

УДК 539.3

НАПРУЖЕННЯ У ПРУЖНІЙ ПЛОЩИНІ З ПЕРІОДИЧНОЮ СИСТЕМОЮ БЛИЗЬКО РОЗМІЩЕНИХ ОТВОРІВМ. П. САВРУК¹, А. КАЗБЕРУК²¹ Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів;² Білостоцька політехніка, Польща

Методом сингулярних інтегральних рівнянь розглянуто плоску періодичну задачу теорії пружності для площини з нескінченним рядом близько розміщених криволінійних отворів. Особливу увагу приділено єдиному підходу до розв'язування задач концентрації напружень біля отворів з гострими та закругленими вершинами. Таким способом отримано розв'язки задач про пружну взаємодію еліптичних, овальних і ромбічних отворів та фізичних щілин для довільної віддалі між отворами. За допомогою граничного переходу, коли віддаль між межовими контурами прямує до нуля, знайдено коефіцієнти концентрації та інтенсивності напружень у закруглених та гострих вершинах відповідних двобічних вирізів у пружній площині.

Ключові слова: механіка руйнування, коефіцієнт інтенсивності напружень, періодична система отворів, двобічний виріз, метод сингулярних інтегральних рівнянь.

Періодичні задачі теорії пружності для площини з нескінченним рядом криволінійних отворів розглядали багато дослідників [1–8]. Числові результати для коефіцієнтів концентрації напружень отримано, в основному, для кругових та еліптичних отворів, коли відносна віддаль між ними не є мала. На контурах близько розміщених отворів спостерігається велика концентрація напружень. Через це виникають значні обчислювальні труднощі під час дослідження розподілу напружень. Сучасні комп'ютери та нові числові методи розв'язування інтегральних рівнянь дають змогу розрахувати порядок особливості максимальних напружень і знайти числовий коефіцієнт при цій особливості для отворів різної конфігурації та малих віддалей між ними. Знання особливості напружень важливе для розробки прямих числових методів розв'язування подібних задач. Такі дослідження можна використати також, щоб отримати розв'язки нових задач за допомогою граничних переходів.

Нижче методом сингулярних інтегральних рівнянь розглянуто плоску періодичну задачу теорії пружності для площини з нескінченним рядом близько розміщених криволінійних отворів. За єдиним підходом до розв'язування задач концентрації напружень біля отворів з гострими та закругленими вершинами [9, 10] на основі розв'язку задачі для гладкого межового контуру отримано коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) для гострих вершин отворів. Граничним переходом отримано також коефіцієнти концентрації та інтенсивності напружень у закруглених та гострих вершинах двобічних криволінійних вирізів у пружній площині.

Інтегральне рівняння задачі. Розглянемо пружну площину з періодичною системою криволінійних отворів, рівномірно розміщених вздовж осі Ox основної декартової системи координат xOy (область S^+). Межовий контур L_k

Контактна особа: М. П. САВРУК, e-mail: savruk@ipm.lviv.ua

($L_0 = L$) кожного отвору віднесено до локальної системи координат $x_k O_k y_k$, вісь $O_k x_k$ якої напрямлена вздовж осі Ox , а початок координат O_k лежить всередині отвору в точці $x = kd$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) цієї осі, де d – ширина смуги періодів. На нескінченності площина розтягається напруженнями $\sigma_y^\infty = p$ і $\sigma_x^\infty = q$ (рис. 1).

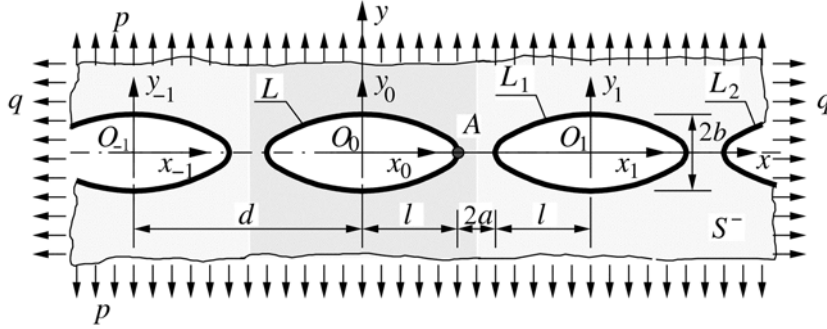


Рис. 1. Періодична система криволінійних отворів у пружній площині.

Fig. 1. A periodic system of curvilinear holes in an elastic plane.

Вважаючи, що на всіх контурах отворів діє одне і те ж самозрівноважене навантаження $p_*(t)$, матимемо напружено-деформований стан площини, що задовольняє умови періодичності (напруження – періодичні функції координати x з періодом d). Тоді комплексні потенціали напружень Колосова–Мусхелішвілі [11] можна записати у вигляді

$$\Phi_*(z) = \Phi_0(z) + \Phi(z), \quad \Psi_*(z) = \Psi_0(z) + \Psi(z), \quad z = x + iy,$$

де відомі функції

$$\Phi_0(z) = (p + q)/4, \quad \Psi_0(z) = (p - q)/2$$

описують однорідний напружений стан у суцільній площині без отворів, а для потенціалів $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ маємо [12] інтегральні зображення через невідому функцію $g'(t)$ на контурі отвору L :

$$\begin{aligned} \Phi(z) = \frac{1}{2d} \int_L g'(t) \cot \frac{\pi}{d}(t-z) dt, \quad \Psi(z) = \frac{1}{2d} \int_L \left\{ \overline{g'(t)} \cot \frac{\pi}{d}(t-z) \overline{dt} - \right. \\ \left. - \left[\cot \frac{\pi}{d}(t-z) + \frac{\pi}{d}(\bar{t}-t+z) \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{d}(t-z) \right] g'(t) dt \right\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут за додатний вважаємо той напрям обходу контуру L , за якого внутрішність отвору (область S^+) залишається справа, тобто напрям руху стрілок годинника.

