

УДК 539.3

## РОЗКЛИНЮВАННЯ КРАЙОВОЇ ТРІЩИНИ У ПРУЖНОМУ КЛИНІ

К. М. НЕКИСЛИХ<sup>1</sup>, В. І. ОСТРИК<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Сумський державний педагогічний університет ім. А. С. Макаренка;

<sup>2</sup> Інститут прикладної фізики НАН України, Суми

Розглянуто задачу про розклинювання пружного клина вздовж крайової тріщини жорстким клином. Із застосуванням методу Вінера–Гопфа отримано аналітичний розв’язок задачі. Знайдено коефіцієнт інтенсивності напружень, розподіл напружень на продовженні тріщини, в зоні контакту, а також колові переміщення берегів тріщини.

**Ключові слова:** напруження, пружний клин, тріщина, контакт, розклинювання.

Задачі про розклинювання пружної півплощини жорстким клином уздовж крайової тріщини, перпендикулярної до межі півплощини, вивчали раніше [1–3]. Отримано [1, 2] асимптотичний розв’язок, задачу наближено розв’язано [3] в квадратурах за допомогою спеціальної апроксимації ядра сингулярного інтегрального рівняння. Також одержано [4] асимптотичний розв’язок задачі про розклинювання пружного клина жорсткою пластиною сталої товщини. Огляд інших задач про розклинювання пружної площини, смуги та півсмуги міститься у довіднику [5].

Нижче розглянуто задачу про розклинювання пружного клина жорстким клином уздовж крайової тріщини, яка знаходиться на осі симетрії пружного клина і виходить до його вершини. Із застосуванням методу Вінера–Гопфа отримано аналітичний розв’язок задачі. Знайдено розмір зони контакту, коефіцієнт інтенсивності напружень, розподіл напружень на продовженні тріщини та в області контакту, колові переміщення берегів тріщини.

**Постава задачі.** Розглянемо пружний клин з кутом біля вершини  $2\alpha$ , який має тріщину довжиною  $l$  на бісектрисі кута (рис. 1). Пружний клин розклинюється жорстким з кутом при вершині  $2\varepsilon$ , глибина занурення якого  $d$ . Грані жорсткого клина контактують з берегами тріщини  $\vartheta = \pm 0$  на проміжку  $0 \leq r < l_1$ , де  $l_1$  – невідомий розмір зони контакту. Сили тертя в зоні контакту не враховуємо. Грані пружного клина  $0 \leq r < \infty$ ,  $\vartheta = \pm\alpha$  та береги тріщини поза областю контакту ( $l_1 < r < l$ ) вільні від напружень.

Оскільки напружено-деформований стан клина симетричний відносно його осі, обмежимося розглядом верхнього півклина  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \vartheta \leq \alpha$ . Нехай під час деформації початок полярної системи координат залишається зв’язаним з вершиною півклина, а полярна вісь  $p$  – паралельною до осі симетрії клина. Це обумовлено вимогою обернення в нуль нормальних переміщень у вершині клина, необхідною для використання інтегрального перетворення Мелліна. Мішані крайові умови на межі верхнього півклина запишемо у вигляді

$$u_{\vartheta}|_{\vartheta=0} = -\varepsilon r \quad (0 \leq r \leq l_1), \quad \sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=0} = 0 \quad (l_1 < r < l), \quad u_{\vartheta}|_{\vartheta=0} = -d\varepsilon \quad (l \leq r < \infty),$$

$$\tau_{r\vartheta}|_{\vartheta=0} = 0, \quad \sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} = 0, \quad \tau_{r\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} = 0 \quad (0 \leq r < \infty). \quad (1)$$

Контактна особа: В. І. ОСТРИК, e-mail: ostrik\_v@rambler.ru

### Інтегральне рівняння задачі.

Введемо невідому функцію радіальної похідної нормальних переміщень верхнього берега тріщини:

$$g(r) = \frac{\partial u_g}{\partial r} \Big|_{\vartheta=0} \quad (l_1 < r < l). \quad (2)$$

Тоді, замінивши у крайових умовах (1) перші три умови мішаного типу однією

$$\frac{\partial u_g}{\partial r} \Big|_{\vartheta=0} = \begin{cases} -\varepsilon, & 0 \leq r \leq l_1, \\ g(r), & l_1 < r < l, \\ 0, & l \leq r < \infty, \end{cases} \quad (3)$$

перейдемо до крайової задачі з четвертою, п'ятою та шостою умовами (1) і умовою (3). Розв'язавши останню задачу з використанням інтегрального перетворення Мелліна, отримаємо:

$$\frac{\sigma_g}{2G} \Big|_{\vartheta=0} = -\frac{m}{m-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\lambda(s)}{\Delta(s)} a(s) r^{-s-1} ds, \quad \frac{\partial u_g}{\partial r} \Big|_{\vartheta=0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} a(s) r^{-s-1} ds, \quad (4)$$

$$\lambda(s) = \sin^2 s\alpha - s^2 \sin^2 \alpha, \quad \Delta(s) = \sin 2s\alpha + s \sin 2\alpha,$$

