УДК 539.3

ОСЕСИМЕТРИЧНА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ПРО ВТИСКУВАННЯ АБСОЛЮТНО ЖОРСТКОЇ КУЛІ В ПРУЖНИЙ ПІВПРОСТІР З НЕОДНОРІДНИМ ПОКРИВОМ

Р. КУЛЬЧИЦЬКИЙ-ЖИГАЙЛО, Г. РОГОВСЬКИЙ

Білостоцький технічний університет, Польща

Розглянуто осесиметричну контактну задачу про втискування абсолютно жорсткої кулі в неоднорідний півпростір, що складається з однорідної основи і поверхневого неоднорідного шару, коефіцієнт Пуассона якого сталий, а залежність модуля Юнґа від відстані до поверхні півпростору описує показникова функція. Розв'язок задачі теорії пружності, що враховує неперервну залежність модуля Юнґа від координати, порівняно з розв'язком задачі, в якій неоднорідний шар замінено пакетом однорідних шарів.

Ключові слова: *осесиметрична контактна задача, пружний півпростір, неоднорідний покрив.*

Задачі теорії пружності про навантаження неоднорідного пружного півпростору, механічні властивості якого залежать від відстані до його поверхні z, чи відповідні контактні задачі розглядали вже в 50–70-х роках минулого століття [1–11]. Запропоновано методи побудови загального розв'язку рівнянь теорії пружності для деяких функційних залежностей механічних властивостей від координати z, зокрема, коли коефіцієнт Пуассона сталий, а зміну модулів зсуву чи Юнґа описують степенева чи показникова функції.

Технологічний прогрес і пов'язане з ним широке використання пружних поверхневих шарів, спрямоване на поліпшення трібологічних характеристик пар тертя, відродили інтерес до цих задач [12–22]. Предметом досліджень в останньому десятилітті є, як правило, контактна задача про втискування абсолютно жорсткого штампа в пружний неоднорідний півпростір, що складається з пружного однорідного ізотропного півпростору і поверхневого неоднорідного шару, механічні властивості якого змінюються вздовж його товщини. За степеневого чи показникового законів зміни модуля Юнґа використовують метод скінченних елементів або відомі аналітичні підходи до розв'язування диференційних рівнянь у частинних похідних зі змінними коефіцієнтами [12–17, 22]. Описані також [9, 10, 18] аналітичні методи побудови розв'язку, коли сталі Ламе є досить довільні функції координати z. Пропоновані підходи, однак, пов'язані зі складними математичними перетвореннями, практична реалізація яких часто залежить від типу розглядуваної функційної залежності. Зокрема, в прикладах, розглянутих раніше [18], коефіцієнт Пуассона сталий. Крім того, автори обмежуються дослідженням розподілу контактного тиску. Обчислення напружень у поверхневому шарі вимагає додаткових незалежних математичних перетворень.

Поряд з аналітичними методами розв'язування диференційних рівнянь у частинних похідних для моделювання неоднорідного шару використовують

Контактна особа: Р. КУЛЬЧИЦЬКИЙ-ЖИГАЙЛО, e-mail: r.kulczycki@pb.edu.pl

підхід, згідно з яким його замінюють пакетом однорідних чи неоднорідних шарів. Вперше такий підхід запропонований ще в кінці 60-х років минулого століття [7]. Однак тодішня комп'ютерна база нівелювала практичне значення пропонованого алгоритму. Розвиток обчислювальної потужності сучасних комп'ютерів докорінно це змінив. Розглянуто [19–21] плоскі і осесиметричні контактні задачі про втискування абсолютно жорсткого штампа в пружний однорідний півпростір, покритий неоднорідним шаром, який замінено пакетом шарів. Коефіцієнт Пуассона кожного шару в пакеті сталий, а модуль зсуву змінюється за лінійним законом. Паралельно досліджували задачі теплопровідності [23, 24] і контактні задачі теорії пружності [25–28] для півпростору чи шару, що складався з двох періодично укладених ізотропних однорідних шарів. Логічним є використання опрацьованого раніше [25–27] методу до розв'язування контактних задач для пружного півпростору, механічні властивості якого описано вище. Пропонований підхід простіший у реалізації проти поданого в працях [19–21], універсальніший і придатний для широкого класу контактних задач теорії пружності і термопружності. Ймовірним недоліком є те, що для поверхневого шару, коефіцієнт Пуассона якого сталий, метод [25–27] вимагає розгляду більшої кількості шарів у пакеті. Проте дослідження, описані в працях [25–28], дають можливість стверджувати, що обчислення, виконані для щонайменше 40 шарів, стабільні і їх можна реалізувати на середнього класу персональному комп'ютері.

Нижче вивчено осесиметричну контактну задачу про втискування абсолютно жорсткої кулі в неоднорідний півпростір, що складається з однорідного півпростору і поверхневого шару, коефіцієнт Пуассона якого сталий, а залежність модуля Юнґа від координати z описує натуральна показникова функція.

Розглянемо два підходи до розв'язування задачі: 1) врахуємо неперервну зміну модуля Юнґа вздовж товщини поверхневого шару; 2) неоднорідний шар змоделюємо пакетом однорідних ізотропних шарів. Проаналізуємо різницю між розв'язками. Дослідимо залежність контактних параметрів і напружень у розглядуваному неоднорідному півпросторі від товщини шару і відношення між модулями Юнґа на поверхні неоднорідного півпростору і основи.

Формулювання задачі. Розглянемо контактну взаємодію абсолютно жорсткої кулі і неоднорідного півпростору (рис. 1).

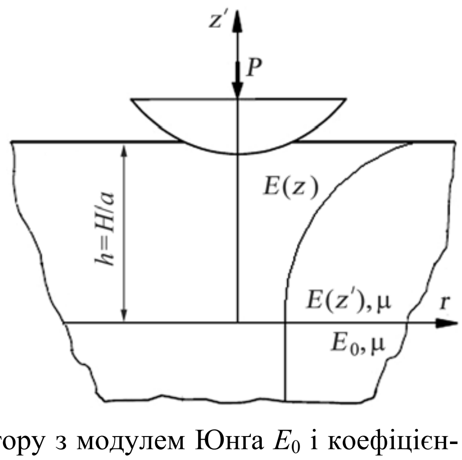


Рис. 1. Схема контактної задачі для півпростору, покритого неоднорідним шаром.

