

УДК 539.3

ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН ШАРУВАТИХ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ТІЛ ОБЕРТАННЯ ЗА КВАДРАТИЧНОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ КОЕФІЦІЄНТІВ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Р. М. КУШНИР, Ю. Б. ПРОЦЮК

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Викладено аналітично-числову методику розв'язування одновимірних статичних задач термопружності для шаруватих циліндрів і куль, що знаходяться під дією поверхневих навантажень, за різних способів нагріву з урахуванням квадратичної залежності коефіцієнтів теплопровідності та довільної інших фізико-механічних характеристик від температури. Задачі теплопровідності з використанням побудованих точних розв'язків спеціальних задач зведено, незалежно від кількості шарів, до розв'язування одного або системи двох нелінійних алгебричних рівнянь. Розв'язки задач термопружності отримано шляхом апроксимації неперервних у межах кожного шару коефіцієнтів рівнянь кусково-сталими функціями з подальшим використанням функцій Гріна задач статички для багат шарових циліндрів і куль. Числово проаналізовано температурні поля і термопружний стан у двошарових тілах, зовнішня поверхня яких нагрівається шляхом конвективно-променевого теплообміну, а внутрішня підтримується при сталій температурі.

Ключові слова: шаруваті циліндр і куля, різні способи нагрівання, температурозалежність характеристик, статичні температурні напруження.

Розв'язанню незв'язаних задач термопружності, в тому числі і з урахуванням термочутливості (залежності фізико-механічних характеристик (ФМХ) від температури) передуює, як відомо, побудова розв'язку відповідних задач теплопровідності. Під час розв'язування таких нелінійних задач теплопровідності [1–7] часто використовують підстановку Кірхгофа, причому для коефіцієнтів теплопровідності найпоширеніша лінійна залежність від температури. Однак для багатьох матеріалів необхідно враховувати складнішу, зокрема квадратичну, залежність коефіцієнтів теплопровідності [6, 8, 9]. Для побудови розв'язків задач термопружності термочутливих тіл застосовують, як і до задач термопружності для тіл із залежними від координати ФМХ, методи послідовних наближень, збурень тощо [4, 5, 7, 10, 11].

Нижче, використовуючи відомий підхід [12], виклали аналітично-числову методику розв'язування одновимірних статичних задач термопружності для шаруватих тіл обертання (циліндрів або куль), що знаходяться під дією поверхневих навантажень, за різних способів нагріву з урахуванням квадратичної залежності коефіцієнтів теплопровідності та довільної інших ФМХ від температури. Задачі теплопровідності, використовуючи побудовані за допомогою підстановки Кірхгофа і узагальнених функцій точні розв'язки відповідних рівнянь за спеціальних крайових умов, звели, незалежно від кількості шарів, до розв'язування одного або системи двох нелінійних алгебричних рівнянь. У задачах термопружності неперервні в межах кожного шару коефіцієнти рівнянь апроксимовано кусково-сталими функціями. Розв'язок задач знайдено

за допомогою функцій Гріна задач статики для багат шарових циліндрів і куль. Числово проаналізовано температурні поля і термопружний стан у двошарових тілах, зовнішня поверхня яких нагрівається шляхом конвективно-променевого теплообміну, а внутрішня підтримується при сталій температурі.

Формулювання задач теплопровідності та їх розв'язування. Розглянемо термочутливе ізотропне порожнисте багат шарове тіло обертання (куля або необмежений циліндр) з відповідними концентрично розташованими складниками, що ідеально контактують. Кожна з обмежувальних поверхонь такого тіла може підтримуватися при заданій температурі, нагріватися тепловим потоком або шляхом конвективного чи конвективно-променевого теплообміну. Вважаємо, що коефіцієнти теплопровідності матеріалу шарів квадратично залежать від температури:

$$\lambda_t^{(i)}(t) = \lambda_0^{(i)} \Lambda_i(t) = \lambda_0^{(i)} (1 + \beta_i t + \mu_i t^2), \quad (1)$$

де $\lambda_0^{(i)}, \beta_i, \mu_i = \text{const}, i = \overline{1, n}$; n – кількість складників. Обмежень на характер залежностей інших ФМХ не накладаємо. Для знаходження одновимірного стаціонарного температурного поля використовуємо систему рівнянь

$$\frac{d}{dr} \left[r^k \lambda_t^{(i)}(t_{ik}) \frac{dt_{ik}}{dr} \right] = 0, \quad (2)$$

умови контакту на поверхнях поділу

$$\left[t_{j+1,k} - t_{jk} \right]_{r=r_j} = 0, \\ \left[\lambda_t^{(j+1)}(t_{j+1,k}) \frac{dt_{j+1,k}}{dr} - \lambda_t^{(j)}(t_{jk}) \frac{dt_{jk}}{dr} \right]_{r=r_j} = 0 \quad (j = \overline{1, n-1}) \quad (3)$$

і крайові умови

$$\left[a_1(t_{1k}) \frac{dt_{1k}}{dr} + lb_1(t_{1k}) \right]_{r=r_0} = 0, \quad \left[a_n(t_{nk}) \frac{dt_{nk}}{dr} + lb_n(t_{nk}) \right]_{r=r_n} = 0. \quad (4)$$

Тут r – безрозмірна координата; $r_0 = R_0/l, r_i = R_i/l$; R_0 – внутрішній радіус тіл; R_i – зовнішній радіус i -го складника; l – характерний лінійний розмір; $k = 1, 2$ – для циліндра та кулі відповідно; функції $a_m(t), b_m(t)$ ($m = 1, n$) вибираємо відповідно до способу нагріву.