де  $G$  – модуль зсуву;  $m$  – число Пуассона;  $c$  – будь-яке дійсне число з інтервалу  $-\operatorname{Re} \delta_1 < c < \operatorname{Re} \delta_1$ , де  $\delta_1$  ( $\delta_1 \neq 1$ ) – найменший за модулем корінь рівняння  $\Delta(s) = 0$  із півплощини  $\operatorname{Re} s > 0$  ( $\operatorname{Re} \delta_1 > 1$  при  $\alpha \leq \pi/2$ ;  $0 < \delta_1 < 1$ ,  $\operatorname{Im} \delta_1 = 0$  при  $\pi/2 < \alpha < \pi$ ).

Застосовуючи до другої рівності (4) обернене перетворення Мелліна, з урахуванням умови (3) знайдемо:

$$a(s) = \int_{l_1}^l g(y) y^s dy - \frac{\varepsilon l_1^{s+1}}{s+1}.$$

Підставивши останній вираз у перше співвідношення (4) і виконавши заміни

$$s = -i\tau; \quad r = l e^{-\xi}, \quad y = l e^{-\eta}; \quad g(l e^{-\eta}) e^{-\eta} = \varphi(\eta) \quad (0 < \eta < a), \quad a = \ln(l/l_1), \quad (5)$$

матимемо:

$$\frac{\sigma_g}{2G} \Big|_{\vartheta=0} = -\frac{m}{m-1} e^{\xi} \left( \int_0^a k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta + \frac{\varepsilon e^{-a}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(\tau)}{\tau + i} e^{-i\tau(\xi - a)} d\tau \right),$$

$$k(\xi - \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-i\tau(\xi - \eta)} d\tau, \quad K(\tau) = \frac{\lambda(-i\tau)}{\Delta(-i\tau)}. \quad (6)$$

Зважаючи на відсутність полюсів функції  $K(\tau)$  у смугі  $|\operatorname{Im} \tau| < 1$ , контур інтегрування  $-\infty + ic < \tau < \infty + ic$  змістили на дійсну вісь ( $c = 0$ ). Задовольнивши другу крайову умову (1) за допомогою подання (6), отримуємо інтегральне рівняння задачі відносно функції  $\varphi(\eta)$ :

$$\int_0^a k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta = f(\xi) \quad (0 < \xi < a), \quad f(\xi) = -\frac{\varepsilon e^{-a}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(\tau)}{\tau + i} e^{-i\tau(\xi - a)} d\tau. \quad (7)$$

Після перетворення інтеграла (7) за теорією лишків праву частину інтегрального рівняння запишемо у вигляді

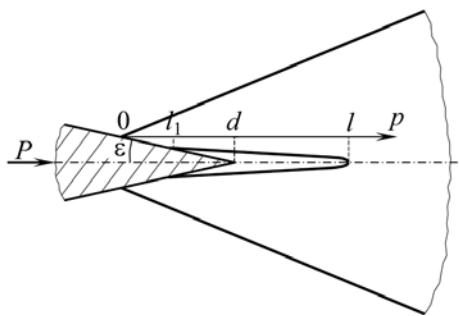


Рис. 1. Розклинювання пружного клина.

Fig. 1. Wedging of an elastic wedge.

$$f(\xi) = -\varepsilon e^{-a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(\delta_k)}{(\delta_k + 1)\Delta'(\delta_k)} e^{\delta_k(\xi-a)},$$

де  $\delta_k$  ( $k=1, 2, \dots$ ) – корені рівняння  $\Delta(s) = 0$  із півплощини  $\text{Re } s > 0$ .

**Розв'язання інтегрального рівняння.** Інтегральне рівняння (7) розв'яжемо зведенням його до нескінченної системи алгебричних рівнянь, використовуючи підхід [6].