Компоненти напружень зв'язані з комплексними потенціалами залежностями [11]

$$\sigma_x + \sigma_y = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)].$$

Крайові умови на контурі L для збуреної задачі подамо у вигляді

$$N(t) + iT(t) = p(t) = p_*(t) - \left\{ \Phi_0(t) + \overline{\Phi_0(t)} + \frac{dt}{dt} \left[t\overline{\Phi_0(t)} + \overline{\Psi_0(t)} \right] \right\}, \quad t \in L,$$

а на нескінченності збурені напруження прямують до нуля. Тут $N(t)$ і $T(t)$ – нормальна і дотична компоненти напружень.

Сформульовану крайову задачу з допомогою комплексних потенціалів (1) можна звести до сингулярного інтегрального рівняння на замкненому контурі L відносно шуканої функції $g'(t)$ [12]:

$$\int_L \left[K(t, t') g'(t) dt + L(t, t') \overline{g'(t)} dt \right] - \frac{1}{2i} \frac{M_0}{(\bar{t}')^2} \frac{d\bar{t}'}{dt'} + \frac{a_0}{R} \frac{ds'}{dt'} = \pi p(t'), \quad t' \in L, \quad (2)$$

де R – довільний параметр розмірності довжини; s' – дугова абсциса точки t' на контурі L ;

$$M_0 = i \int_L \left[\bar{t} g'(t) dt - t \overline{g'(t)} dt \right], \quad a_0 = \int_L g'(t) dt. \quad (3)$$

Додаткові доданки у рівнянні (2) з функціоналами (3) забезпечують існування його єдиного розв'язку для довільної правої частини. Коли навантаження $p_*(t)$ на контурі L задовольняє умови рівноваги, функціонали (3) рівні нулю [12].

Ядра рівняння (2) визначають за формулами

$$K(t, t') = \frac{\pi}{2d} \left[\cot \frac{\pi}{d} (t - t') + \frac{d\bar{t}'}{dt'} \cot \frac{\pi}{d} (\bar{t} - \bar{t}') \right],$$

$$L(t, t') = \frac{\pi}{2d} \left[\left(1 - \frac{d\bar{t}'}{dt'} \right) \cot \frac{\pi}{d} (\bar{t} - \bar{t}') - \frac{\pi}{d} \frac{d\bar{t}'}{dt'} (t - t' + \bar{t}' - \bar{t}) \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{d} (\bar{t} - \bar{t}') \right].$$

Записавши рівняння контуру L у параметричному вигляді, замінімо змінні

$$t = l\omega(\xi), \quad t \in L, \quad 0 \leq \xi \leq 2\pi; \quad t' = l\omega(\eta), \quad t' \in L, \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi$$

і перепишемо інтегральне рівняння (2) в канонічному вигляді:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[M(\xi, \eta) u(\xi) + N(\xi, \eta) \overline{u(\xi)} \right] d\xi = p(\eta), \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi. \quad (4)$$

Тут прийнято $R = l$ і введено позначення

$$M(\xi, \eta) = IK(\omega(\xi), \omega(\eta)) - \frac{\overline{\omega(\xi)}}{2\omega^2(\eta)} \frac{\overline{\omega'(\eta)}}{\omega'(\eta)} + \frac{|\omega'(\eta)|}{\omega'(\eta)}; \quad u(\xi) = g'(\omega(\xi)) \omega'(\xi);$$

$$N(\xi, \eta) = IL(\omega(\xi), \omega(\eta)) + \frac{\overline{\omega(\xi)}}{2\omega^2(\eta)} \frac{\overline{\omega'(\eta)}}{\omega'(\eta)} + \frac{|\omega'(\eta)|}{\omega'(\eta)}; \quad p(\eta) = p(\omega(\eta)).$$

Коли контур L гладкий і навантаження $p_*(t)$ є неперервна функція, то шукана функція $u(\xi)$ буде 2π -періодичною неперервною. Однак в околі вершин отвору з малим радіусом кривини, де є велика концентрація напружень, ця функція має квазіособливості, що утруднює отримання числового розв'язку з достатньою точністю. Для поліпшення точності розв'язування використаємо сигмоїдне нелінійне перетворення [10, 13], за яким обчислюють квазі-сингулярні інтегралі на замкнених контурах:

$$\xi = G(\tau) = \tau - \frac{1}{k} \sin k\tau, \quad 0 \leq \tau \leq 2\pi; \quad \eta = G(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (5)$$

де k – натуральне число.

Підставивши залежності (5) у рівняння (4), отримаємо:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[M(\xi, \eta)u(\tau) + N(\xi, \eta)\overline{u(\tau)} \right] G'(\tau) d\tau = p(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (6)$$

де $u(\tau) = u(G(\tau))$, $p(\theta) = p(G(\theta))$.