Для розв'язання задач (2)–(4) використаємо підхід [12], згідно з яким необхідно знайти спочатку точні розв'язки відповідних допоміжних задач. Тут такими задачами є системи рівнянь (2) з квадратичними залежностями коефіцієнтів теплопровідності від температури за умов контакту (3) і крайових умов

$$\lambda_t^{(1)}(t_{1k}) \frac{dt_{1k}}{dr} = -lq_0, \quad r = r_0; \quad t_n = t_c, \quad r = r_n. \quad (5)$$

Розв'язок цих допоміжних задач знаходимо способом, який охоплює:

1. **Лінеаризацію вихідних систем рівнянь.** Застосувавши до (1) підстановки Кірхгофа

$$\theta_i = \frac{1}{\lambda_0^{(i)}} \int_0^{t_i} \lambda_t^{(i)}(\zeta) d\zeta, \quad (6)$$

дістанемо такі системи рівнянь:

$$\frac{d}{dr} \left(r^k \lambda_0^{(i)} \frac{d\theta_{ik}}{dr} \right) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (7)$$

2. Формулювання умов контакту і крайових умов для змінних Кірхгофа. З (1), (6) для j -го складника отримуємо:

$$\frac{\mu_j}{3} t_j^3 + \frac{\beta_j}{2} t_j^2 + t_j = \theta_j. \quad (8)$$

Звідси з урахуванням рівності температур на поверхнях поділу одержимо першу умову контакту для змінних Кірхгофа:

$$\theta_{j+1} - \theta_j = F_j(\theta_{j+1}) \quad \text{при} \quad r = r_j, \quad (9)$$

де

$$F_j(\theta_{j+1}) \Big|_{r=r_j} = \frac{1}{3} (\mu_{j+1} - \mu_j) t_{j+1}^3 (\theta_{j+1}) \Big|_{r=r_j} + \frac{1}{2} (\beta_{j+1} - \beta_j) t_{j+1}^2 (\theta_{j+1}) \Big|_{r=r_j}. \quad (10)$$

Друга умова контакту з урахуванням (1), (6) матиме вигляд

$$\lambda_0^{(j+1)} \frac{d\theta_{j+1}}{dr} - \lambda_0^{(j)} \frac{d\theta_j}{dr} = 0. \quad (11)$$

Застосовуючи підстановку Кірхгофа до крайових умов (5), одержуємо:

$$\frac{d\theta_1}{dr} = -Q_0, \quad r = r_0; \quad \theta_n = \theta_c, \quad r = r_n, \quad (12)$$

де

$$Q_0 = \frac{lq_0}{\lambda_0^{(1)}}, \quad \theta_c = t_c + \beta_n t_c^2 / 2 + \mu_n t_c^3 / 3.$$

3. Відшукування обернених залежностей $t_i = t_i(\theta_i)$. Виконаємо у рівнянні (8) заміну змінних:

$$t_i = y_i - \frac{\beta_i}{2\mu_i}. \quad (13)$$

У результаті одержимо:

$$y_i^3 + p_i y_i + q_i = 0, \quad (14)$$

де

$$p_i = -\frac{3\beta_i^2}{4\mu_i^2} + \frac{3}{\mu_i}; \quad q_i = \frac{\beta_i^3}{4\mu_i^3} - \frac{3\beta_i}{2\mu_i^2} - \frac{3}{\mu_i} \theta_i. \quad (15)$$

Відомо, що коли $Q_i = \left(\frac{p_i}{3} \right)^3 + \left(\frac{q_i}{2} \right)^2 > 0$, то кубічне рівняння (14) має один дійсний корінь або три – у протилежному випадку. Якщо для нього існує єдиний дійсний корінь, то визначатимемо його за формулою Кардано:

$$y_i = A_i + B_i, \quad (16)$$

де

$$A_i = \sqrt[3]{-\frac{q_i}{2} + \sqrt{Q_i}}; \quad B_i = \sqrt[3]{-\frac{q_i}{2} - \sqrt{Q_i}}.$$

Якщо ж воно має три дійсні корені y_{i1}, y_{i2}, y_{i3} , то їх знаходитимемо за тригонометричними формулами Вієта:

$$y_{i1} = 2\sqrt{\frac{-p_i}{3}} \cos\left(\frac{\phi_i}{3}\right), \quad y_{i2} = 2\sqrt{\frac{-p_i}{3}} \cos\left(\frac{\phi_i + 2\pi}{3}\right), \quad y_{i3} = 2\sqrt{\frac{-p_i}{3}} \cos\left(\frac{\phi_i - 2\pi}{3}\right), \quad (17)$$

де
$$\phi_i = \arccos\left(\frac{1}{2}q_i/\sqrt{-p_i^3/27}\right).$$

Покажемо, що в інтервалі температур (T_{1i}, T_{2i}) , в якому задана залежність (1), може знаходитись не більше одного кореня рівняння (8). Розіб'ємо числову пряму t_i на проміжки монотонності лівої частини рівняння (8) (оскільки рівняння кубічне, то їх буде не більше трьох). Очевидно, що на кожному з цих проміжків може знаходитись лише один корінь рівняння (8). Так як функції $\Lambda_i(t_i)$ є похідні за t_i від лівої частини рівняння (8) і згідно з фізичним змістом

$$\Lambda_i(t_i) > 0, \quad (18),$$

то розглядатимемо лише проміжки, де є зростання. Проміжки спадання не перетинаються з інтервалом (T_{1i}, T_{2i}) , бо там нерівність (18) не виконується, оскільки похідна від спадної функції від'ємна. Тому, якщо в інтервалі (T_{1i}, T_{2i}) існує корінь, то він буде тут єдиним.

4. Перехід до одного рівняння з узагальненими похідними на змінну Кірхгофа. Введемо у розгляд функції

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_1(r) + \sum_{j=1}^{n-1} [\theta_{j+1}(r) - \theta_j(r)] S(r - r_j), \\ \lambda_0(r) &= \lambda_0^{(1)} + \sum_{j=1}^{n-1} (\lambda_0^{(j+1)} - \lambda_0^{(j)}) S(r - r_j), \end{aligned} \quad (19)$$

де $S(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ – функція Гевісайда, і замінимо системи рівнянь (7) одним

рівнянням з класичними похідними, які позначатимемо надалі символом $\frac{\tilde{d}}{dr}$:

$$\frac{\tilde{d}}{dr} \left[r^k \lambda_0(r) \frac{\tilde{d}\theta}{\tilde{d}r} \right] = 0. \quad (20)$$