Розповсюдимо інтегральне рівняння (7) на всю числову вісь, вважаючи  $\varphi(\eta) = 0$  для  $\eta < 0$ ,  $\eta > a$ . Застосувавши до нього інтегральне перетворення Фур'є, а також теорему про згортку, отримаємо систему функціональних рівнянь Вінера–Гопфа [7]

$$\begin{aligned} K(z)\Phi^+(z) + e^{iza}\Psi^+(z) - \Psi^-(z) &= F(z), \\ \Phi^+(z) &= e^{iza}\Phi^-(z) \quad (c^+ < \text{Im } z < c^-) \end{aligned} \quad (8)$$

з правою частиною

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a f(\xi) e^{iz\xi} d\xi = F_1^-(z) + F_2^-(z) e^{iza}, \\ F_1^-(z) &= \frac{\varepsilon e^{-a}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(\delta_k)}{(\delta_k + 1)\Delta'(\delta_k)} \frac{e^{-\delta_k a}}{\delta_k + iz}, \quad F_2^-(z) = -\frac{\varepsilon e^{-a}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(\delta_k)}{(\delta_k + 1)\Delta'(\delta_k)} \frac{1}{\delta_k + iz} \end{aligned} \quad (9)$$

відносно невідомих функцій

$$\begin{aligned} \Phi^+(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a \varphi(\xi) e^{iz\xi} d\xi, \quad \Phi^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^0 \varphi(\xi + a) e^{iz\xi} d\xi, \\ \Psi^+(z) &= -\frac{e^{-iza}}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} e^{iz\xi} d\xi \int_0^a k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta, \quad \Psi^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{iz\xi} d\xi \int_0^a k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta, \end{aligned} \quad (10)$$

аналітичних, відповідно, у півплощинах  $\text{Im } z > c^+$ ,  $\text{Im } z < c^-$  ( $c^+ < 0$ ,  $c^- > 0$ ) комплексної площини.

Для розв'язання системи функціональних рівнянь (8) факторизуємо її коефіцієнт  $K(z)$ , тобто подаємо його у вигляді

$$K(z)/z = K^+(z)K^-(z), \quad (11)$$

де  $K^\pm(z)$  – відмінні від нуля функції, аналітичні у верхній ( $\text{Im } z > c^+$ ) та нижній ( $\text{Im } z < c^-$ ) півплощинах відповідно. Факторизацію (11) здійснюємо у нескінченних добутках:

$$K^+(z) = K'(0) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{is_n}\right) \left(1 + \frac{z}{i\delta_n}\right)^{-1}, \quad K^-(z) \equiv \frac{K^+(-z)}{K'(0)}, \quad K'(0) = -i \frac{\alpha^2 - \sin^2 \alpha}{2\alpha + \sin 2\alpha},$$

де  $s_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ;  $s_1=1$ , якщо  $\alpha \neq \pi/2$ ) – корені рівняння  $\lambda(s) = 0$  із півплощини  $\text{Re } s > 0$ .

Систему функціональних рівнянь (8) з урахуванням рівностей (9), (11) перепишемо у вигляді

$$zK^+(z)\Phi^+(z) + \frac{e^{iza}}{K^-(z)}(\Psi^+(z) - F_2^-(z)) - \frac{\Psi^-(z)}{K^-(z)} = \frac{F_1^-(z)}{K^-(z)},$$

$$zK^-(z)\Phi^-(z) - \frac{e^{-iza}}{K^+(z)}(\Psi^-(z) + F_1^-(z)) + \frac{\Psi^+(z)}{K^+(z)} = \frac{F_2^-(z)}{K^+(z)}. \quad (12)$$

Другі доданки лівої частини системи рівнянь (12) подамо у вигляді різниці аналітичних функцій:

$$\frac{e^{iza}}{K^-(z)}(\Psi^+(z) - F_2^-(z)) = \chi_1^+(z) - \chi_1^-(z), \quad \frac{e^{-iza}}{K^+(z)}(\Psi^-(z) + F_1^-(z)) = \chi_2^+(z) - \chi_2^-(z). \quad (13)$$

Розвиваючи відповідні інтеграли типу Коші в ряд за теорією лишків, отримуємо:

$$\chi_1^-(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{s_k + iz} (\Psi^+(is_k) - F_2^-(is_k)) e^{-s_k a}, \quad \alpha_k = \frac{is_k \Delta(s_k) K^+(is_k)}{\lambda'(s_k)} \quad (k=1, 2, \dots),$$

$$K'(0)\chi_2^+(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{s_k - iz} (\Psi^-(-is_k) + F_1^-(-is_k)) e^{-s_k a}. \quad (14)$$

Аналогічно для правої частини системи рівнянь (12) маємо:

$$f_1^-(z) = -\frac{F_1^-(z)}{K^-(z)}, \quad \frac{F_2^-(z)}{K^+(z)} = f_2^+(z) - f_2^-(z),$$

$$f_2^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_2^-(\zeta)}{K^+(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{F_2^-(z)}{K^+(z)} + \frac{\varepsilon e^{-a}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{z+i} (K^-(-i) - izK^-(z)). \quad (15)$$