Fig. 1. The scheme of the contact problem for a functionally graded coated half-space.

Неоднорідний півпростір складається з однорідного ізотропного півпростору з модулем Юнґа E_0 і коефіцієнтом Пуассона μ і неоднорідного шару, коефіцієнт Пуассона якого сталий і рівний μ. Залежність модуля Юнґа від безрозмірної, віднесеної до радіуса ділянки контакту a, координати z' описує функція

$$E(z') = E_0 \exp(\beta z'), \quad \beta = h^{-1} \ln(E_1 / E_0), \quad 0 \le z' \le h,$$

де E_1 – модуль Юнґа на поверхні неоднорідного півпростору; $h = H/a$, H – товщина поверхневого шару, r, φ, z' – безрозмірні циліндричні координати, $z = h - z'$, $r = \breve{r}/a$, $z' = \breve{z}'/a$, $\breve{r}, \breve{z}'$ – розмірні координати.

Вважатимемо, що радіус кулі значно більший від радіуса ділянки контакту, внаслідок чого поверхню кулі в зоні контакту апроксимуємо поверхнею кругового параболоїда [29]: $z(r, \varphi) = -ar^2/2R$, $r < 1$, $-\pi < \varphi \le \pi$, де R – радіус кулі. Вплив дотичних напружень нехтуємо.

Середовище з неперервною зміною механічних властивостей. Загальний розв'язок рівнянь теорії пружності в переміщеннях, що описують таку зміну механічних властивостей, у просторі трансформант Ганкеля має вигляд [30, 31]

$$\bar{u}_r^{(1)}(s,z') = -d_1 \sum_{i=1}^{4} \frac{m_i^2 - s^2 - \beta^2}{\beta^2 s} a_i(s) \exp(m_i z'), \;\; 0 \le z' \le h ,$$

$$\tilde{u}_z^{(1)}(s,z') = d_1 \sum_{i=1}^{4} \frac{m_i^2 - s^2 - \iota^2\beta^2}{\beta^2 m_i} a_i(s) \exp(m_i z'), \;\; 0 \le z' \le h ,$$

$$2s\bar{u}_r^{(0)}(s,z') = -((2+d_0)a_{-1}(s) + d_0 s z' a_{-1}(s) + 2a_0(s)s)\exp(sz'), \;\; z' \le 0 , \tag{1}$$

$$2\tilde{u}_z^{(0)}(s,z') = (d_0 z' a_{-1}(s) + 2a_0(s))\exp(sz'), \;\; z' \le 0 , \tag{2}$$

де $\mathbf{u}^{(j)}$ – безрозмірний, віднесений до радіуса ділянки контакту, вектор пружного переміщення; $\bar{u}_r^{(j)}$, $\tilde{u}_z^{(j)}$ – трансформанти Ганкеля першого і нульового порядків; індекс $j = 0$ описує параметри і функції стану в однорідному півпросторі; $j = 1$ – в неоднорідному шарі; $a_i(s)$, $i = -1, \ldots, 4$ – невідомі функції параметра інтегрального перетворення $s \in [0, \infty)$, $\iota^2 = \mu/(1-\mu)$, $d_1 = (1-\mu)/(1-2\mu)$, $d_0 = 1/(1-2\mu)$, m_i, $i = 1, \ldots, 4$ – корені характеристичного рівняння [32]

$$(m^2 - s^2)^2 + 2m\beta(m^2 - s^2) + \beta^2(m^2 + \iota^2 s^2) = 0 .$$

Для визначення невідомих функції $a_i(s)$, $i = -1, \ldots, 4$ використовують крайові умови

$$\sigma_{z'z'}^{(1)}(r,h) = -p(r)H(1-r), \quad \sigma_{rz'}^{(1)}(r,h) = 0 , \; u_r^{(0)}(r,0) = u_r^{(1)}(r,0),$$

$$u_{z'}^{(0)}(r,0) = u_{z'}^{(1)}(r,0), \quad \sigma_{rz'}^{(0)}(r,0) = \sigma_{rz'}^{(1)}(r,0), \quad \sigma_{z'z'}^{(0)}(r,0) = \sigma_{z'z'}^{(1)}(r,0) ,$$

де $\sigma^{(j)}$ – тензор напружень в однорідному півпросторі ($j = 0$) і в неоднорідному шарі ($j = 1$); $p(r)$ – невідомий контактний тиск; $H(r)$ – функція Гевісайда.

Невідомий радіус ділянки контакту і розподіл контактного тиску знайдемо, задовольняючи крайову умову виникнення спільної поверхні контакту

$$u_{z'}^{(1)}(r,h) = ar^2/(2R) - U_0 , \;\; r < 1$$

і умову рівноваги кулі

$$2\pi a^2 \int_0^1 r p(r) dr = P , \tag{3}$$

де U_0 – безрозмірне, віднесене до радіуса ділянки контакту, вертикальне переміщення кулі; P – притискальна сила.

Моделювання поверхневого шару за допомогою пакета шарів. Розділимо поверхневий шар на n шарів однакової товщини $h' = h/n$ (рис. 2).

Вважатимемо, що всі шари однорідні. Їх механічні властивості опишемо за допомогою модулів Юнґа і коефіцієнтів Пуассона:

$$E_j = \frac{1}{h'} \int\limits_{(j-1)h'}^{jh'} E(z')dz' =$$
$$= \frac{2E_0 \exp((j-0{,}5)\beta h')\sinh(0{,}5\beta h')}{\beta h'},$$

$$\mu_j = \frac{1}{h'} \int\limits_{(j-1)h'}^{jh'} \mu dz' = \mu, \quad j = 1, 2, ..., n,$$

де значенню індекса j відповідає номер шару в пакеті. Нумерація шарів починається знизу вверх (рис. 2) від шару, що безпосередньо контактує з пружним однорідним півпростором.