Диференціюючи в узагальненому сенсі [14] перше співвідношення (19) і домножуючи отриманий вираз на $r^k \lambda_0(r)$, знаходимо:

$$r^k \lambda_0(r) \frac{d\theta}{dr} = r^k \lambda_0(r) \frac{\tilde{d}\theta}{\tilde{d}r} + \sum_{j=1}^{n-1} (\theta_{j+1} - \theta_j) \Big|_{r=r_j} r^k \lambda_0(r) \delta(r - r_j).$$

Диференціюючи далі в узагальненому сенсі отриману рівність, матимемо:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left[r^k \lambda_0(r) \frac{d\theta}{dr} \right] &= \frac{\tilde{d}}{\tilde{d}r} \left[r^k \lambda_0(r) \frac{\tilde{d}\theta}{\tilde{d}r} \right] + \sum_{j=1}^{n-1} \left(r^k \lambda_0^{(j+1)} \frac{d\theta_{j+1}}{dr} - r^k \lambda_0^{(j)} \frac{d\theta_j}{dr} \right) \Big|_{r=r_j} \delta(r - r_j) + \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} (\theta_{j+1} - \theta_j) \Big|_{r=r_j} \frac{d}{dr} \left[r^k \lambda_0(r) \delta(r - r_j) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Підставивши в (20) вираз для класичної похідної, отриманий з (21) з урахуванням умов контакту (9) та (11), дістанемо рівняння

$$\frac{d}{dr} \left[r^k \lambda_0(r) \frac{d\theta}{dr} \right] = \sum_{j=1}^{n-1} F_j(\theta_{j+1}) \Big|_{r=r_j} \frac{d}{dr} \left[r^k \lambda_0(r) \delta(r-r_j) \right], \quad (22)$$

яке має такий самий вигляд, як і для лінійної залежності коефіцієнтів теплопровідності від температури [15]. Відмінність лише у тому, що у (22) інший вираз для $F_j(\theta_{j+1}) \Big|_{r=r_j}$, $j = \overline{1, n-1}$.

5. Побудову розв'язку задачі для рівняння (22). Інтегруючи двічі рівняння (22), отримуємо:

$$\theta = \sum_{j=1}^{n-1} F_j(\theta_{j+1}) \Big|_{r=r_j} S(r-r_j) + C_1 f_k(r) + C_2, \quad (23)$$

де

$$f_1(r) = \ln r + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\lambda_0^{(1)}}{\lambda_0^{(j+1)}} - \frac{\lambda_0^{(1)}}{\lambda_0^{(j)}} \right) \ln \frac{r}{r_j} S(r-r_j) - \text{для циліндра};$$

$$f_2(r) = -\frac{1}{r} - \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\lambda_0^{(1)}}{\lambda_0^{(j+1)}} - \frac{\lambda_0^{(1)}}{\lambda_0^{(j)}} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_j} \right) S(r-r_j) - \text{для кулі}.$$

Підставивши у (23) вирази для сталих інтегрування C_1, C_2 , які визначені з крайових умов (12), одержимо:

$$\theta(r) = \theta_c - Q_0 r_0^k [f_k(r) - f_k(r_n)] - \sum_{j=1}^{n-1} F_j(\theta_{j+1}) \Big|_{r=r_j} S(r_j - r). \quad (24)$$

Для знаходження значень $F_j(\theta_{j+1}) \Big|_{r=r_j}$ ($j = \overline{1, n-1}$) надамо в (24) аргументу функції $\theta(r)$ послідовно значень $r = r_{n-1} + 0, r = r_{n-2} + 0, \dots, r = r_1 + 0$. Тоді:

$$\theta_n(r_{n-1}) = \theta_c - Q_0 r_0^k [f_k(r_{n-1}) - f_k(r_n)],$$

$$\theta_{n-1}(r_{n-2}) = \theta_c - Q_0 r_0^k [f_k(r_{n-2}) - f_k(r_n)] - F_{n-1}(\theta_n) \Big|_{r=r_{n-1}},$$

.....

$$\theta_{i+1}(r_i) = \theta_c - Q_0 r_0^k [f_k(r_i) - f_k(r_n)] - \sum_{j=i+1}^{n-1} F_j(\theta_{j+1}) \Big|_{r=r_j}, \quad i = n-3, n-4, \dots, 1. \quad (25)$$

Використовуючи перше співвідношення (25), визначаємо за однією з формул (16), (17), якщо $i = n, r = r_{n-1}$, той корінь кубічного рівняння, за якого значення $t_n(\theta_n) \Big|_{r=r_{n-1}}$, обчислене за формулою (13), попадає в інтервал (T_{1i}, T_{2i}) .

Маючи це значення, на основі (10) знаходимо $F_{n-1}(\theta_n) \Big|_{r=r_{n-1}}$. Використовуючи далі друге співвідношення (25), аналогічно знаходимо $F_{n-2}(\theta_{n-1}) \Big|_{r=r_{n-2}}$. Продовжуючи цей процес, знайдемо решту значень на межах поділу. З урахуванням цих значень у межах кожного шару змінні Кірхгофа на основі (24) визначимо так:

$$\theta_i(r) = \theta_c - Q_0 r_0^k [f_k(r) - f_k(r_n)] - \sum_{j=i}^{n-1} F_j (\theta_{j+1}) \Big|_{r=r_j}. \quad (26)$$

Перехід від змінних Кірхгофа (26) до температури з інтервалу (T_{1i}, T_{2i}) здійснюємо за формулами (13), де y_i – корінь кубічного рівняння, який визначаємо за однією з формул (16), (17).

Таким чином, точні розв'язки допоміжних задач знайдено. Вони будуть розв'язками і вихідних задач, якщо значення теплового потоку q_0 і температури t_c зовнішньої поверхні будуть такі, які зумовить задана теплова дія. Ці значення обчислимо із систем двох нелінійних алгебричних рівнянь

$$\frac{a_1[t_{1k}(q_0, t_c, r_0)]}{\lambda_t^{(1)}[t_{1k}(q_0, t_c, r_0)]} q_0 = b_1[t_{1k}(q_0, t_c, r_0)], \quad \left(\frac{r_0}{r_n}\right)^k \frac{a_n(t_c)}{\lambda_t^{(n)}(t_c)} q_0 = b_n(t_c), \quad (27)$$

які отримаємо після підстановки знайдених точних розв'язків у крайові умови (4). Якщо теплову дію описує одна з крайових умов (5), то розв'язок вихідних задач зведемо до розв'язання одного з рівнянь (27).