Числовий розв'язок інтегрального рівняння (6) шукатимемо квадратурним методом [12, 14]. Дискретним аналогом інтегрального рівняння (6) є система лінійних алгебричних рівнянь [12]

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{4n} \left[M(\xi_k, \eta_m)u(\tau_k) + N(\xi_k, \eta_m)\overline{u(\tau_k)} \right] G'(\tau_k) = p(\theta_m), \quad m = 1, \dots, 4n, \quad (7)$$

де квадратурні вузли і точки колокацій визначають формули

$$\begin{aligned} \xi_k &= G(\tau_k), \quad \tau_k = \pi(2k-1)/(4n), \quad k = 1, \dots, 4n, \\ \eta_m &= G(\theta_m), \quad \theta_m = 2\pi(m-1)/(4n), \quad m = 1, \dots, 4n. \end{aligned}$$

Вважатимемо, що контур L і зовнішнє навантаження симетричні відносно осей Ox і Oy . Тоді порядок системи рівнянь (7) можна зменшити у чотири рази, використавши умови симетрії для шуканої функції

$$u(2\pi - \tau) = \overline{u(\tau)}, \quad u(\pi - \tau) = -\overline{u(\tau)}. \quad (8)$$

При цьому, однак, функціонали (3) стають тотожно рівними нулю, що порушує умови розв'язності інтегрального рівняння (6) та системи (7). Врахувавши умови рівності нулю дотичних напружень у симетричних точках контуру L ($\theta_1 = 0$, $\theta_{n+1} = \pi/2$), отримаємо систему $2n$ дійсних лінійних алгебричних рівнянь, що має єдиний розв'язок для довільної правої частини

$$\begin{cases} \frac{1}{n} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \left[M^*(\xi_k, \eta_m)u(\tau_k) \right] G'(\tau_k) = p(\theta_m), & m = 1, \\ \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \left[M^*(\xi_k, \eta_m)u(\tau_k) + N^*(\xi_k, \eta_m)\overline{u(\tau_k)} \right] G'(\tau_k) = p(\theta_m), & m = \overline{2, n}, \\ \frac{1}{n} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \left[M^*(\xi_k, \eta_m)u(\tau_k) \right] G'(\tau_k) = p(\theta_m), & m = n+1, \end{cases} \quad (9)$$

з n невідомими значеннями комплексної функції $u(\tau_k)$, $k = 1, \dots, n$. У співвідношеннях (9) уведено позначення

$$M^*(\xi_k, \eta_m) = M(\xi_k, \eta_m) - N(\pi - \xi_k, \eta_m) - M(\pi + \xi_k, \eta_m) + N(2\pi - \xi_k, \eta_m),$$

$$N^*(\xi_k, \eta_m) = N(\xi_k, \eta_m) - M(\pi - \xi_k, \eta_m) - N(\pi + \xi_k, \eta_m) + M(2\pi - \xi_k, \eta_m).$$

Зауважимо, що уявна частина функції $p(\theta)$ у точках $\theta_1 = 0$ і $\theta_{n+1} = \pi/2$ набуває нульових значень, оскільки на осях симетрії дотичні напруження відсутні.

Після розв'язання системи лінійних алгебричних рівнянь (7) або (9) можна визначити комплексні потенціали напружень (1), які описують напружено-деформований стан у всій пружній області. Обчислити нормальні напруження σ_s на контурі отвору можна безпосередньо через функцію $u(\tau)$, коли край отвору вільний від навантаження ($p_*(t) = 0$) [15]:

$$\sigma_s(t) = 4 \operatorname{Re} \Phi_0(t) - 4 \operatorname{Im} [u(\tau) / \omega'(\xi)], \quad t \in L.$$

Враховуючи рівність $u(\xi)|_{\xi=0} = u(\tau)|_{\tau=0}$, коефіцієнт концентрації напружень k_t у точці $\xi = \tau = 0$ (точка A на рис. 1) визначаємо за формулою

$$k_t = \frac{\sigma_{\max}}{p} = 1 + \frac{q}{p} - 4 \operatorname{Im} \frac{u(0)}{\omega'(0)},$$

причому значення $u(0)$ знаходимо, користаючись інтерполяційним поліномом на рівновіддалених вузлах (див., напр., [16]):

$$u(\tau) = \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{4n} u(\tau_k) \sin[2n(\tau - \tau_k)] \cot[(\tau - \tau_k)/2].$$

Беручи до уваги умови симетрії (11), отримуємо:

$$u(0) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \operatorname{cosec} \tau_k \operatorname{Re} u(\tau_k).$$

Нижче таким методом знайдено числові розв'язки для різних форм симетричних отворів, вільних від зовнішнього навантаження ($p_*(t) = 0$), коли на нескінченності задані розтягальні напруження $\sigma_y^\infty = p$ і $\sigma_x^\infty = 0$. Основну увагу звернено на отримання результатів для близько розміщених отворів, щоб на цій основі за допомогою граничного переходу, коли віддаль між сусідніми отворами прямує до нуля, побудувати розв'язки про розтяг пружної площини з двобічними гострим чи закругленим вирізами.

Система еліптичних отворів. Нехай контуром L є еліпс з півосями l і b , параметричне рівняння якого запишемо у вигляді

$$t = l\omega(\xi), \quad \omega(\xi) = \cos \xi - i\sqrt{\varepsilon} \sin \xi, \quad 0 \leq \xi \leq 2\pi,$$

де параметр $\varepsilon = \rho/l = (b/l)^2$ характеризує відносний радіус кривини у вершинах контуру L , що лежать на осі Ox .

На основі числового розв'язання системи рівнянь (9), коли у функції $G(\tau)$ (5) параметр $k = 2$, обчислено коефіцієнт концентрації напружень як функцію відносних радіуса кривини ε (рис. 2a) і віддалі між отворами $(1 - \gamma) = 2a/d$ (рис. 2b) для різних значень параметра $\chi = \rho/a = \varepsilon\gamma/(1 - \gamma)$.