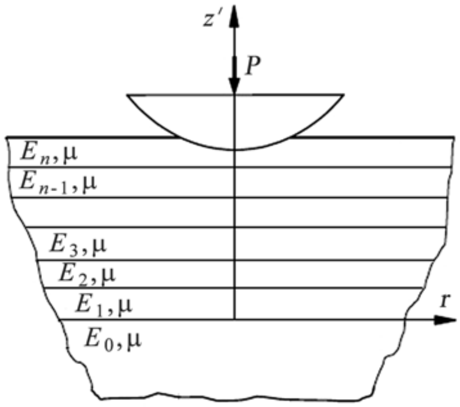


Рис. 2. Схема контактної задачі для півпростору, покритого пакетом шарів.

Fig. 2. The scheme of the contact problem for a multi-layered coated half-space.

Загальний розв'язок рівнянь теорії пружності в шарах пакета, записаний в просторі трансформант Ганкеля, має вигляд [27]

$$\begin{aligned} 2s\bar{u}_r^{(j)}(s,z') &= \left\{(2+d_j)\sinh(s(h_j - z')) + d_j s(h_j - z')\cosh(s(h_j - z'))\right\} a_{4j-3}(s) + \\ &+ \left\{(2+d_j)\cosh(s(h_j - z')) + d_j s(h_j - z')\sinh(s(h_j - z'))\right\} a_{4j-2}(s) + \\ &+ 2s\cosh(s(h_j - z'))a_{4j-1}(s) + 2s\sinh(s(h_j - z'))a_{4j}(s), \; j = 1,...,n, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} 2\tilde{u}_z^{(j)}(s,z') &= d_j(h_j - z')\sinh(s(h_j - z'))a_{4j-3}(s) + \\ &+ d_j(h_j - z')\cosh(s(h_j - z'))a_{4j-2}(s) + 2\sinh(s(h_j - z'))a_{4j-1}(s) + \\ &+ 2\cosh(s(h_j - z'))a_{4j}(s), \; j = 1,...,n, \end{aligned} \quad (5)$$

де $d_j = 1/(1 - 2\mu_j)$, $h_j = jh'$, $\mu_j = \mu$, $j = 0, 1, ..., n$.

Загальний розв'язок рівнянь теорії пружності в однорідному півпросторі $z' \le 0$ описують формули (1) і (2). Співвідношення (1), (2), (4) і (5) містять $4n + 2$ невідомі функції параметра інтегрального перетворення $a_i(s)$, $i = -1, 0, \ldots, 4n$. Для їх визначення слід задовольнити крайові умови

$$\sigma_{z'z'}^{(n)}(r,h) = -p(r)H(1-r), \quad \sigma_{rz'}^{(n)}(r,h) = 0, \quad (6)$$

$$u_r^{(i-1)}(r,h_{i-1}) = u_r^{(i)}(r,h_{i-1}), \quad u_{z'}^{(i-1)}(r,h_{i-1}) = u_{z'}^{(i)}(r,h_{i-1}), \quad i = 1,...,n, \quad (7)$$

$$\sigma_{rz'}^{(i-1)}(r,h_{i-1}) = \sigma_{rz'}^{(i)}(r,h_{i-1}), \quad \sigma_{z'z'}^{(i-1)}(r,h_{i-1}) = \sigma_{z'z'}^{(i)}(r,h_{i-1}), \quad i = 1,...,n. \quad (8)$$

Невідомий радіус ділянки контакту і розподіл контактного тиску визначаємо з крайової умови виникнення спільної поверхні контакту

$$u_{z'}^{(n)}(r,h) = ar^2/(2R) - U_0, \quad r < 1 \quad (9)$$

і умови рівноваги кулі (3).

Оскільки алгоритм розв'язування осесиметричної контактної задачі для шаруватого півпростору досить детально подано в праці [27], тут обмежимось коротким його описом. Використовуючи формули (1), (2), (4) і (5), знаходимо трансформанти Ганкеля компонент тензора напружень $\sigma_{rz'}$ і $\sigma_{z'z'}$. Задовольняючи крайові умови (6)–(8), отримуємо систему $4n + 2$ лінійних алгебричних рівнянь для визначення невідомих функції $a_i(s)$, $i = -1, 0, \ldots, 4n$. Оскільки тільки одне рівняння цієї системи неоднорідне, а права його частина рівна $G_n^{-1}\tilde{p}(s)$ (G_n – модуль зсуву верхнього шару в пакеті; $\tilde{p}(s)$ – трансформанта Ганкеля контактного тиску), розв'язок системи рівнянь запишемо у вигляді

$$a_i(s) = G_n^{-1}\tilde{p}(s)a_i^*(s), \tag{10}$$

де $a_i^*(s)$ – розв'язок системи рівнянь для визначення функцій $a_i(s)$, в правій частині якої функція $G_n^{-1}\tilde{p}(s)$ замінена сталою, рівною одиниці. Повертаючись у формулах (4), (5) до простору оригіналів і використовуючи формулу (10), отримуємо залежності у вигляді інтегралів між компонентами вектора пружного переміщення і тензора напруження, з одного боку, а контактного тиску – з іншого.

Підставляючи залежність

$$u_{z'}^{(n)}(r,h) = G_n^{-1}\int_0^\infty s a_{4n}^*(s)\tilde{p}(s)J_0(sr)\,ds$$

у продиференційовану крайову умову (9), отримуємо інтегральне рівняння, яке в поєднанні з умовою рівноваги (3) служить для визначення невідомого контактного тиску і радіуса ділянки контакту. Розв'язуємо його методом колокації, апроксимуючи контактний тиск згідно з формулою

$$p(r) = \sum_{k=1}^{m} p_k\sqrt{l_k^2 - r^2}\,H(l_k - r),$$

де l_k, $k = 1, \ldots, m$ – точки з проміжку (0, 1], які вибираємо аналогічно, як у працях [27, 31]. Точки колокації беремо у вигляді $r_k = (l_{k-1} + l_k)/2$, $k = 1, \ldots, m$, $l_0 = 0$.

Обчислюючи інтеграли, що виникають під час зведення інтегрального рівняння до системи лінійних алгебричних рівнянь, враховуємо асимптотичну поведінку функції $a_{4n}^*(s)$, якщо $s \to \infty$. Інтеграли, в яких цю функцію замінено її асимптотою, знаходимо аналітично. До визначення решти інтегралів застосовуємо квадратуру Ґаусса.