Постава та побудова розв'язку задач термопружності. Для визначення температурних напружень у тілах, які знаходяться під дією поверхневих навантажень, використаємо залежності

$$\sigma_r^{(k)} = c^{(k)}(r) \left[\frac{du^{(k)}}{dr} + k \frac{v^{(k)}(r)}{1-v^{(k)}(r)} \frac{u^{(k)}}{r} \right] - \frac{E^{(k)}(r) \Phi^{*(k)}(r)}{1-2v^{(k)}(r)},$$

$$\sigma_\varphi^{(k)} = c^{(k)}(r) \left[\frac{v^{(k)}(r)}{1-v^{(k)}(r)} \frac{du^{(k)}}{dr} + \left(\frac{1}{1-v^{(k)}(r)} \right)^{k-1} \frac{u^{(k)}}{r} \right] - \frac{E^{(k)}(r) \Phi^{*(k)}(r)}{1-2v^{(k)}(r)}, \quad (28)$$

де переміщення $u^{(k)} = u^{(k)}(r)$ задовольняє рівняння рівноваги для неоднорідних тіл із кусково-неперервними коефіцієнтами

$$\frac{d}{dr} \left[c^{(k)}(r) \frac{du^{(k)}}{dr} \right] + k \frac{d}{dr} \left[c^{(k)}(r) \frac{v^{(k)}(r)}{1-v^{(k)}(r)} \frac{u^{(k)}}{r} \right] +$$

$$+ k c^{(k)}(r) \frac{1-2v^{(k)}(r)}{1-v^{(k)}(r)} \frac{1}{r} \left(\frac{du^{(k)}}{dr} - \frac{u^{(k)}}{r} \right) = \frac{d}{dr} \left[\frac{E^{(k)}(r)}{1-2v^{(k)}(r)} \Phi^{*(k)}(r) \right] \quad (29)$$

і крайові умови

$$\sigma_r^{(k)}(r_0) = -\sigma_{01}^{(k)}, \quad \sigma_r^{(k)}(r_n) = -\sigma_{0n}^{(k)}. \quad (30)$$

Тут $c^{(k)}(r) = \frac{E^{(k)}(r)[1-v^{(k)}(r)]}{[1+v^{(k)}(r)][1-2v^{(k)}(r)]}$; $E^{(k)}(r)$, $v^{(k)}(r)$, $\Phi^{*(k)}(r)$ – кусково-неперервні функції, які в межах i -го складника збігаються відповідно з $E_i^{(k)}(r) =$

$$= E_i(t_i^{(k)}), \quad v_i^{(k)}(r) = v_i(t_i^{(k)}), \quad \Phi_i^{*(k)}(r) = \int_0^{t_i^{(k)}(r)} \alpha_{ii}(\zeta) d\zeta; \quad E_i(t_i^{(k)}), v_i(t_i^{(k)}), \alpha_{ii}(t_i^{(k)})$$

– модулі пружності, коефіцієнти Пуассона та лінійного теплового розширення i -го шару.

Задачу (29), (30) розв'язуємо аналогічно [12]. Апроксимуючи неперервні функції $E_i^{(k)}(r)$, $v_i^{(k)}(r)$ кусково-сталими, прийдемо до задач термопружності

для багат шарових циліндра та кулі з $N = \sum_{j=1}^n n_j$ складниками, в яких від температури залежать лише коефіцієнти лінійного теплового розширення (n_j – кількість частин, на які поділений j -й шар n -шарового циліндра та кулі). Розв'язки їх отримаємо з використанням праці [16]. Температурні переміщення та напруження в p -му шарі N -шарових циліндра (із закріпленими торцями) та кулі визначаємо за формулами

$$u_p^{(k)} = u_p^{(tk)} + u_p^{(yk)}, \quad \sigma_{rp}^{(k)} = \sigma_{rp}^{(tk)} + \sigma_{rp}^{(yk)}, \quad \sigma_{\varphi p}^{(k)} = \sigma_{\varphi p}^{(tk)} + \sigma_{\varphi p}^{(yk)}. \quad (31)$$

Тут

$$u_p^{(tk)} = \frac{r^{1/k}}{2q_k Q_N^{(k)} r} \left[\varphi_{2p}^{(k)}(r) S_{1p}^{(k)} + \varphi_{1p}^{(k)}(r) S_{2p}^{(k)} \right] + \frac{1 + \tilde{\nu}_p^{(k)}}{1 - \tilde{\nu}_p^{(k)}} \frac{1}{r} V_p^{(k)}(r),$$

$$u_p^{(yk)} = \frac{r^{1/k}}{Q_N^{(k)} r} \left[\left(\frac{r_0^2}{r_{p-1}} \right)^{q_k} \varphi_{2p}^{(k)}(r) \frac{\sigma_{01}^{(k)}}{\tilde{c}_p^{(k)}} - \frac{1}{2q_k} r_p^{q_k} \varphi_{1p}^{(k)}(r) \frac{\sigma_{0n}^{(k)}}{\tilde{c}_N^{(k)}} \right]; \quad (32)$$

$$\sigma_{rp}^{(tk)} = \frac{\tilde{c}_p^{(k)}}{2q_k Q_N^{(k)} r^{q_k}} \left[g_{2p}^{(k1)}(r) S_{1p}^{(k)} + g_{1p}^{(k1)}(r) S_{2p}^{(k)} \right] - \frac{k \tilde{E}_p^{(k)}}{1 - \tilde{\nu}_p^{(k)}} \frac{1}{r^2} V_p^{(k)}(r),$$

$$\sigma_{rp}^{(yk)} = \frac{1}{Q_N^{(k)}} \left[\left(\frac{r_0^2}{r r_{p-1}} \right)^{q_k} g_{2p}^{(k1)}(r) \sigma_{01}^{(k)} - \frac{1}{2q_k} \left(\frac{r_p}{r} \right)^{q_k} g_{1p}^{(k1)}(r) \sigma_{0n}^{(k)} \frac{\tilde{c}_p^{(k)}}{\tilde{c}_N^{(k)}} \right],$$