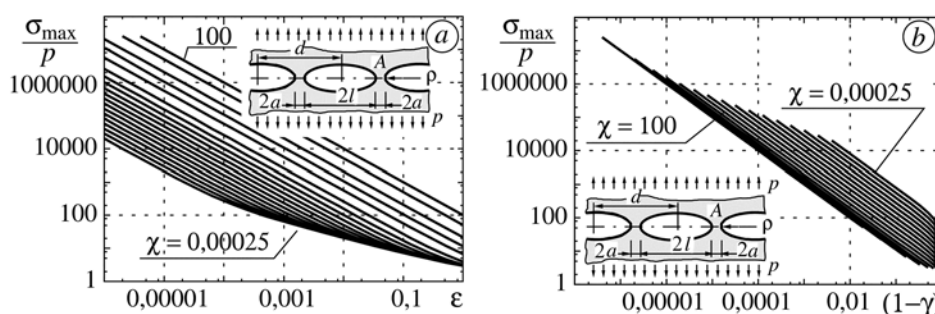


Рис. 2. Залежності коефіцієнта концентрації напружень у вершині A періодичної системи еліптичних отворів від параметрів ε (a) і $(1 - \gamma)$ (b).

Fig. 2. Dependences of stress concentration factor at point A for periodic system of elliptic holes on parameters ε (a) and $(1 - \gamma)$ (b).

Отримані числові результати порівнювали з відомими [2, 4, 5, 8]. Зокрема, для кругових отворів ($\varepsilon = 1$) максимальна відносна різниця між цими даними та обчисленими за апроксимаційною формулою Шульца (див. [8])

$$k_t = \frac{\sigma_{\max}}{p} = \frac{1}{1-\gamma} (3 - 3,095\gamma + 0,309\gamma^2 + 0,786\gamma^3)$$

не перевищує 3,5% для всього діапазону зміни відносної віддалі між отворами ($0 \leq \gamma < 1$), причому на кінцях інтервалу вона наближається до нуля.

Система фізичних щілин. Нехай контур фізичної щілини L складається з двох паралельних відрізків, гладко з'єднаних на кінцях півколами радіуса ρ . Довжина щілини рівна $2l$. Відносну її товщину характеризує параметр $\varepsilon = \rho/l$. Параметричне рівняння контуру, симетричного відносно осей Ox і Oy , можна записати у вигляді

$$t = l\omega(\xi) = l \begin{cases} \omega_0(\xi), & 0 \leq \xi < \pi/2, \\ -\overline{\omega_0(\pi - \xi)}, & \pi/2 \leq \xi < \pi, \\ -\omega_0(\xi - \pi), & \pi \leq \xi < 3\pi/2, \\ \overline{\omega_0(2\pi - \xi)}, & 3\pi/2 \leq \xi < 2\pi, \end{cases} \quad (10)$$

де функція $\omega_0(\xi)$ описує контур L у четвертій чверті системи координат xOy . Для фізичної щілини матимемо:

$$\omega_0(\xi) = \begin{cases} 1 - \varepsilon + \varepsilon(\cos c\xi - i \sin c\xi), & 0 \leq \xi < \pi/(2c), \\ \varepsilon c(\pi/2 - \xi) - i\varepsilon, & \pi/(2c) \leq \xi \leq \pi/2. \end{cases}$$

Концентрацію напружень обчислено на основі розв'язання системи рівнянь (9), коли у функції $G(\tau)$ (5) параметр $k = 2$. Значення коефіцієнтів концентрації напружень у вершині A (рис. 1), помножені на відносну віддаль між щілинами $(1-\gamma) = 2a/d$, наведено на рис 3. Як бачимо, для $\varepsilon \rightarrow 0$ і $\gamma \rightarrow 1$ коефіцієнти концентрації залежать тільки від параметра $\chi = \rho/a$, що дає змогу зробити граничний перехід до площини із зовнішньою фізичною щілиною.

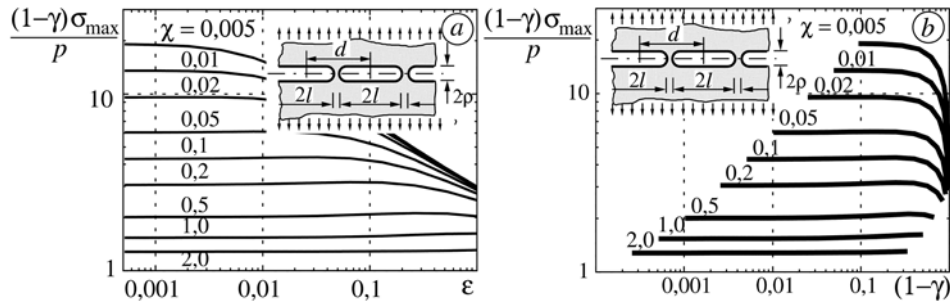


Рис. 3. Залежності функції $(1-\gamma)\sigma_{\max}/p$ від параметрів ε (a) та $(1-\gamma)$ (b) для періодичної системи фізичних щілин.

Fig. 3. Dependences of function $(1-\gamma)\sigma_{\max}/p$ on parameters ε (a) and $(1-\gamma)$ (b) for periodic system of physical cracks.

Система ромбічних або двокутних отворів. Розглянемо одновісний розтяг пружної площини з періодичною системою ромбічних отворів із закругленими вершинами. Отвір в околі вершин, що лежать на осі Ox , є кутувим вирізом з кутом розхилу 2β і радіусом закруглення ρ (рис. 4a). Коли прямолінійні ділянки межевого контуру відсутні, то отримуємо овальний отвір (рис. 4b).

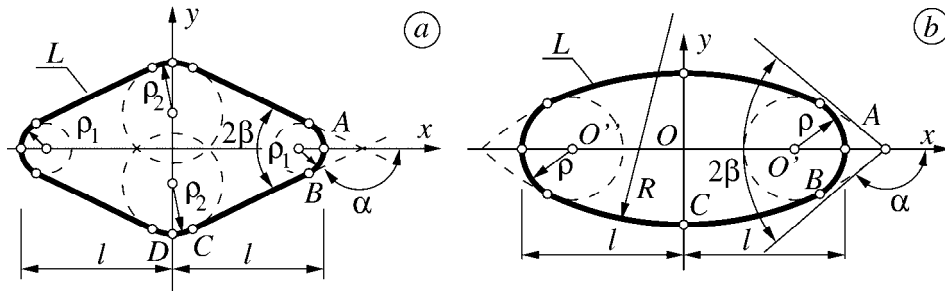


Рис. 4. Геометрія контурів отворів: ромбічний із закругленими вершинами (а) та овальний (б).