Тут права частина першого рівняння (12) є функція, аналітична у півплощині  $\text{Im } z < c^-$ . Тепер система функціональних рівнянь (8) набуває вигляду

$$zK^+(z)\Phi^+(z) + \chi_1^+(z) = \Psi^-(z)/K^-(z) + \chi_1^-(z) - f_1^-(z),$$

$$zK^-(z)\Phi^-(z) + \chi_2^-(z) + f_2^-(z) = -\Psi^+(z)/K^+(z) + \chi_2^+(z) + f_2^+(z). \quad (16)$$

Обидві частини кожного рівняння (16) аналітично продовжують одна одну на всю комплексну площину, а отже, є довільною цілою функцією. З умов на нескінченності

$$K^+(z) \sim -i\sqrt{-\frac{K'(0)}{2z}}, \quad K^-(z) \sim \frac{1}{\sqrt{-2K'(0)z}}, \quad \Phi^+(z) = o(1),$$

$$\chi_1^-(z) = O(z^{-1}), \quad \chi_2^+(z) = O(z^{-1}), \quad f_2^{\pm}(z) = O(z^{-1}), \quad |z| \rightarrow \infty \quad (17)$$

робимо висновок, що обидві частини першого рівняння (16) є константа, яку позначимо  $C$ , а обидві частини другого рівняння (через обмеженість напружень  $\sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=0}$  у точці  $r = l_1$ :  $\Phi^-(z) = O(z^{-3/2})$ ) рівні нулю.

Таким чином, розв'язок системи функціональних рівнянь (8) має вигляд

$$\Phi^+(z) = \frac{C - \chi_1^+(z)}{zK^+(z)}, \quad \Psi^-(z) = K^-(z)[f_1^-(z) - \chi_1^-(z) + C],$$

$$\Phi^-(z) = -\frac{\chi_2^-(z) + f_2^-(z)}{zK^-(z)}, \quad \Psi^+(z) = K^+(z)[\chi_2^+(z) + f_2^+(z)]. \quad (18)$$

Сталу  $C$  визначаємо з умови аналітичності функції  $\Phi^+(z)$  у точці  $z = 0$ :  $C - \chi_1^+(0) = 0$ . Враховуючи (13), (18), знаходимо:

$$C = K'(0)\chi_2^+(0) + K'(0)f_2^+(0) - F_2^-(0) + \chi_1^-(0). \quad (19)$$

Співвідношення (18), (19) не повністю визначають функції  $\Phi^\pm(z)$ ,  $\Psi^\pm(z)$ , а виражають їх через невідомі значення  $\Psi^+(is_k)$ ,  $\Psi^-(is_k)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) із (14). Для обчислення останніх у четвертій рівності (18) візьмемо  $z = is_n$ , а у другій покладемо  $z = -is_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Отримаємо нескінченну систему алгебричних рівнянь

$$z_n^+ + \beta_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k}{s_k + s_n} z_k^- \lambda^k = g_n^+, \quad z_n^- + \beta_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k}{s_k + s_n} z_k^+ \lambda^k = g_n^- \quad (n=1,2,\dots) \quad (20)$$

відносно невідомих

$$z_k^+ = \frac{\sqrt{2\pi}}{\varepsilon e^{-a}} [\Psi^+(is_k) - F_2^-(is_k)], \quad z_k^- = \frac{\sqrt{2\pi}}{\varepsilon e^{-a}} [\Psi^-(is_k) + F_1^-(is_k)] \quad (k=1,2,\dots), \quad (21)$$

в якій

$$\lambda = e^{-\pi a/(2\alpha)} = (l_1/l)^{\pi/(2\alpha)}, \quad \tilde{\alpha}_k = \alpha_k e^{(\pi k/(2\alpha) - s_k)a} \quad (k=1,2,\dots), \quad \beta_n = K^-(-is_n),$$

$$g_n^+ = \frac{-iK^-(-i)K^+(is_n)}{s_n + 1}, \quad g_n^- = K^-(-is_n) \tilde{C} \quad (n=1,2,\dots), \quad \tilde{C} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\varepsilon e^{-a}} C.$$

Розв'язок системи рівнянь (20) шукаємо у вигляді

$$z_k^\pm = \sum_{m=0}^{\infty} \xi_{km}^\pm \lambda^m \quad (k=1,2,\dots). \quad (22)$$

Підставляючи вираз (22) у систему (20), методом невизначених коефіцієнтів знаходимо

$$\xi_{n0}^+ = g_n^+, \quad \xi_{n0}^- = g_n^- \quad (n=1,2,\dots)$$

і отримуємо рекурентні співвідношення

$$\xi_{nm}^+ = -\beta_n \sum_{k=1}^m \frac{\tilde{\alpha}_k}{s_k + s_n} \xi_{k,m-k}^-, \quad \xi_{nm}^- = -\beta_n \sum_{k=1}^m \frac{\tilde{\alpha}_k}{s_k + s_n} \xi_{k,m-k}^+ \quad (n,m=1,2,\dots)$$

для визначення коефіцієнтів  $\xi_{nm}^\pm$  розвинень (22).