$$\sigma_{\varphi p}^{(yk)} = \frac{1}{Q_N^{(k)}} \left(\frac{\tilde{\nu}_p^{(k)}}{1 - \tilde{\nu}_p^{(k)}} \right)^{k-1} \left[\left(\frac{r_0^2}{r r_{p-1}} \right)^{q_k} g_{2p}^{(k2)}(r) \sigma_{01}^{(k)} - \frac{1}{2q_k} \frac{\tilde{c}_p^{(k)}}{\tilde{c}_N^{(k)}} \left(\frac{r_p}{r} \right)^{q_k} g_{1p}^{(k2)}(r) \sigma_{0n}^{(k)} \right],$$

$$\sigma_{\varphi p}^{(k)} = \frac{\tilde{c}_p^{(k)}}{2q_k Q_N^{(k)} r^{q_k}} \left(\frac{\tilde{\nu}_p^{(k)}}{1 - \tilde{\nu}_p^{(k)}} \right)^{k-1} \left[g_{2p}^{(k2)}(r) S_{1p}^{(k)} + g_{1p}^{(k2)}(r) S_{2p}^{(k)} \right] +$$

$$+ \frac{\tilde{E}_p^{(k)}}{1 - \tilde{\nu}_p^{(k)}} \left[\frac{1}{r^2} V_p^{(k)}(r) - \Phi_p^{*(k)}(r) \right], \quad p = \overline{1, N}, \quad (33)$$

де

$$\varphi_{1p}^{(k)}(r) = M_{1p}^{(k)+} \left(\frac{r}{r_p} \right)^{q_k} + M_{1p}^{(k)-} \left(\frac{r_{p-1}^2}{r r_p} \right)^{q_k};$$

$$\varphi_{2p}^{(k)}(r) = M_{2p}^{(k)+} \left(\frac{r_{p-1}}{r} \right)^{q_k} - M_{2p}^{(k)-} \left(\frac{r r_{p-1}}{r_p^2} \right)^{q_k};$$

$$g_{2p}^{(km)}(r) = -d_{mp}^{(k)-} M_{2p}^{(k)+} \left(\frac{r_{p-1}}{r} \right)^{q_k} - d_{mp}^{(k)+} M_{2p}^{(k)-} \left(\frac{r r_{p-1}}{r_p^2} \right)^{q_k},$$

$$g_{1p}^{(km)}(r) = d_{mp}^{(k)+} M_{1p}^{(k)+} \left(\frac{r}{r_p} \right)^{q_k} - d_{mp}^{(k)-} M_{1p}^{(k)-} \left(\frac{r_{p-1}^2}{r r_p} \right)^{q_k}, \quad m = 1, 2;$$

$$V_p^{(k)}(r) = r^{1-k} \int_{r_{p-1}}^r \rho^k \Phi^{*(k)}(\rho) d\rho; \quad q_1 = 1; \quad q_2 = 3/2;$$

$$M_{11}^{(k)\pm} = 2q_k(q_k \mp \beta_{k1}); M_{1p}^{(k)\pm} = \Phi_{p-1}^{(k0)}(r_{p-1})(q_k \pm K_p^{(k)}) \pm \Phi_{p-1}^{(k1)}(r_{p-1})K_{cp}^{(k)}, p = \overline{2, N};$$

$$M_{2p}^{(k)\pm} = \kappa_{N,p}^{(k2)} + \beta_{kN}\kappa_{N,p}^{(k1)} \pm q_k(\kappa_{N,p}^{(k4)} + \beta_{kN}\kappa_{N,p}^{(k3)}); Q_N^{(k)} = \Phi_N^{(k1)}(r_N) + \beta_{kN}\Phi_N^{(k0)}(r_N);$$

$$\Phi_1^{(km)}(r) = [q_k - \beta_{k1} + (-1)^m(q_k + \beta_{k1})(r_0/r)^{2q_k}]q_k^m,$$

$$\Phi_p^{(km)}(r) = \Phi_{p-1}^{(k0)}(r_{p-1})f_{p1}^{(km)}(r) + \Phi_{p-1}^{(k1)}(r_{p-1})f_{p2}^{(km)}(r),$$

$$f_{p1}^{(km)}(r) = q_k^{m-1} \frac{1}{2} [q_k + K_p^{(k)} + (-1)^m(q_k - K_p^{(k)})(r_{p-1}/r)^{2q_k}],$$

$$f_{p2}^{(km)}(r) = q_k^{m-1} K_{cp}^{(k)} \frac{1}{2} [1 - (-1)^m(r_{p-1}/r)^{2q_k}], m = 0, 1;$$

$$\kappa_{N,p}^{(k1)} = f_{N1}^{(k0)}(r_N)\kappa_{N-1,p}^{(k1)} + f_{N2}^{(k0)}(r_N)\kappa_{N-1,p}^{(k2)},$$

$$\kappa_{N,p}^{(k2)} = f_{N1}^{(k1)}(r_N)\kappa_{N-1,p}^{(k1)} + f_{N2}^{(k1)}(r_N)\kappa_{N-1,p}^{(k2)},$$

$$\kappa_{N,p}^{(k3)} = f_{N1}^{(k0)}(r_N)\kappa_{N-1,p}^{(k3)} + f_{N2}^{(k0)}(r_N)\kappa_{N-1,p}^{(k4)},$$

$$\kappa_{N,p}^{(k4)} = f_{N1}^{(k1)}(r_N)\kappa_{N-1,p}^{(k3)} + f_{N2}^{(k1)}(r_N)\kappa_{N-1,p}^{(k4)};$$

$$\kappa_{p+1,p}^{(k1)} = f_{p+1,1}^{(k0)}(r_{p+1}), \kappa_{p+1,p}^{(k2)} = f_{p+1,1}^{(k1)}(r_{p+1}),$$

$$\kappa_{p+1,p}^{(k3)} = f_{p+1,2}^{(k0)}(r_{p+1}), \kappa_{p+1,p}^{(k4)} = f_{p+1,2}^{(k1)}(r_{p+1}), p < N;$$