Fig. 4. Geometry of contours of holes: rhombic hole with rounded apexes (a) and oval hole (b).

Параметричне рівняння межових контурів можна записати у формі (10), де функція $\omega_0(\xi)$ для ромбічного отвору має вигляд

$$\omega_0(\xi) = \begin{cases} (1-\varepsilon) + \varepsilon \left(\cos \frac{c\xi}{\varepsilon} - i \sin \frac{c\xi}{\varepsilon} \right), & 0 \leq \xi \leq \xi_B, \\ (1-\varepsilon) + \varepsilon \sin \beta - c(\xi - \xi_B) \cos \beta - i[\varepsilon \cos \beta + c(\xi - \xi_B) \sin \beta], & \xi_B \leq \xi \leq \xi_C, \\ \varepsilon \sin \frac{\varepsilon\beta - c(\xi - \xi_C)}{\varepsilon} - i \left[(1-\varepsilon) \tan \beta + \varepsilon \cos \frac{\varepsilon\beta - c(\xi - \xi_C)}{\varepsilon} \right], & \xi_C \leq \xi \leq \pi/2, \end{cases}$$

де $\rho_1 = \rho_2 = \rho$; $\varepsilon = \frac{\rho}{l}$; $c = \varepsilon + 2 \frac{1-\varepsilon}{\pi \cos \beta}$; $\xi_B = \varepsilon \frac{\pi - 2\beta}{2c}$; $\xi_C = \xi_B + \frac{1-\varepsilon}{c \cos \beta}$.

Контур овального отвору складається із двох пар симетричних дуг кіл радіусів ρ і R . Коли радіус ρ прямує до нуля, то отримаємо двокутний отвір, утворений двома симетричними дугами, що перетинаються на осі Ox під кутом 2β . Відносні радіуси кривини контуру овального отвору позначимо через $\varepsilon = \rho/l$ і $\vartheta = R/l$. Параметричне рівняння частини контуру L в четвертій чверті площини запишемо у вигляді

$$\omega_0(\xi) = \begin{cases} (1-\varepsilon) + \varepsilon \cos \frac{c\xi}{\varepsilon} - i \sin \frac{c\xi}{\varepsilon}, & 0 \leq \xi < \xi_B, \\ \vartheta \cos \frac{c(\xi - \xi_B) + \vartheta\theta_B}{\vartheta} + i \left[\cos \beta - \sin \frac{c(\xi - \xi_B) + \vartheta\theta_B}{\vartheta} \right], & \xi_B \leq \xi \leq \pi/2, \end{cases}$$

де

$$c = 2\varepsilon \frac{\theta_B}{\pi} + \vartheta \left(1 - 2 \frac{\theta_B}{\pi} \right), \quad \vartheta = \frac{1}{\sin^2 \beta} \left[\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + (1-2\varepsilon) \sin^2 \beta} \right],$$

$$\theta_B = \arctg \frac{\vartheta \cos \beta}{1-\varepsilon}, \quad \xi_B = \frac{\varepsilon \theta_B}{c}.$$

Концентрацію напружень на краю гладкого отвору обчислено на основі розв'язання системи рівнянь (9), коли у функції $G(\tau)$ (5) параметр $k = 4$ – для ромбічного отвору і $k = 2$ – для овального. Коли радіус кривини ρ прямує до нуля, коефіцієнти концентрації напружень у вершинах отворів на осі Ox прямують до нескінченності, подібно, як для періодичної системи еліптичних отворів (див. рис. 2). На основі числових розв'язків для гладких криволінійних отворів знайдено за допомогою граничного переходу, коли $\rho \rightarrow 0$, КІН для отворів з гострими вершинами. При цьому враховано відомий зв'язок між

коефіцієнтами концентрації та інтенсивності напружень для закруглених та гострих кутових вирізів [9]:

$$K_I^V = \frac{\sqrt{2\pi}}{R_I} \lim_{\rho \rightarrow 0} \sigma_{\max} \rho^\lambda = F_I^V \sqrt{\pi} \rho l^\lambda,$$

де K_I^V – КІН у вершині гострого кутового вирізу; R_I – коефіцієнт вирівнювання напружень [17]; σ_{\max} – максимальне напруження у вершині кутового вирізу, закругленого по дузі кола радіуса ρ ; безрозмірний КІН

$$F_I^V = \frac{\sqrt{2}}{R_I} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} k_t \varepsilon^\lambda;$$

показник особливості напружень у вершині кутового вирізу з кутом розхилу 2β за симетричного напруженого стану визначають як найменший додатний корінь характеристичного рівняння [18]

$$(1 - \lambda) \sin 2\alpha + \sin(2\alpha(1 - \lambda)) = 0, \quad \alpha = \pi - \beta.$$

Для коефіцієнта R_I побудовано апроксимаційну залежність від кута β [9, 19]

$$R_I = \frac{1 + 28,75\tilde{\alpha} + 98,04\tilde{\alpha}^2 - 102,1\tilde{\alpha}^3 + 47,4\tilde{\alpha}^4 - 8,465\tilde{\alpha}^5}{1 + 20,71\tilde{\alpha}}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\pi}{2} - \beta,$$

відносна похибка якої не перевищує 0,1% для всіх $\beta \in [0, \pi/2]$, крім діапазону $\beta \in [83\pi/180, \pi/2]$, де вона менша 0,4%. Для показника особливості λ також маємо апроксимаційну залежність [19, 20]

$$\lambda_I \approx 1,247 \cos \beta - 1,312 \cos^2 \beta + 0,8532 \cos^3 \beta - 0,2882 \cos^4 \beta, \quad 0 \leq \beta \leq \pi/2$$

з максимальною абсолютною похибкою, меншою за 0,001.