Аналогічно обчислюємо інтеграли, що описують напруження σ_{rr} і $\sigma_{\varphi\varphi}$ на поверхні неоднорідного півпростору. Напруження всередині неоднорідного півпростору визначаємо за допомогою квадратур Ґаусса.

Подібним до описаного є алгоритм розв'язування контактної задачі для середовища з неперервною зміною механічних властивостей. Різниця полягає лише у тому, що маємо інші формули до обчислення компонент вектора пружного переміщення у поверхневому шарі.

Аналіз результатів. Оцінюючи вихідні співвідношення з праці [27], робимо висновок, що розв'язок сформульованої вище контактної задачі для моделювання неоднорідного шару за допомогою пакета шарів залежить від чотирьох безрозмірних параметрів: товщини шару h, співвідношення між модулями Юнґа на поверхні неоднорідного півпростору і основи E_1/E_0, коефіцієнта Пуассона μ і кількості шарів у пакеті n. Розв'язок контактної задачі для неоднорідного шару, який отримуємо з урахуванням неперервної залежності механічних властивостей від координати, визначають перші три вказані параметри. Отримані розв'язки порівнюємо, використовуючи такі безрозмірні величини: відношення радіуса ділянки контакту в задачі з неоднорідним шаром до радіуса ділянки контакту в задачі без поверхневого шару a/a_H ($a_H^3 = 3PR(1-\mu^2)/(4E_0)$ [29]), відношення контактного тиску в центрі ділянки контакту до середнього контактного тиску $p(0)/p_0$, відношення радіального напруження до середнього контактного тиску σ_{rr}/p_0, обчисленого в центрі ділянки контакту ($r = 0$, $z' = h$) і на її межі ($r = 1$, $z' = h$). Вважатимемо, що $\mu = 1/3$; $E_1/E_0 = 0{,}125$ або 8; $h = 0{,}2$; 0,4 або 0,8.

Залежність радіуса ділянки контакту, контактного тиску в її центрі, радіальних напружень у центрі ділянки і на її межі та похибок їх обчислення, отриманих моделюванням неоднорідного шару пакетом *n* шарів, від параметрів E_1/E_0 і *h*

E_1/E_0	h	n	a/a_H	$p(0)/p_0$	$\sigma_{rr}(0, h)/p_0$	$\sigma_{rr}(1, h)/p_0$
0,125	0,2	10	3,51%	< 0,25%	0,79%	9,09%
		20	1,77%	< 0,25%	0,44%	4,33%
		40	0,9%	< 0,25%	0,28%	2,04%
		∞	1,187 ± 0,25%	1,734 ± 0,25%	–0,948 ± 0,25%	0,0506 ± 0,5%
	0,4	10	3,32%	< 0,25%	0,59%	9,11%
		20	1,58%	< 0,25%	< 0,25%	4,63%
		40	0,72%	< 0,25%	< 0,25%	2,44%
		∞	1,304 ± 0,25%	1,764 ± 0,25%	–0,944 ± 0,25%	0,0706 ± 0,5%
	0,8	10	3,3%	< 0,25%	0,48%	8,44%
		20	1,63%	< 0,25%	< 0,25%	4,34%
		40	0,78%	< 0,25%	< 0,25%	2,7%
		∞	1,468 ± 0,25%	1,725 ± 0,25%	–0,915 ± 0,25%	0,1185 ± 0,5%
8	0,2	10	–3,36%	< 0,25%	–7,35%	–2,14%
		20	–1,74%	< 0,25%	–3,89%	–1,9%
		40	–0,91%	< 0,25%	–1,91%	–1,6%
		∞	0,903 ± 0,25%	1,302 ± 0,25%	–2,916 ± 0,25%	0,1683 ± 0,5%
	0,4	10	–3,21%	0,252%	–7,21%	17,53%
		20	–1,60%	< 0,25%	–3,78%	6,49%
		40	–0,77%	< 0,25%	–1,93%	2,08%
		∞	0,840 ± 0,25%	1,192 ± 0,25%	–2,817 ± 0,25%	0,0422 ± 0,5%
	0,8	10	–3,25%	< 0,25%	–7%	–17,39%
		20	–1,65%	< 0,25%	–3,72%	–7,95%
		40	–0,83%	< 0,25%	–1,91%	–2,77%
		∞	0,750 ± 0,25%	1,172 ± 0,25%	–2,674 ± 0,25%	–0,1334 ± 0,5%

Величини, обчислені в контактній задачі для поверхневого шару з неперервною зміною механічних властивостей, наведено в рядку $n = \infty$ таблиці. В цьому ж рядку подамо допустиму відносну похибку обчислення. Оскільки розтягальне напруження $\sigma_{rr}(1,h)$ в кілька разів менше, ніж стискальне $\sigma_{rr}(0,h)$, тому, обчислюючи безрозмірний параметр $\sigma_{rr}(1,h)/p_0$, допускаємо похибку 0,5%. Відносну похибку обчислення цих величин, знайдену моделюванням поверхневого шару пакетом *n* однорідних шарів, подамо в позиціях $n = 10$; 20 і 40. Як бачимо, вже 10 шарів у пакеті дають можливість обчислити параметр $p(0)/p_0$ з точністю, що не перевищує 0,26%. Зі збільшенням кількості шарів удвічі похибка зменшується також майже вдвічі. Якщо розглянемо 40 шарів у пакеті і якщо $E_1/E_0 \le 8$, похибка обчислення радіуса ділянки контакту і радіального напруження в її центрі не перевищує 1 і 2%, відповідно. Дещо вищі відносні похибки під час обчислення радіального напруження на межі ділянки контакту. Пов'язано це, безумовно, з тим, що розтягальне напруження тут в кілька разів менше, ніж стискальне в центрі ділянки.