$$\kappa_{N,N}^{(k1)} = \kappa_{N,N}^{(k4)} = 1, \kappa_{N,N}^{(k2)} = \kappa_{N,N}^{(k3)} = 0;$$

$$S_{1p}^{(k)} = \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\tilde{c}_j^{(k)}}{\tilde{c}_p^{(k)}} M_{1j}^{(k)+} P_{jp}^{(k)} J_j^{(k)}(r_j),$$

$$S_{2p}^{(k)} = - \sum_{j=p+1}^n (r_{j-1}/r_j)^{q_k} M_{2j}^{(k)-} P_{pj}^{(k)} J_j^{(k)}(r_j) - M_{2p}^{(k)-} J_p^{(k)}(r_p);$$

$$P_{jp}^{(k)} = (r_j/r_{p-1})^{q_k}; J_p^{(k)}(r) = \frac{1 + \tilde{v}_p^{(k)}}{1 - \tilde{v}_p^{(k)}} r^{-1/k} V_p^{(k)}(r);$$

$$K_p^{(k)} = K_{cp}^{(k)}\beta_{k,p-1} - \beta_{kp}, K_{cp}^{(k)} = \frac{\tilde{c}_{p-1}^{(k)}}{\tilde{c}_p^{(k)}}, \tilde{c}_p^{(k)} = \frac{\tilde{E}_p^{(k)}(1 - \tilde{v}_p^{(k)})}{(1 + \tilde{v}_p^{(k)})(1 - 2\tilde{v}_p^{(k)})};$$

$$2\beta_{2p} = \frac{5\tilde{v}_p^{(2)} - 1}{1 - \tilde{v}_p^{(2)}}, d_{1p}^{(2)-} = 2 \frac{1 - 2\tilde{v}_p^{(2)}}{1 - \tilde{v}_p^{(2)}}, d_{1p}^{(2)+} = \frac{1 + \tilde{v}_p^{(2)}}{1 - \tilde{v}_p^{(2)}}, d_{2p}^{(2)-} = \frac{2\tilde{v}_p^{(2)} - 1}{\tilde{v}_p^{(2)}};$$

$$d_{2p}^{(2)+} = \frac{1 + \tilde{v}_p^{(2)}}{\tilde{v}_p^{(2)}}; \beta_{1p} = \frac{\tilde{v}_p^{(1)}}{1 - \tilde{v}_p^{(1)}}, d_{mp}^{(1)+} = \frac{1}{1 - \tilde{v}_p^{(1)}}, d_{mp}^{(1)-} = (-1)^{m+1} \frac{1 - 2\tilde{v}_p^{(1)}}{1 - \tilde{v}_p^{(1)}};$$

$$\tilde{E}_p^{(k)} = E^{(k)}(r_p^*), \tilde{v}_p^{(k)} = v^{(k)}(r_p^*), r_{p-1} < r_p^* < r_p.$$

Числові приклади. У двошарових циліндрі та кулі, ФМХ першого шару яких відповідають молібдену, а другого – вольфраму, досліджували температу-

ру та напруження $\sigma_{\beta}^* = \frac{\sigma_{\beta\beta}}{E_1(0)\alpha_t^{(1)}(0)t_c^-}$ ($\beta = r, \varphi$) за крайових умов

$$t_{1k}|_{r=r_0} = t_c^-, \left[\lambda_t^{(n)}(t_{nk}) \frac{dt_{nk}}{dr} + l\alpha_n(t_{nk})(t_{nk} - t_c^+) + l\gamma_n(t_{nk}^4 - (t_c^+)^4) \right]_{r=r_n} = 0$$

при $r_0 = 0,25$; $r_1 = 0,5$; $r_2 = 1,0$; $\alpha_n(t) = (100000 + 2t)$ W/(m²·°C); $t_c^- = 20$ °C; $t_c^+ = 1900$ °C; $\gamma_n = 1,67 \cdot 10^{-8}$ W/(m²·°C⁴). Температурні залежності ФМХ матеріалів вибрали у вигляді

$$\lambda_t^{(1)}(t) = (142,984 - 577,203 \cdot 10^{-4}t + 169,266 \cdot 10^{-7}t^2)$$
 W/(m·°C),

$$E_1(t) = (3,22 \cdot 10^{11} - 0,41 \cdot 10^8t + 990,61t^2 - 4,93t^3)$$
 Pa, $\alpha_{t1}(t) = (5,19 \cdot 10^{-6} + 1,91 \cdot 10^{-9}t - 3,696 \cdot 10^{-14}t^2 + 3,857 \cdot 10^{-17}t^3)$ °C⁻¹, $\nu_1 = 0,337 + 0,96410^{-4}t - 0,112 \cdot 10^{-6}t^2 + 0,35 \cdot 10^{-10}t^3$, $\lambda_t^{(2)}(t) = (160,42 - 721,31 \cdot 10^{-4}t + 232,28 \cdot 10^{-7}t^2)$

W/(m·°C), $E_2(t) = (4,04 \cdot 10^{11} - 0,45 \cdot 10^8t + 18599,27t^2 - 10,4t^3)$ Pa,

$$\alpha_{t2}(t) = (4,572 \cdot 10^{-6} + 1,152 \cdot 10^{-11}t + 6,064 \cdot 10^{-13}t^2 + 1,41 \cdot 10^{-17}t^3)$$
 °C⁻¹,

$\nu_2 = 0,256 + 0,273 \cdot 10^{-4}t + 0,525 \cdot 10^{-8}t^2 - 0,535 \cdot 10^{-11}t^3$, для отримання яких використали табличні дані [17] і метод найменших квадратів.

Досліджували також термопружний стан за лінійних залежностей коефіцієнтів теплопровідності $\lambda_t^{(1)}(t) = (131,954 - 221,824 \cdot 10^{-4}t)$ W/(m·°C), $\lambda_t^{(2)}(t) = (145,278 - 233,619 \cdot 10^{-4}t)$ W/(m·°C) (рис. 1) та сталей, коли в одному випадку вони набували значення квадратичних залежностей при нульовій температурі, у другому – такі середні значення: $\lambda_t^{(1)} = 111,686$ W/(m·°C), $\lambda_t^{(2)} = 123,933$ W/(m·°C).