Права частина системи рівнянь (20) лінійна відносно  $\tilde{C}$ . Подавши її розв'язок у вигляді

$$z_k^\pm = \tilde{z}_k^\pm + \tilde{C} \tilde{z}_k^\pm,$$

із рівності (19) знаходимо:

$$C = \frac{\varepsilon e^{-a}}{\sqrt{2\pi}} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k}{s_k} (\tilde{z}_k^+ - \tilde{z}_k^-) \lambda^k - iK^+(i) \right) \left( 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k}{s_k} (\tilde{z}_k^+ - \tilde{z}_k^-) \lambda^k \right)^{-1},$$

де  $\tilde{z}_k^\pm$ ,  $\tilde{z}_k^\pm$  – розв'язки системи рівнянь (20) з правими частинами

$$\tilde{g}_n^+ = \frac{-iK^-(-i)K^+(is_n)}{s_n + 1}, \quad \tilde{g}_n^- = 0, \quad \tilde{g}_n^+ = 0, \quad \tilde{g}_n^- = K^-(-is_n) \quad (n=1,2,\dots).$$

Для визначення розміру ділянки контакту  $l_1$  (або  $\lambda$ ) скористаємося умовою відсутності стрибка переміщень у вершині тріщини ( $r = l$ ) і заданого стрибка у точці  $r = l_1$

$$\int_{l_1}^l \frac{\partial u_9}{\partial r} \Big|_{9=0} dr = -(d - l_1) \varepsilon,$$

яка завдяки співвідношенням (2), (5), (10) еквівалентна рівності  $\Phi^+(0) = -(d - l_1) \varepsilon / (\sqrt{2\pi} l)$ . Звідси, враховуючи перше співвідношення (18) і умову  $C - \chi_1^+(0) = 0$ , отримуємо

$$\left. \frac{d}{dz} \chi_1^+(z) \right|_{z=0} = \frac{K'(0)}{\sqrt{2\pi l}} (d - l_1) \varepsilon,$$

що еквівалентно рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k}{s_k^2} \left( z_k^+ + z_k^- \left( 1 - \frac{i\gamma s_k}{K'(0)} \right) \right) \lambda^k = iK'(0) \frac{d}{l} \lambda^{-2\alpha/\pi} - K^-(-i) [\gamma + iK'(0)],$$

$$\gamma = iK'(0)(a + 2\gamma_0), \quad \gamma_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (\delta_n^{-1} - s_n^{-1}).$$

**Розподіл напружень та переміщення верхнього берега тріщини.** Визначимо нормальні напруження на лінії продовження тріщини ( $l < r < \infty$ ,  $\vartheta = 0$ ).

Із першого співвідношення (6), враховуючи першу рівність (10), знаходимо:

$$\left. \frac{\sigma_{\vartheta}}{2G} \right|_{\vartheta=0} = -\frac{m}{m-1} e^{\xi} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) \Phi^+(\tau) e^{-i\tau\xi} d\tau + \frac{\varepsilon e^{-a}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(\tau)}{\tau+i} e^{-i\tau(\xi-a)} d\tau \right). \quad (23)$$

Перетворивши інтеграли із (23) в ряд за теорією лишків, якщо  $\xi < 0$ , і використовуючи рівності (18), (13), (21) та заміни (5), отримуємо:

$$\left. \frac{\sigma_{\vartheta}}{2G\varepsilon} \right|_{\vartheta=0} = -\frac{m}{m-1} \frac{l_1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(\delta_n)}{i\delta_n \Delta'(\delta_n) K^+(i\delta_n)} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k}{s_k - \delta_n} z_k^+ \lambda^k - \tilde{C} \right) \left( \frac{r}{l} \right)^{-\delta_n^{-1}} \quad (l < r < \infty).$$

Застосовуючи до рівності (23) обернене перетворення Фур'є та враховуючи другу крайову умову (1), знаходимо:

$$K(z) \Phi^+(z) = \frac{i\varepsilon e^{-a}}{\sqrt{2\pi}} \frac{K(z)}{z+i} e^{iza} - \frac{m-1}{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \left( \int_{-\infty}^0 + \int_a^{\infty} \right) e^{-\xi} \left. \frac{\sigma_{\vartheta}}{2G} \right|_{\vartheta=0} e^{iz\xi} d\xi \right].$$

Звідси, з використанням розв'язку (18), оцінок (17), а також леми Ватсона [8], отримуємо асимптотичну поведінку нормальних напружень поблизу верхньої тріщини:

$$\sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=0} \sim -\frac{2G\varepsilon m}{m-1} \frac{l_1}{l} \frac{\tilde{C}\sqrt{l}}{\sqrt{2\pi i K'(0)(r-l)}}, \quad r \rightarrow l+0. \quad (24)$$