Числові результати для безрозмірних КІН у гострих вершинах (на осі Ox) періодичної системи ромбічних та двокутних отворів наведено на рис. 5. Періодичну систему ромбічних отворів розглянуто також раніше [7]. Порівняння цих даних показало їх добре узгодження для не близько розміщених отворів.

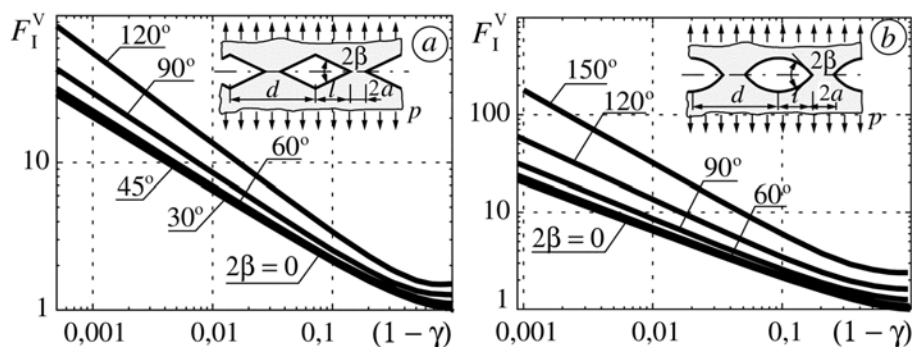


Рис. 5. Залежності безрозмірних КІН F_I^V для періодичної системи ромбічних (а) та двокутних (б) отворів від відносної віддалі між ними $(1 - \gamma)$.

Fig. 5. Dependences of dimensionless stress intensity factor, F_I^V , on relative distance, $(1 - \gamma)$, for periodic system of rhombic (a) and lune (b) holes.

Запропонований тут підхід дає змогу отримати числові результати за будь-якої віддалі між отворами, на основі яких за допомогою граничного переходу

можна побудувати розв'язки нових задач про розтяг пружної площини з двобічними гострими та закругленими кутовими вирізами.

Двобічний виріз у пружній площині. Дослідження розподілу напружень у площині з періодичною системою криволінійних отворів свідчать, що коефіцієнти концентрації напружень зі зближенням отворів виходять на певні асимптотики. Це дає змогу зробити граничний перехід до двобічного вирізу в пружній площині, яка на нескінченності розтягається силами $P = pd$. Введемо коефіцієнт концентрації напружень у вершині двобічного вирізу k_{td} як відношення максимального напруження σ_{\max} до номінального $P/(2a)$ [3, 21]:

$$k_{td} = \frac{\sigma_{\max}}{P/(2a)} = \frac{2a}{d} \frac{\sigma_{\max}}{p} = (1-\gamma) \frac{\sigma_{\max}}{p}.$$

Звідси випливає, що для знаходження коефіцієнта k_{td} за допомогою граничного переходу доцільно мати для періодичної системи отворів залежності функції $(1-\gamma)\sigma_{\max}/p$ від відносних віддалей між отворами $(1-\gamma)$ та радіуса кривини у вершині вирізу. Такі залежності наведено для періодичної системи фізичних щілин (рис. 3) та еліптичних отворів (рис. 6).

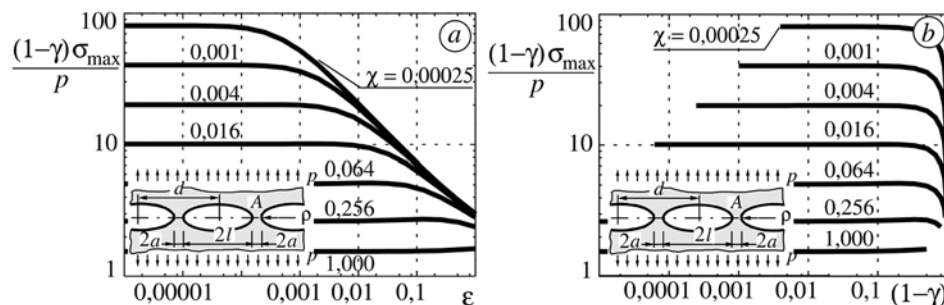


Рис. 6. Залежності функції $(1-\gamma)\sigma_{\max}/p$ у точці A для періодичної системи еліптичних отворів від параметрів ϵ (а) і $(1-\gamma)$ (б).

Fig. 6. Dependences of function, $(1-\gamma)\sigma_{\max}/p$, at the point A on parameters ϵ (a) and $(1-\gamma)$ (b) for periodic system of elliptical holes.