Система алгебричних рівнянь (27) має вигляд

$$t_{1k}(q_0, t_c, r_0) - t_c^- = 0, \\ -q_0 r_0^k + \alpha_n(t_c)(t_c - t_c^+) + \gamma_n[t_c^4 - (t_c^+)^4] = 0.$$

Розв'язок отримано методом Ньютона. Розподіл температури і напружень за товщиною подано на рис. 2 і 3. Суцільні лінії – квадратична залежність коефіцієнтів теплопровідності, штрихові – лінійна, а штрихпунктирні – сталі коефіцієнтам теплопровідності (криві 1, 2 побудовані відповідно для першого і другого випадків).

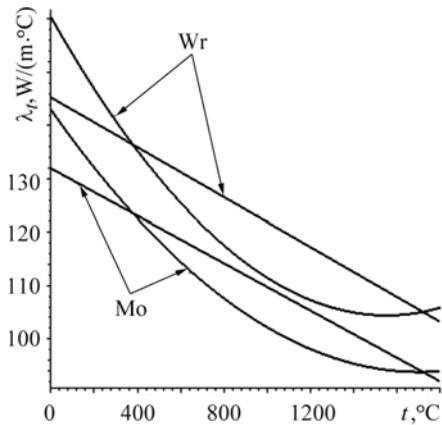


Рис. 1. Температурні залежності коефіцієнтів теплопровідності молібдену і вольфраму.

Fig. 1. Temperature dependence of the heat conductivity coefficients for molybdenum and tungsten.

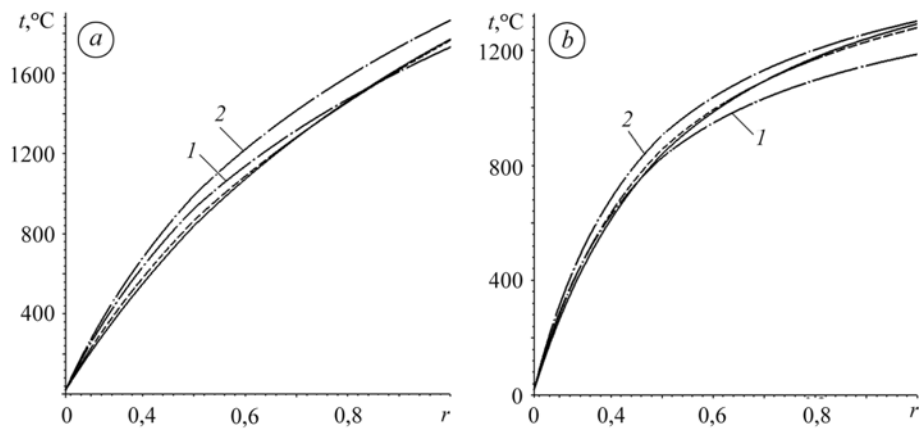


Рис. 2. Зміна температури по товщині двошарових циліндра (а) і кулі (b).

Fig. 2. Temperature distribution across the thickness of two-layered cylinder (a) and a sphere (b).

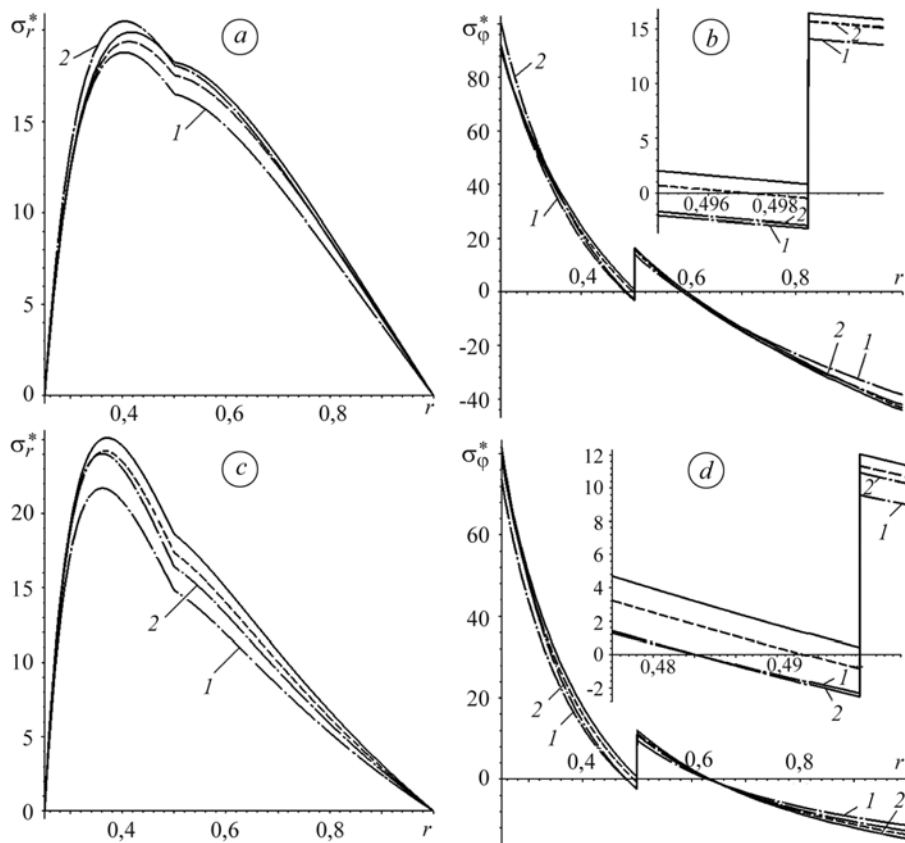


Рис. 3. Зміна радіальних (а, с) і колових (b, d) напружень по товщині двошарових циліндра (а, b) і кулі (с, d).

Fig. 3. Radial (a, c) and circular (b, d) stress distribution across the thickness of two-layered cylinder (a, b) and a sphere (c, d).