Із асимптотичної формули (24) визначаємо коефіцієнт інтенсивності напружень:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow l+0} \sqrt{2\pi(r-l)} \sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=0} = -\frac{2G\varepsilon m}{m-1} \frac{l_1}{\sqrt{l}} \frac{\tilde{C}}{\sqrt{iK'(0)}}, \quad \tilde{C} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\varepsilon e^{-a}} C.$$

Нормальні напруження в зоні контакту ( $0 < r < l_1$ ,  $\vartheta = 0$ ) знаходимо із рівності (23). Після обчислення інтегралів за теорією лишків, якщо  $a < \xi < \infty$ , отримуємо:

$$\left. \frac{\sigma_{\vartheta}}{2G\varepsilon} \right|_{\vartheta=0} = \frac{m}{m-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(\delta_n)}{i\delta_n \Delta'(\delta_n) K^+(i\delta_n)} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k}{s_k - \delta_n} z_k^- \lambda^k - \frac{i}{\delta_n - 1} K^+(i) \right] \left( \frac{r}{l_1} \right)^{\delta_n^{-1}} \quad (0 < r < l_1).$$

Знайдемо нормальні переміщення верхнього берега тріщини поза ділянкою контакту ( $l_1 < r < l$ ), виходячи з виразу

$$u_{\vartheta}|_{\vartheta=0} = -d\varepsilon - \int_r^l \left. \frac{\partial u_{\vartheta}}{\partial r} \right|_{\vartheta=0} dr = -d\varepsilon - l \int_0^{\xi} \varphi(\xi) d\xi \quad (0 < \xi < a). \quad (25)$$

Застосовуючи до першої рівності (10) обернене перетворення Фур'є, одержимо:

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^+(\tau) e^{-i\xi\tau} d\tau. \quad (26)$$

Враховуючи співвідношення (18), (13), (21), після обчислення інтеграла із (26) за теорією лишків маємо:

$$\varphi(\xi) = \varepsilon e^{-a} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta(s_k)}{\lambda'(s_k)} (z_k^+ e^{-s_k(a-\xi)} + z_k^- e^{-s_k \xi}) + \frac{i}{K'(0)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{s_k} z_k^- e^{-s_k a} - K^-(-i) \right].$$

Підставивши цей вираз у співвідношення (25) і використовуючи заміни (5), після перетворень матимемо:

$$u_{\vartheta}|_{\vartheta=0} = -d\varepsilon + \frac{\varepsilon l_1}{iK'(0)} \left[ \left( \tilde{C} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k}{s_k} z_k^+ \lambda^k \right) \left( \ln \frac{r}{l} - \gamma_0 \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k}{s_k} z_k^+ \lambda^k \right] - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta(s_k)}{s_k \lambda'(s_k)} \left[ z_k^+ \left( \frac{r}{l_1} \right)^{-s_k} - z_k^- \left( \frac{r}{l} \right)^{s_k} \right] \quad (l_1 < r < l).$$

Силу  $P$ , що діє на жорсткий клин, визначимо з умови рівноваги:

$$P = -2\varepsilon \int_0^{l_1} \sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=0} dr.$$

Замінивши змінну  $r = le^{-\xi}$  та врахувавши першу рівність (6) і треті рівності із співвідношень (10), (6), отримаємо:

$$P = 4\varepsilon l G \frac{m}{m-1} \left( -\sqrt{2\pi} \Psi^+(0) + \int_a^{\infty} d\xi \frac{\varepsilon e^{-a}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda(-i\tau) e^{-i\tau(\xi-a)}}{\Delta(-i\tau) \tau + i} d\tau \right). \quad (27)$$

Обчисливши інтеграл із (27) за теорією лишків і використовуючи рівності (18), (14), (15) та (21), дістанемо:

$$P = 4\varepsilon^2 l_1 G \frac{m}{m-1} \left( iK^+(i) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k}{s_k} z_k^- \lambda^k \right).$$

**Результати обчислень.** Безрозмірні напруження  $\bar{\sigma} = \sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=0}/(2G\varepsilon)$  і переміщення  $\bar{u} = (u_{\vartheta}|_{\vartheta=0} + d\varepsilon)/(\varepsilon l)$  ( $m = 10/3$ ) обчислені тоді, коли клин є чвертьплощиною ( $\alpha = \pi/4$ ) або півплощиною ( $\alpha = \pi/2$ ), а глибина занурення жорсткого клина  $d = l/2$ . Знайдено (рис. 2) розподіл нормальних напружень на лінії симетрії пружного клина та нормальні переміщення верхнього берега тріщини (рис. 3) ( $\rho = (r-l_1)/(l-l_1)$  – відносна координата області  $l_1 < r < l$ ). Криві 1 відповідають чвертьплощині, криві 2 – півплощині.