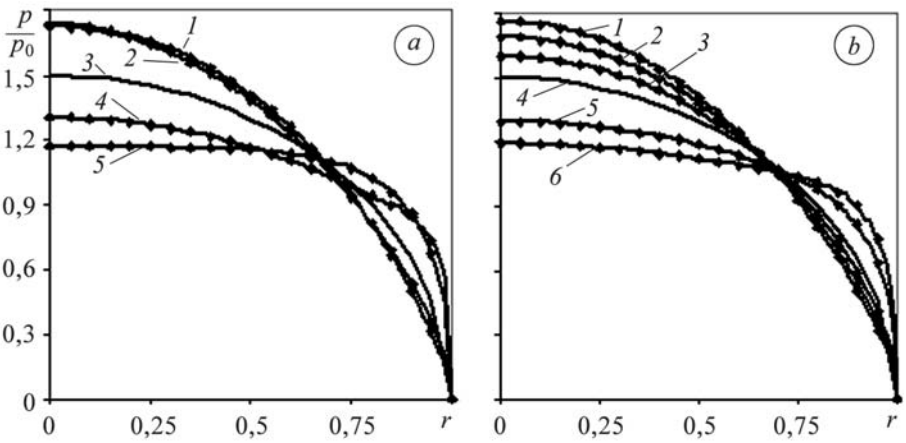


Рис. 3. Залежність розподілу контактного тиску від параметрів E_1/E_0 і h ($\mu = 1/3$; $n = 20$; *a*: *1* – $E_1/E_0 = 0{,}125$, $h = 0{,}2$; *2* – $E_1/E_0 = 0{,}125$, $h = 0{,}8$; *3* – однорідний півпростір; *4* – $E_1/E_0 = 8$, $h = 0{,}2$; *5* – $E_1/E_0 = 8$, $h = 0{,}8$; *b*, $h = 0{,}4$: *1* – $E_1/E_0 = 0{,}125$; *2* – 0,25; *3* – 0,5; *4* – однорідний півпростір; *5* – $E_1/E_0 = 4$; *6* – 8.

Fig. 3. The dependence of the contact pressure distribution on parameters E_1/E_0 and h ($\mu = 1/3$; $n = 20$; *a*: *1* – $E_1/E_0 = 0.125$, $h = 0.2$; *2* – $E_1/E_0 = 0.125$, $h = 0.8$; *3* – homogeneous half-space; *4* – $E_1/E_0 = 8$, $h = 0.2$; *5* – $E_1/E_0 = 8$, $h = 0.8$; *b*, $h = 0.4$: *1* – $E_1/E_0 = 0.125$; *2* – 0.25; *3* – 0.5; *4* – homogeneous half-space; *5* – $E_1/E_0 = 4$; *6* – 8.

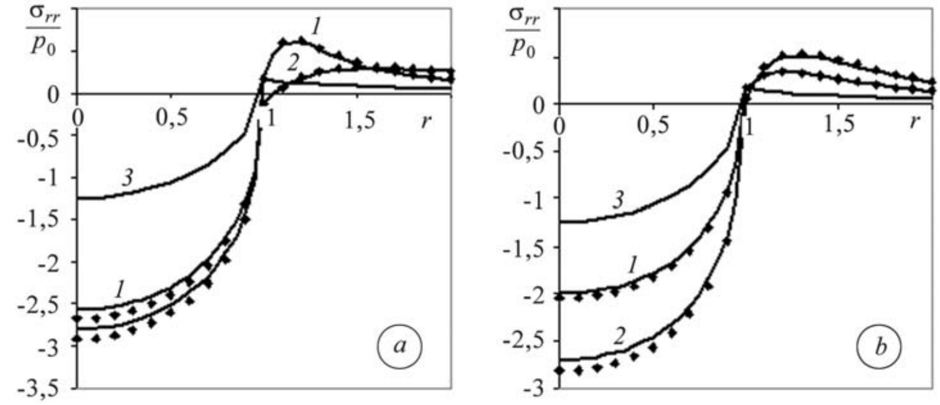
Про добре узгодження між розв'язками, що ґрунтуються на двох описаних вище моделях поверхневого шару, свідчать також результати обчислення, що наведені на рис. 3–6. Ромбами тут позначено розв'язок, який отримуємо у задачі з неперервною зміною механічних властивостей. Суцільні лінії – результати для пакета, що складається з 20 однорідних шарів. Як випливає з рис. 4 і 5, найбільшу абсолютну похибку під час обчислень напружень отримуємо у центрі ділянки контакту.

Характер перерозподілу контактного тиску (рис. 3) такий, як і для однорідного півпростору, покритого однорідним шаром з іншими механічними властивостями [33, 34]. Якщо модуль Юнґа неоднорідного шару зростає у напрямку поверхні неоднорідного півпростору ($E_1/E_0 > 1$), розподіл контактного тиску вирівнюється. Якщо $E_1/E_0 < 1$, відношення максимального контактного тиску до середнього є більше, ніж у розподілі Герца, що описує розв'язок контактної задачі для однорідного півпростору.

Зона розтягальних напружень, як і в класичній задачі Герца [29], утворюється в околі точок ненавантаженої поверхні неоднорідного півпростору (рис. 4). Якщо $E_1/E_0 < 1$, максимальне розтягальне напруження виникає на межі ділянки контакту і є нижче, ніж у задачі Герца. Якщо $E_1/E_0 > 1$, найбільше розтягальне напруження зафіксоване на ненавантаженій поверхні неоднорідного півпростору. Рівень таких напружень значно вищий, ніж у задачі Герца.