Розподіл температур за лінійної і квадратичної залежностей практично однаковий, проте відчутна різниця за сталих коефіцієнтів теплопровідності: для кулі він точніший за їх середніх значень у зовнішній приповерхневій області,

поза цією областю, як і для циліндра – за квадратичних залежностей при нульовій температурі. Максимальна різниця на зовнішніх поверхнях.

Радіальні напруження як у циліндрі, так і в кулі у внутрішніх точках розтягувальні і досягають свого максимуму всередині першого шару. У кулі він дещо ближче до внутрішньої поверхні. За сталих коефіцієнтів теплопровідності розподіл точніший за їх середніх значень. Колові напруження за лінійної залежності і за сталих коефіцієнтів теплопровідності переходять із розтягувальних на внутрішній поверхні у стискальні на поверхні поділу. За квадратичної залежності по всій товщині шару вони розтягувальні. На внутрішніх поверхнях колові напруження у циліндрі за квадратичних залежностей при нульовій температурі більші, ніж для інших коефіцієнтів теплопровідності, у кулі за середніх значень менші, ніж для інших коефіцієнтів теплопровідності. На зовнішніх поверхнях абсолютні значення колових напружень за квадратичних залежностей при нульовій температурі коефіцієнтів теплопровідності менші, ніж для інших коефіцієнтів.

ВИСНОВКИ

Запропонована методика дає змогу з єдиних позицій будувати ефективні розв'язки одновимірних статичних задач термопружності для шаруватих куль і необмежених порожнистих циліндрів за різних способів нагріву з урахуванням квадратичної залежності коефіцієнтів теплопровідності, довільних залежностей інших ФМХ від температури та поверхневих навантажень.

РЕЗЮМЕ. Предложена аналитико-численная методика решения одномерных статических задач термоупругости для слоистых цилиндра и шара, которые находятся под действием поверхностных нагрузжений, при разных способах нагрева с учетом квадратичной зависимости коэффициентов теплопроводности и произвольного характера зависимости остальных физико-механических характеристик от температуры. Задачи теплопроводности с использованием построенных точных решений специальных задач сведены, независимо от количества слоев, к решению одного или систем двух нелинейных алгебраических уравнений. Решения задач термоупругости получено путем аппроксимации непрерывных в пределах каждого слоя коэффициентов уравнений кусочно-постоянными функциями с последующим использованием функций Грина задач статики для многослойных цилиндра и шара. Численно проанализированы температурные поля и термоупругое состояние двухслойных тел, через внешнюю поверхность которых осуществляется конвективно-лучистый теплообмен, а внутренняя поддерживается при постоянной температуре.

SUMMARY. Analytical-numerical method of solving one-dimensional static problems for layered body of revolution (shallow cylinder and sphere) is proposed. They are subjected to the influence of surface loads with different ways of heating. The method takes into account the quadratic dependence of heat conductivity coefficients and arbitrary dependence of other physical and mechanical characteristics on a temperature. Heat conduction problems were reduced to the system of two nonlinear algebraic equations regardless of the number of layers by utilizing exact solutions of the corresponding problems with special boundary conditions. To obtain solutions of thermoelasticity problems, equations coefficients continuous within every layer are approximated by piecewise constant functions and then Green's functions for static problems for a cylinder and a sphere are used. The numerical analysis of temperatures and thermal stresses in two-layered bodies with convective-radiation heat exchange on the outer surface and a constant temperature on the inner one is carried out.

1. *Беляев Н. М., Рядно А. А.* Методы теории теплопроводности: Уч. пос. для вузов: в 2-х ч. – М.: Высш. шк., 1982. – Ч. 2. – 304 с.
2. *Березовский А. А.* Лекции по нелинейным краевым задачам математической физики: в 2-х ч. – К.: Наук. думка, 1976. – Ч. 2. – 292 с.
3. *Коздоба Л. А.* Методы решения нелинейных задач теплопроводности. – М.: Наука, 1975. – 226 с.

4. *Коляно Ю. М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
5. *Ломакин В. А.* Теория упругости неоднородных тел. – М.: Изд-во МГУ, 1976. – 367 с.
6. *Постольник Ю. С., Огурцов А. П.* Нелінійна прикладна термомеханіка. – К.: НМЦ ВО МОНУ, 2000. – 280 с.
7. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – К.: Наук. думка, 1972. – 308 с.
8. *Argeso H. and Eraslan A. N.* A simple computational model for unified treatment of a class of plane strain thermoplastic stress problems // Proc. 6th Int. Congress on Thermal Stresses, Vienna, Austria. – 2005. – **1**. – P. 203–206.
9. *Ootao Y., Tanigawa O., and Ishimaru O.* Optimization of material composition of functionality graded plate for thermal stress relaxation using a genetic algorithm // J. Thermal Stresses. – 2000. – **23**. – P. 257–271.
10. *Kushnir R. M., Popovych V. S., and Vovk O. M.* The thermoelastic state of a thermosensitive sphere and space with a spherical cavity subject to complex heat exchange // J. Eng. Mathematics. – 2008. – **61**, № 2–4. – P. 357–369.
11. *Obata Y. and Noda N.* Steady thermal stresses in hollow circular cylinder and hollow sphere of a functionally gradient material // J. Thermal Stresses. – 1994. – **17**, № 3. – P. 471–487.
12. *Кушнір Р. М., Процюк Ю. Б.* Термопружний стан шаруватих термочутливих циліндрів і куль за конвективно-променевого теплообміну // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2008. – Вип. 8. – С. 103–112.
13. *Кушнір Р. М., Процюк Ю. Б.* Температурні поля в шаруватих тілах канонічної форми за лінійної температурної залежності коефіцієнтів теплопровідності // машинознавство. – 2009. – № 1. – С. 13–18.
14. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
15. *Процюк Б. В.* Моделювання та визначення з використанням побудованих функцій Гріна термопружного стану шаруватих тіл: Автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук. – Львів, 2006. – 40 с.
16. *Процюк Б. В.* Застосування методу функцій Гріна до визначення термопружного стану шаруватих трансверсально-ізотропних сферичних тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 3. – С. 95–109.
17. *Зиновьев В. Е.* Теплофизические свойства металлов при высоких температурах: Справ. – М.: Металлургия, 1989. – 384 с.

Одержано 14.10.2009