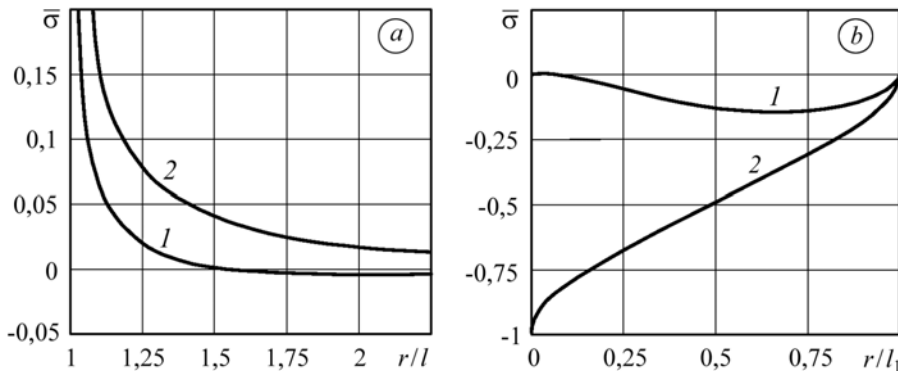
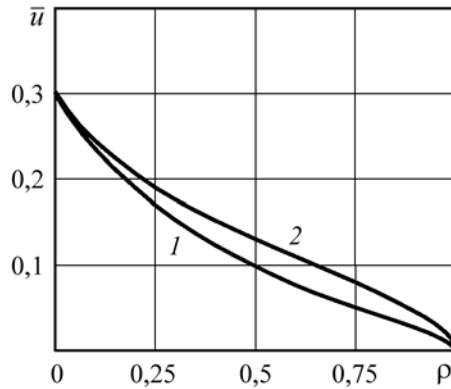


Рис. 2. Розподіл нормальних напружень на лінії симетрії пружного клина:  $a$  – на продовженні тріщини;  $b$  – у зоні контакту; 1 –  $\alpha = \pi/4$ ; 2 –  $\alpha = \pi/2$ ;  $m = 10/3$ ,  $d = l/2$ .

Fig. 2. Distribution of normal stresses on the elastic wedge symmetric line:  $a$  – on the crack continuation;  $b$  – in contact domain; 1 –  $\alpha = \pi/4$ ; 2 –  $\alpha = \pi/2$ ;  $m = 10/3$ ,  $d = l/2$ .

Рис. 3. Нормальні переміщення верхнього берега тріщини: 1 –  $\alpha = \pi/4$ ; 2 –  $\alpha = \pi/2$ ;  $m = 10/3$ ,  $d = l/2$ ;  $\rho = (r - l_1)/(l - l_1)$ .

Fig. 3. Normal displacements of the crack upper edge: 1 –  $\alpha = \pi/4$ ; 2 –  $\alpha = \pi/2$ ;  $m = 10/3$ ,  $d = l/2$ ;  $\rho = (r - l_1)/(l - l_1)$ .



Напруження розтягу, які необмежені у вершині тріщини, з віддаленням від неї змінюються напруженнями стиску, якщо  $\alpha = \pi/4$ , і спадають до нуля, якщо  $\alpha = \pi/2$ . Напруження в зоні контакту  $0 < r < l_1$  є напруженнями стиску ( $\bar{\sigma} < 0$ ). Але, якщо  $\alpha = \pi/4$ , у достатньо малій зоні  $0 < r < \delta$  ( $\delta = 0,06 l_1$ ) вони стають додатними, що вказує на часткове відставання берегів тріщини від поверхні жорсткого клина поблизу вершини пружного клина. Як видно з табл. 1, зона відставання зменшується із збільшенням кута  $\alpha$  і взагалі зникає для  $\alpha > 60^\circ$ . За наявності зони відставання (при  $0 < \alpha < 60^\circ$ ) необхідно переглянути постановку задачі, але через малість цієї зони при  $45^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ$  її вплив на напружено-деформований стан пружного клина поза малим околom його вершини незначний. Якщо  $\alpha < 45^\circ$ , задачу слід розглядати в уточненій постанові, коли друга крайова умова (1) розповсюджується і на зону відставання  $0 < r < \delta$  ( $0 < \delta < l_1$ ). Розмір ділянки контакту майже не залежить від кута  $\alpha$ .