Відомий аналітичний розв'язок Нойбера [21, 22] для двобічного гіперболічного вирізу в пружній площині під дією розтягальних сил P на нескінченності:

$$k_{th} = \frac{\sigma_{\max}}{P/(2a)} = \frac{2(1+\chi)}{\chi + (1+\chi)\sqrt{\chi \operatorname{arctg} \sqrt{1/\chi}}}, \quad \chi = \rho/a. \quad (11)$$

Порівняно коефіцієнти концентрації напружень у вершині двобічного вирізу для різних його форм з однаковим відносним радіусом закруглення вершини: фізична щілина, параболічний та гіперболічний (рис. 7a) і кутовий закруглений та гіперболічний (рис. 7b) вирізи. З наведених даних випливає, що формула (11) досить добре описує параболічний виріз, коли відносна різниця між відповідними коефіцієнтами концентрації напружень не перевищує 1%. Для двобічної фізичної щілини ця різниця досягає 6% для $\chi < 0,1$. Для кутових закруглених вирізів маємо значне відхилення від розв'язку (11) для $\chi < 1$ і $2\beta > 60^\circ$. Коли відносний радіус кривини χ прямує до нуля, то це відхилення необмежено зростає для всіх кутів $\beta > 0$. Це можна пояснити тим, що гіперболічний виріз наближається до тріщини, а закруглений кутовий виріз –

до гострого кутового вирізу, тобто у граничному випадку маємо якісно різні концентратори напружень, у вершинах яких напруження мають різні особливості. Як і для однічних вирізів [9], тут також на концентрацію напружень значно впливає форма околу вершин двобічного вирізу.

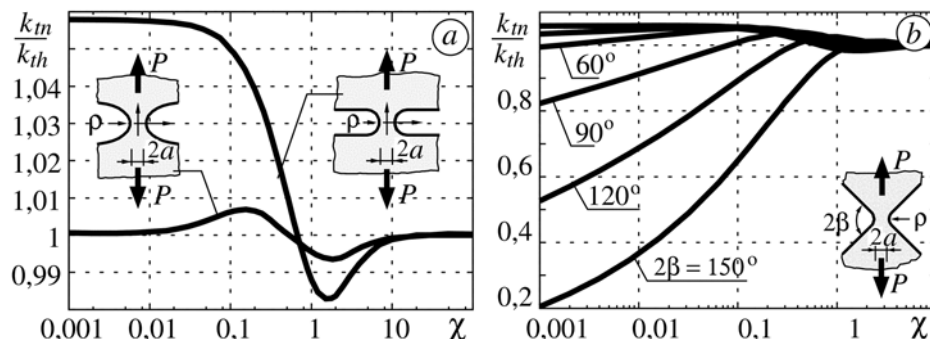


Рис. 7. Порівняння коефіцієнтів концентрації напружень для двобічних вирізів у формі фізичної щілини, параболічного та гіперболічного вирізів (а) і кутового закругленого та гіперболічного вирізів (b).

Fig. 7. Comparison of stress concentration factors for two-sided notches in the form of a physical flaw, parabolic and hyperbolic notches (a) as well as rounded V-shaped and hyperbolic notches (b).

Для отримання КІН у вершинах двобічного гострого кутового вирізу побудовано залежності функції $k_m \chi^\lambda$ від відносного радіуса кривини контуру χ (рис. 8a). Коли параметр χ прямує до нуля, добуток $k_m \chi^\lambda$ швидко виходить на асимптотичне значення, яке досягається швидше для менших кутів розхилу 2β . Так отримано залежність безрозмірного КІН $F_1^V = K_1^V \sqrt{\pi a}^{1-\lambda} / P$ у вершинах гострих вирізів від кута розхилу 2β (рис. 8b). Для зовнішньої тріщини ($\beta = 0$) параметр $F_1^V = 1$, що відповідає відомому точному розв'язку (див., напр. [23]). У другому граничному випадку ($2\beta = \pi$) маємо $k_t = 1$, $\lambda = 0$, $R_1 = 1$, звідки отримуємо $F_1^V = \pi / \sqrt{2}$.

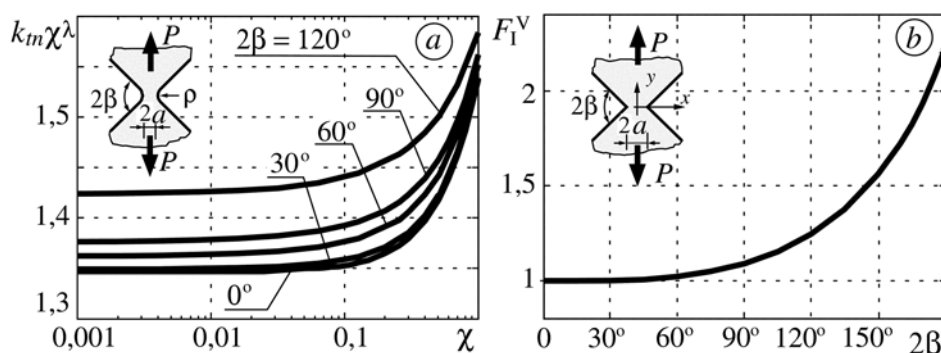


Рис. 8. Залежності функції $k_m \chi^\lambda$ від відносної кривини $\chi = \rho/a$ для різних кутів розхилу вирізів 2β (a) та безрозмірного КІН $F_1^V = K_1^V \sqrt{\pi a}^{1-\lambda} / P$ у вершинах гострих кутових вирізів від кута 2β (b).

Fig. 8. Dependences of function, $k_m \chi^\lambda$, on relative curvature, $\chi = \rho/a$, for different notch apex angles 2β (a) and dimensionless stress intensity factor, $F_1^V = K_1^V \sqrt{\pi a}^{1-\lambda} / P$, at sharp corner tips on angle 2β (b).

Залежність безрозмірного КІН F_1^V від показника особливості λ можна апроксимувати функцією [19]

$$F_1^V = \frac{1 - 0,9134\lambda}{1 + 0,4138\lambda} \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \right), \quad 0 \leq \lambda \leq 0,5,$$

відносна похибка якої не перевищує 0,5% для всього інтервалу зміни параметра λ .