Обчислення показали, що найбільше значення другого інваріанта девіатора тензора напружень

$$J_2 = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \Big/ \sqrt{6}$$



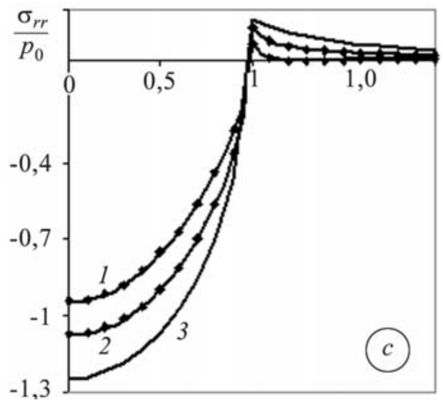
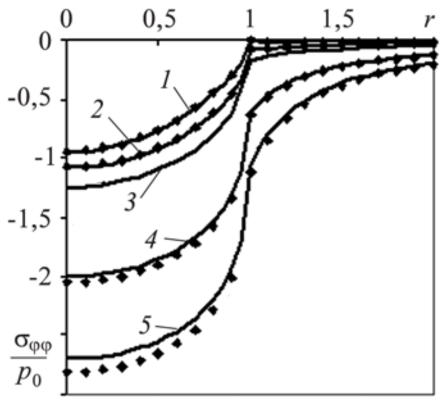


Рис. 4. Залежність радіальних напружень на поверхні неоднорідного півпростору від параметрів E_1/E_0 і h ($\mu = 1/3$; $n = 20$; крива *3* – однорідний півпростір; *a*, $E_1/E_0 = 8$: *1* – $h = 0{,}2$; *2* – $h = 0{,}8$; *b*, $h = 0{,}4$: *1* – $E_1/E_0 = 4$; *2* – $E_1/E_0 = 8$; *c*, $h = 0{,}4$: *1* – $E_1/E_0 = 0{,}125$; *2* – $E_1/E_0 = 0{,}5$).

Fig. 4. The dependence of radial stresses on the surface of heterogeneous half-space on parameters E_1/E_0 and h ($\mu = 1/3$; $n = 20$; curve *3* – homogeneous half-space; *a*, $E_1/E_0 = 8$: *1* – $h = 0.2$; *2* – $h = 0.8$; *b*, $h = 0.4$: *1* – $E_1/E_0 = 4$; *2* – $E_1/E_0 = 8$; *c*, $h = 0.4$: *1* – $E_1/E_0 = 0.125$; *2* – $E_1/E_0 = 0.5$).



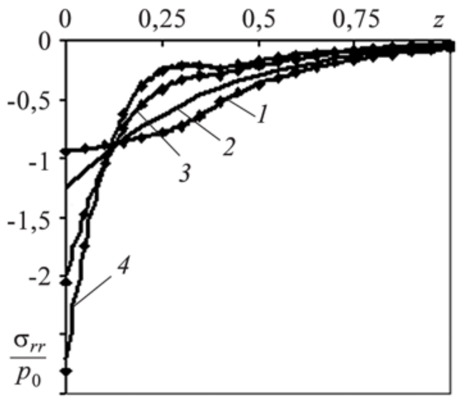


Рис. 5. Fig. 5. Рис. 6. Fig. 6.

Рис. 5. Залежність колових напружень на поверхні неоднорідного півпростору від параметрів E_1/E_0 і h ($\mu = 1/3$; $n = 20$; $h = 0{,}4$; *1* – $E_1/E_0 = 0{,}125$; *2* – 0,5; *3* – однорідний півпростір; *4* – $E_1/E_0 = 4$; *5* – 8).

Fig. 5. The dependence of circumferential stresses on the surface of heterogeneous half-space on parameters E_1/E_0 and h ($\mu = 1/3$; $n = 20$; $h = 0.4$; *1* – $E_1/E_0 = 0.125$; *2* – 0.5; *3* – homogeneous half-space; *4* – $E_1/E_0 = 4$; *5* – 8).

Рис. 6. Залежність радіальних напружень на осі z' ($z = h - z'$) від параметрів E_1/E_0 і h ($\mu = 1/3$; $n = 20$; $h = 0{,}4$; *1* – $E_1/E_0 = 0{,}125$; *2* – однорідний півпростір; *3* – $E_1/E_0 = 4$; *4* – 8).

Fig. 6. The dependence of radial stresses on the axis z' ($z = h - z'$) on parameters E_1/E_0 and h ($\mu = 1/3$; $n = 20$; $h = 0.4$; *1* – $E_1/E_0 = 0.125$; *2* – homogeneous half-space; *3* – $E_1/E_0 = 4$; *4* – 8).

(σ_1, σ_2 і σ_3 – головні напруження) виникає, як і в задачі Герца, на осі z', де існує рівність

$$\tau_{\max} = \sqrt{3} J_2 / 2 = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 = |\sigma_{rr} - \sigma_{zz}|/2 .$$

Це означає, що точка максимуму параметра J_2 є одночасно точкою максимуму максимальних дотичних напружень.