Таблиця 1. Відносні розміри ділянки контакту  $l_1/l$  та зони відставання  $\delta/l_1$  ( $d = l/2$ )

$\alpha$	$36^\circ$	$45^\circ$	$54^\circ$	$60^\circ$	$72^\circ$	$90^\circ$
$l_1/l$	0,1989	0,1993	0,19952	0,19955	0,19932	0,19855
$\delta/l_1$	0,1314	0,0599	0,0189	0,0054	0	0

Таблиця 2. Відносні розміри ділянки контакту  $l_1/l$ , безрозмірні коефіцієнти інтенсивності напружень  $\bar{K}_1$  і безрозмірні сили  $\bar{P}$

$d/l$	$\alpha = \pi/4$			$\alpha = \pi/2$		
	$l_1/l$	$\bar{K}_1$	$\bar{P}$	$l_1/l$	$\bar{K}_1$	$\bar{P}$
0,1	0,0201	0,0075	0,0032	0,0247	0,0177 (0,0177)	0,0242
0,2	0,0509	0,0191	0,0083	0,0586	0,0421 (0,0419)	0,0575
0,3	0,0909	0,0345	0,0151	0,0990	0,0712 (0,0709)	0,0973
0,4	0,1401	0,0540	0,0241	0,1457	0,1047 (0,1043)	0,1431
0,5	0,1993	0,0784	0,0356	0,1986	0,1427 (0,1421)	0,1951
0,6	0,2696	0,1086	0,0505	0,2581	0,1854 (0,1845)	0,2535
0,7	0,3523	0,1460	0,0699	0,3254	0,2333 (0,2320)	0,3189
0,8	0,4493	0,1928	0,0956	0,4024	0,2872 (0,2855)	0,3924
0,9	0,5643	0,2522	0,1304	0,4932	0,3487 (0,3465)	0,4754
1	0,7108	0,3306	0,1801	0,6088	0,4210 (0,4184)	0,5712



У табл. 2 для  $\alpha = \pi/4$  і  $\alpha = \pi/2$  наведено значення відносних розмірів ділянки контакту  $l_1/l$ , безрозмірних коефіцієнтів інтенсивності напружень  $\bar{K}_1 = K_1/(2G\epsilon\sqrt{l})$  і безрозмірних сил  $\bar{P} = P/(2G\epsilon^2l)$  для різних значень відносного занурення  $d/l$  жорсткого клина. У дужках подані результати наближеного розв'язку [3, 5], точність якого виявилась достатньо високою.

### ВИСНОВКИ

Із застосуванням метода Вінера–Гопфа отримано аналітичний розв'язок задачі про розклинювання пружного клина жорстким уздовж крайової тріщини на осі симетрії пружного клина. Показано, що під час розклинювання пружного клина, кут  $\alpha$  піврозхилу якого перевищує  $60^\circ$ , береги тріщини щільно прилягають до граней жорсткого клина. Для кута  $45^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ$  виявлено часткове відставання берегів тріщини від поверхні жорсткого клина в малому околі вершини пружного клина, впливом якого на напружено-деформований стан пружного клина можна знехтувати. Нарешті, для кута  $\alpha$ , меншого за  $45^\circ$ , зона відставання стає значною. В останньому випадку побудований розв'язок втрачає зміст і постава задачі потребує перегляду.

*РЕЗЮМЕ.* Рассмотрена задача о расклинивании упругого клина вдоль краевой трещины жестким клином. С применением метода Винера–Хопфа получено аналитическое решение задачи. Найдены коэффициент интенсивности напряжений, распределение напряжений на продолжении трещины, в зоне контакта, а также окружные перемещения берегов трещины.

*SUMMARY.* The problem of an elastic wedge wedging along its edge crack by a hard wedge is solved. Using the Wiener–Hopf method, the analytical solution of the problem is obtained. The stress intensity factor, distribution of stresses on the crack continuation, distribution of stresses in contact domain and a jump of displacements are found.

1. *Галаджева М. Р., Сирунян В. Х., Сметанин Б. И.* О расклинивании упругой полуплоскости // Изв. АН АрмССР. Механика. – 1974. – 27, № 2. – С. 38–45.
2. *Александров В. М., Сметанин Б. И., Соболев Б. В.* Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. – М.: Физматлит, 1993. – 224 с.
3. *Луцышин Р. М.* О расклинивании трещины в упругой полуплоскости // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1979. – № 10. – С. 58–62.
4. *Сметанин Б. И.* О расклинивании упругого бесконечного клина // Прикл. математика и механика. – 1969. – 33, вып. 5. – С. 935–940.
5. *Саврук М. П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами // Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пос. под ред. В. В. Панасюка. – К.: Наук. думка, 1988. – 2. – 620 с.
6. *Антипов Ю. А.* Точное решение задачи о вдавлении кольцевого штампа в полупространство // Докл. АН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. – 1987. – № 7. – С. 29–33.
7. *Нобл Б.* Метод Винера–Хопфа. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 280 с.
8. *Федорюк М. В.* Асимптотика: Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1987. – 544 с.

Одержано 06.02.2009