic-Numerical Solution of Contact Problems of Thermoelasticity for Thermosensitive Bodies // Materials Science. – 2001. – **37**, № 6. – P. 893–901.)
6. Попович В. С., Сулим Г. Т. Центральна-симетрична квазістатична задача термопружності термочутливого тіла // Там же. – 2004. – **40**, № 3. – С. 62–68.  
(Popovych V. S. and Sulym H. T., Centrally Symmetric Quasistatic Problem of Thermoelasticity for a Temperature Sensitive Body // Materials Science. – 2004. – **40**, № 3. – P. 365–375.)
7. Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
8. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
9. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 599 с.
10. Грицько Є. Г., Журавчак Л. М. Порівняння методів граничних і приграничних елементів для розв'язування задач теорії пружності // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1997. – **33**, № 3. – С. 50–56.  
(Hryts'ko E. H. and Zhuravchak L. M., Comparison of the Methods of Boundary and Near-Boundary Elements for the Solution of Problems in the Theory of Elasticity // Materials Science. – 1997. – **33**, № 3. – P. 307–314.)
11. Журавчак Л. М. Порівняння розв'язків задач теорії пружності для різних приграничних елементів // Там же. – 2002. – **38**, № 6. – С. 79–84.  
(Zhuravchak L. M., Comparison of Solutions of the Problems of Elasticity Theory for Different Near-Boundary Elements // Materials Science. – 2002. – **38**, № 6. – P. 859–867.)
12. Михаськів В. В., Журавчак Л. М., Фітель Г. В. Використання граничних і приграничних елементів у двовимірній моделі нестационарної теплопровідності // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 2. – С. 155–161.
13. *Теплотехнический справочник* / Под общ. ред. В. Н. Юрьева и П. Д. Лебедева. – М.: Энергия, 1976. – **2**. – 896 с.

Одержано 24.06.2009