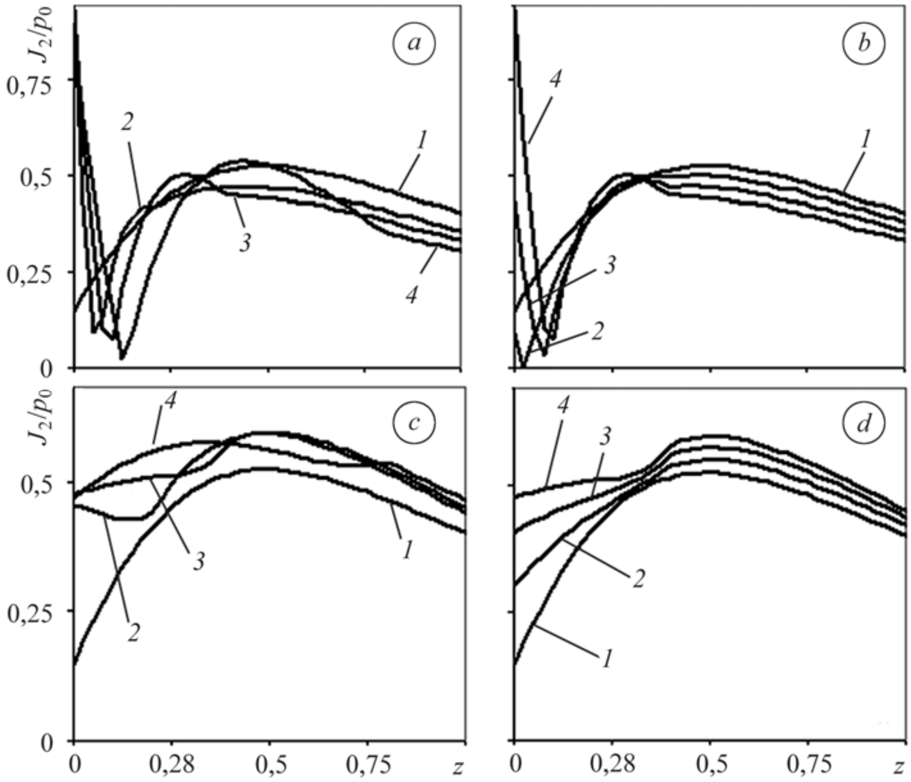


Рис. 7. Залежність розподілу параметра J_2 вздовж осі z' ($z = h - z'$) від параметрів E_1/E_0 і h ($\mu = 1/3$; крива *1* – однорідний півпростір; *a*, $E_1/E_0 = 8$: *2* – $h = 0{,}2$; *3* – 0,4; *4* – 0,8; *b*, $h = 0{,}4$: *2* – $E_1/E_0 = 2$; *3* – 4; *4* – 8; *c*, $E_1/E_0 = 0{,}125$: *2* – $h = 0{,}2$; *3* – 0,4; *4* – 0,8; *d*, $h = 0{,}4$: *2* – $E_1/E_0 = 0{,}5$; *3* – 0,25; *4* – 0,125).

Fig. 7. The dependence of parameter J_2 along the axis z' ($z = h - z'$) on parameters E_1/E_0 and h ($\mu = 1/3$; curve *1* – homogeneous half-space; *a*, $E_1/E_0 = 8$: *2* – $h = 0.2$; *3* – 0.4; *4* – 0.8; *b*, $h = 0.4$: *2* – $E_1/E_0 = 2$; *3* – 4; *4* – 8; *c*, $E_1/E_0 = 0.125$: *2* – $h = 0.2$; *3* – 0.4; *4* – 0.8; *d*, $h = 0.4$: *2* – $E_1/E_0 = 0.5$; *3* – 0.25; *4* – 0.125).

Якщо $E_1/E_0 >> 1$, слід очікувати значної різниці між напруженнями σ_{rr} і σ_{zz} у центрі ділянки контакту. Внаслідок цього найбільше значення параметрів J_2 чи $\tau_{\max}$ спостерігаємо саме тут (рис. 7*a*). Зі зменшенням параметра E_1/E_0 (далі вважаємо, що $E_1/E_0 > 1$) ця різниця зменшується. Найбільше значення параметрів J_2 чи $\tau_{\max}$ виникає в неоднорідному шарі на незначній відстані від межі поділу шару і основи (рис. 7*b*). У серединній частині неоднорідного шару зафіксовано чітко виражений мінімум цих параметрів, що описано для однорідного поверхневого шару [35, 36]. Якщо $E_1/E_0 < 1$, найбільше значення параметра J_2 в неоднорідному шарі зафіксовано (рис. 7*c*, *d*) на поверхні неоднорідного півпростору ($h = 0{,}2$), на межі поділу ($h = 0{,}4$), в серединній частині неоднорідного шару ($h = 0{,}8$).

Слід відмітити, що результати обчислень для неоднорідного шару, товщина якого значно перевищує радіус ділянки контакту, добре узгоджуються з опублікованими раніше [22], де обмежились аналізом задачі для значення параметра $h = 5$.

ВИСНОВКИ

Показано, що розв'язок контактної задачі для пакета з 20–40 однорідних шарів добре узгоджується з розв'язком задачі для поверхневого шару, коефіцієнт Пуассона якого сталий, а залежність модуля Юнґа від координати z' описує натуральна показникова функція. Це є вагомим аргументом до моделювання поверхневого шару з неперервною зміною механічних властивостей пакетом однорідних шарів.

Характер перерозподілу контактного тиску і другого інваріанта девіатора тензора напружень, що виникає після нанесення поверхневого шару з описаними вище механічними властивостями, такий, як для однорідного півпростору, покритого однорідним шаром з іншими механічними властивостями [33–36]. В розглядуваній задачі, на відміну від контактної [33–36], радіальні і колові напруження на межі поділу шару і основи є завжди стискальні.

РЕЗЮМЕ. Рассмотрена осесимметричная контактная задача о вдавливании абсолютно жесткого шара в неоднородное полупространство, состоящее из однородного основания и поверхностного неоднородного слоя, коэффициент Пуассона которого постоянный, а зависимость модуля Юнга от расстояния до поверхности полупространства описывает показательная функция. Решение задачи теории упругости, учитывающее непрерывную зависимость модуля Юнга от координаты, сравнено с решением задачи, в которой неоднородный слой заменен пакетом однородных.

SUMMARY. An axisymmetrical contact problem of indentation of a rigid sphere into a functionally graded coated half-space is considered. The Young's modulus of the graded coating is assumed to be an exponential function and the Poisson's ratio is a constant. The solutions of contact problem of the theory of elasticity for functionally graded coated half-space and the one obtained within the framework of a multi-layered coated half-space are compared.

Працю виконано за проектом S/WM/2/2008, що реалізується в Бялостоцькій політехніці і фінансується Комітетом наукових досліджень Польщі.

1. *Коренев Б. Г.* Штамп, лежащий на упругом полупространстве, модуль упругости которого является функцией глубины // Докл. АН СССР. – 1957. – **112**, № 5. – С. 823–826.
2. *Моссаковский В. И.* Давление круглого штампа на упругое полупространство, модуль упругости которого является степенной функцией глубины // Прикл. математика и механика. – 1958. – **22**, № 1. – С. 123–125.
3. *Коган Б. И., Зинченко В. Д.* Напряженное состояние неоднородного слоя, покоящегося на упругом полупространстве // Изв. вузов. Сер. Строительство и архитектура. – 1960. – № 3. – С. 8–18.
4. *Раков А. К., Рвачев В. П.* Контактная задача теории упругости для полупространства, модуль упругости которого есть степенная функция глубины // Доп. АН УССР. – 1961. – № 3. – С. 286–290.
5. *Тер-Мкртичьян Л. Н.* Некоторые задачи теории упругости неоднородных упругих сред // Прикл. математика и механика. – 1961. – **25**, № 6. – С. 1120–1125.
6. *Ростовцев Н. А.* К теории упругости неоднородной среды // Там же. – 1964. – **28**, № 4. – С. 601–611.
7. *Шевляков Ю. А., Наумов Ю. А., Чистяк В. Н.* К расчету неоднородных оснований // Прикл. механика. – 1968. – **4**, № 9. – С. 66–73.
8. *Попов Г. Я.* Осесимметричная контактная задача для упругого неоднородного полупространства при наличии сцепления // Прикл. математика и механика. – 1973. – **37**, № 6. – С. 1109–1116.
9. *Плевако В. П.* О возможности использования гармонических функций при решении задач теории упругости неоднородных сред // Там же. – 1972. – **36**, № 5. – С. 886–894.