ВИСНОВКИ

На основі відомих сингулярних інтегральних рівнянь періодичної задачі теорії пружності для пружної площини з криволінійними розрізами записано відповідні інтегральні рівняння для періодичної системи криволінійних отворів довільної конфігурації. Числові результати отримано квадратурним методом, коли контури отворів вільні від напружень, а на нескінченності задані розтягальні зусилля. Особливу увагу приділено єдиному підходу до розв'язування задач концентрації напружень біля отворів з гострими та закругленими вершинами, коли КІН у гострих вершинах отримують на основі розв'язку задачі для гладкого межового контуру. З допомогою сучасних комп'ютерів та нових методів обчислення квазісингулярних інтегралів знайдено розв'язки задач для досить малих радіусів кривини контурів у вершині вирізів та малих відносних віддалей між отворами. На основі цих результатів граничним переходом отримано КІН у вершинах гострих вирізів і коефіцієнти концентрації та інтенсивності напружень у закруглених та гострих вершинах двобічних криволінійних вирізів у пружній площині. Показано, що ці величини істотно залежать не тільки від відносної кривини у вершині вирізу та кута розхилу кутового вирізу, але й від форми межового контуру в околі цієї вершини.

РЕЗЮМЕ. Методом сингулярних інтегральних уравнень рассмотрена плоская периодическая задача теории упругости для плоскости с бесконечным рядом близко размещенных криволинейных отверстий. Особое внимание уделено единому подходу к решению задач концентрации напряжений около отверстий с острыми и закругленными вершинами. Таким способом получены решения задач об упругом взаимодействии эллиптических, овальных и ромбических отверстий, а также физических щелей при произвольном расстоянии между отверстиями. С помощью граничного перехода, когда расстояние между граничными контурами стремится к нулю, найдены коэффициенты концентрации и интенсивности напряжений в закругленных и острых вершинах соответствующих двухсторонних вырезов в упругой плоскости.

SUMMARY. A plane periodic problem of elasticity theory for a plane with an infinite series of closely located curvilinear holes is considered by a singular integral equation method. A special attention is paid to the unified approach to solution of the problems of stress concentration near holes with sharp and rounded apices. In such a way the solutions of problems of elastic interaction between elliptic, oval and rhombic holes, and also physical flaws were obtained for arbitrary distance between holes. Using the transition to the limit when the distance between boundary contours approached zero, the stress concentration and intensity factors were found at the rounded and sharp apices of the corresponding two-sided notches in an elastic plane.

1. Шерман Д. И. Весомая среда, ослабленная периодически расположенными отверстиями круговой и некруговой формы // Инж. журн. – 1961. – **1**, № 1. – С. 92–103.
2. Nisitani H. Method of approximate calculation for interference of notch effects and its application // Bull. JSME. – 1968. – **11**, № 47. – P. 725–738.
3. Петерсон Р. Коэффициенты концентрации напряжений. – М.: Мир, 1977. – 304 с.
4. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.
5. Космодамианский А. С. Распределение напряжений в изотропных многосвязных средах. – Донецк: ДонГУ, 1972. – 266 с.

6. Мироненко Н. И. Периодические и двоякопериодические плоские задачи теории упругости для областей с криволинейными отверстиями // Прикл. механика. – 1988. – **24**, № 6. – С. 91–97.
7. Noda N.-A., Oda K., and Inoue T. Analysis of newly-defined stress intensity factors for angular corners using singular integral equations of the body force method // Int. J. Fract. – 1996. – **76**. – P. 243–261.
8. Pilkey W. D. Peterson's Stress Concentration Factors. – New York: Wiley, 1997. – 524 p.
9. Саврук М. П., Казберук А. Зв'язок між коефіцієнтами інтенсивності та концентрації напружень для гострих і закруглених кутових вирізів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2006. – **42**, № 6. – С. 17–26.
(Savruk M. P. and Kazberuk A. Relationship between the stress intensity and stress concentration factors for sharp and rounded notches // Materials Science. – 2006. – **42**, № 6. – P. 725–738.)
10. Саврук М. П., Казберук А. Единый подход к решению задач о концентрации напряжений около острых и закругленных угловых вырезов // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 2. – С. 70–87.
(Savruk M. P. and Kazberuk A. A unified approach to problems of stress concentration near V-shaped notches with sharp and rounded tip // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, № 2. – P. 182–196.)
11. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
12. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
13. Sidi A. A new variable transformation for numerical integration / Eds. H. Brass, G. Hämmerlin // Numerical Integration IV. – Basel: Birkhäuser, 1993. – P. 359–373.
14. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. – М.: Наука, 1985. – 256 с.
15. Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук И. В. Численный анализ в плоских задачах теории трещин. – К.: Наук. думка, 1989. – 248 с.
16. Панасюк В. В., Саврук М. П., Назарчук З. Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. – К.: Наук. думка, 1984. – 344 с.
17. Benthem J. P. Stresses in the region of rounded corners // Int. J. Solids Struct. – 1987. – **23**, № 2. – P. 239–252.
18. Williams M. L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // J. Appl. Mech. – 1952. – **19**, № 4. – P. 526–530.
19. Саврук М. П., Казберук А. Проблеми механіки руйнування твердих тіл з кутовими вирізами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2009. – **45**, № 2. – С. 23–39.
20. Kazberuk A. Koncentracja naprężeń wokół owalnego otworu // Acta Mech. Autom. – 2007. – **1**, № 2. – S. 25–30.
21. Нейбер Г. Концентрация напряжений. – М.; Л.: Гостехиздат, 1947. – 204 с.
22. Neuber H. Kerbspannungslehre: Theorie der Spannungskonzentration; genaue Berechnung der Festigkeit. – Berlin: Springer, 1985. – 326 s.
23. Саврук М. П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами // Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пос. под ред. В. В. Панасюка. – К.: Наук. думка, 1988. – **2**. – 620 с.

Одержано 03.08.2009