10. *Плевако В. П.* Неоднородный слой, сцепленный с полупространством под воздействием внутренних и внешних сил // Там же. – 1974. – 3**8**, № 5. – С. 865–875.
11. *Kassir M. K., Chuaprasert M. F.* A rigid punch in contact with a non-homogeneous elastic solid // Trans. ASME: J. of Appl. Mech. – 1974. – **41**. – P. 1019–1024.
12. *Giannakopoulos A. E., Suresh S.* Indentation of solids with gradients in elastic properties: part II. Axisymmetric indentors // Int. J. Solids Struct. – 1997. – **34**. – P. 2393–2428.
13. *Giannakopoulos A. E., Pallot P.* Two-dimensional contact analysis of elastic graded materials // J. Mech. Phys. Solids. – 2000. – **48**. – P. 1597–1631.
14. *Fischer-Cripps A. C.* Analysis of instrumented indentation test data for functionally graded materials // Surface & Coatings Technology. – 2003. – **168**. – P. 136–141.
15. *Guler M. A., Erdogan F.* Contact mechanics of graded coatings // Int. J. Solids Struct. – 2004. – **41**. – P. 3865–3889.
16. *Guler M. A., Erdogan F.* Contact mechanics of two deformable elastic solids with graded coatings // Mechanics of Materials. – 2006. – **38**. – P. 633–647.
17. *Guler M. A., Erdogan F.* The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings // Int. J. Mech. Sci. – 2007. – **49**. – P. 161–182.
18. *Analitycal* solution of the spherical indentation problem for a half-space with gradients with the depth elastic properties / S. M. Aizikovich, V. M. Alexandrov, J. J. Kalker et al. // Int. J. Solids Struct. – 2002. – **39**. – P. 2745–2772.
19. *Liao-Liang Ke, Yue-Sheng Wang* Two-dimensional contact mechanics of functionally graded materials with arbitrary spatial variations of material properties // Ibid. – 2006. – **43**. – P. 5779–5798.
20. *Liao-Liang Ke, Yue-Sheng Wang* Two-dimensional sliding frictional contact of functionally graded materials // Eur. J. of Mech. A/Solids. – 2007. – **26**. – P. 171–188.
21. *Tie-Jun Liu, Yue-Sheng Wang, Chuanzeng Zhang* Axisymmetric frictionless contact of functionally graded materials // Archive of Appl. Mech. – 2008. – **78**. – P. 267–282.
22. *Tie-Jun Liu, Yue-Sheng Wang* Axisymmetric frictionless contact problem of a functionally graded coating with exponentially varying modulus // Acta Mech. – 2008. – **199**. – P. 151–165.
23. *Kulchytsky-Zhyhailo R., Matysiak S. J.* On heat conduction problem in a semi-infinite periodically laminated layer // Int. Commun. Heat Mass Transfer. – 2005. – **32**, № 1–2. – P. 123–132.
24. *Kulchytsky-Zhyhailo R., Matysiak S. J.* On some heat conduction problem in a periodically two-layered body. Comparative results // Ibid. – 2005. – **32**, № 3–4. – P. 332–340.
25. *Кульчицкий-Жигайло Р., Колодзейчик В.* Поле напряжений в неоднородной полуплоскости с периодической структурой, вызванное давлением Герца // Трение и износ. – 2005. – **26**, № 4. – С. 358–366.
26. *Колодзейчик В., Кульчицький-Жигайло Р.* Тиск бокової поверхні циліндра на періодично шаруватий півпростір // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – **43**, № 3. – С. 51–57.

    (*Kolodziejczyk W. and Kul'chyts'kyi-Zhyhailo R.* Pressure of the Lateral Surface of a Cylinder on a Periodically Layered Half Space // Materials Science. – 2007. – **43**, № 3. – P. 351–360.)
27. *Kulchytsky-Zhyhailo R., Kolodziejczyk W.* On axisymmetrical contact problem of pressure of a rigid sphere into a periodically two-layered semi-space // Int. J. Mech. Sci. – 2007. – **49**. – P. 704–711.
28. *Kulchytsky-Zhyhailo R., Matysiak S., Perkowski D.* On displacements and stresses in a semi-infinite laminated layer: comparative results // Meccanica. – 2007. – **42**. – P. 117–126.
29. *Johnson K. L.* Contact mechanics. – Cambridge: Cambridge University Press, 1985. – 452 p.
30. *Матысяк С., Евтушенко А. А., Кульчицкий-Жигайло Р. Д.* Контактные задачи термоупругости для полупространства из функционально-градиентного материала // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 2. – С. 45–56.
31. *Kulczycki R.* Przestrzenne zagadnienia kontaktowe termosprężystości. – Białystok: Wydawnictwo PB, 2002. – 192 s.
32. *Ozturk M., Erdogan F.* Axisymmetric crack problem in bonded materials with a graded interfacial region // Int. J. Solids Structures. – 1996. – **33**. – P. 193–219.
33. *Gupta P. K., Walowit J. A.* Contact stresses between an elastic cylinder and a layered elastic solid // Trans ASME: J. Lubr. Technol. – 1974. – **96**. – P. 250–257.
34. *Chen W. T., Engel P. A.* Impact and contact stress analysis in multilayer media // Int. J. Solids Struct. – 1972. – **8**. – P. 1257–1281.
35. *Kouitat Njiwa R., Consiglio R., Stebut J.* Boundary element modeling of coated materials in static and sliding ball-flat elastic contact // Surface & Coatings Technology. – 1998. – **102**. – P. 148–153.
36. *Kouitat Njiwa R., Stebut J.* Boundary element numerical modeling as a surface engineering tool: application to very thin coatings // Ibid. – 1999. – **116–119**. – P. 573–579.

Одержано 30.07.2008