5. *Сейфуллин Т. Р.* Комплексы Кошуля вложенных систем полиномов и двойственность // Доп. НАН України. – 2000. – № 6. – С. 26–34.
6. *Seifullin T. R.* Extension of bounded root functionals of a system of polynomial equations // Там само. – 2002. – No 7. – С. 35–42.
7. *Сейфуллин Т. Р.* Продолжение корневых функционалов системы полиномиальных уравнений и редукция полиномов по модулю ее идеала // Там само. – 2003. – № 7. – С. 19–27.
8. *Сейфуллин Т. Р.* Расширение ограниченных корневых функционалов переопределенной системы полиномиальных уравнений // Там само. – 2005. – № 8. – С. 25–30.
9. *Атья М., Макдональд И.* Введение в коммутативную алгебру. – Москва: Мир, 1972. – 160 с.

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 19.10.2006

УДК 531.36

В. И. Слынько

Об устойчивости приближенных решений нечетких дифференциальных уравнений в пространстве $\mathbb{E}^2$

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Мартынюком)

The stability of solutions of differential equations in the $\mathbb{E}^2$ space is investigated. The Lyapunov function is constructed by using the classical isoperimetric Brunn-Minkowski inequality.

В работе [1, 2] изложен подход к построению приближенных решений нечетких дифференциальных уравнений в пространстве $\mathbb{E}^2$. В рамках этого подхода естественной является постановка задачи об устойчивости приближенных решений данного класса уравнений.

Рассмотрим нечеткое дифференциальное уравнение в пространстве $\mathbb{E}^2$

$$\frac{dh(t)}{dt} = \mathcal{F}(t, h(t)), \qquad h(t_0) = h_0, \tag{1}$$

где $h(t) \in \Omega$, $\mathcal{F}\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{E}^n \to \Omega$.

Относительно этого уравнения сделаем следующие предположения.

Предположение. *Нечеткое дифференциальное уравнение (1) такое, что:*

1) оператор $\mathcal{F}$ в области $D_{T,r} = \{(t,h) \mid 0 \leqslant t - t_0 \leqslant T, \|h - h_0\|_\Omega \leqslant r\}$ удовлетворяет условию Липшица, т. е. существует постоянная L такая, что

$$\|\mathcal{F}(t,\alpha,h') - \mathcal{F}(t,\alpha,h'')\|_\Omega \leqslant L\|h' - h''\|_\Omega$$

при всех $(t,h') \in D_{T,r}$, $(t,h'') \in D_{T,r}$;

2) существуют операторы $\mathcal{F}_\alpha\colon \mathcal{K}^2_C \to C[0,2\pi]$, где $\mathcal{K}^2_C$ — пространство опорных функций непустых выпуклых компактов на плоскости, такие, что

$$[\mathcal{F}(t,h(t))]_\alpha = \mathcal{F}_\alpha(t, h_\alpha(t)), \qquad \alpha \in [0,1],$$

где $h_\alpha(t) = h(t,\alpha,.) \in C[0,2\pi]$.

Тогда, как показано в работе [1], для системы (1) можно построить систему уравнений N-го приближения для нечеткого дифференциального уравнения (1) на α-уровне

$$\frac{dx_1^{(N)}(t,\alpha)}{dt} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathcal{F}(t,\alpha,x_1^{(N)}(t,\alpha)\cos\phi + x_2^{(N)}(t,\alpha)\sin\phi + y^{(N)}(t,\alpha,\phi))\cos\phi\,d\phi,$$

$$\frac{dx_2^{(N)}(t,\alpha)}{dt} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathcal{F}(t,\alpha,x_1^{(N)}(t,\alpha)\cos\phi + x_2^{(N)}(t,\alpha)\sin\phi + y^{(N)}(t,\alpha,\phi))\sin\phi\,d\phi,$$

$$\frac{da_k^{(N)}(t,\alpha)}{dt} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathcal{F}(t,\alpha,x_1^{(N)}(t,\alpha)\cos\phi + x_2^{(N)}(t,\alpha)\sin\phi + y^{(N)}(t,\alpha,\phi))\cos k\phi\,d\phi, \tag{2}$$

$$k = 0, 2, \ldots, N,$$

$$\frac{db_k^{(N)}(t,\alpha)}{dt} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathcal{F}(t,\alpha,x_1^{(N)}(t,\alpha)\cos\phi + x_2^{(N)}(t,\alpha)\sin\phi + y^{(N)}(t,\alpha,\phi))\sin k\phi\,d\phi,$$

$$k = 2, \ldots, N,$$

с начальными условиями

$$x_1^{(N)}(t_0,\alpha) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} h_0(\alpha,\phi)\cos\phi\,d\phi, \qquad x_2^{(N)}(t_0,\alpha) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} h_0(\alpha,\phi)\sin\phi\,d\phi,$$

$$a_k^{(N)}(t_0,\alpha) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} h_0(\alpha,\phi)\cos k\phi\,d\phi, \qquad k = 0, 2, \ldots, N,$$

$$b_k^{(N)}(t_0,\alpha) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} h_0(\alpha,\phi)\sin k\phi\,d\phi, \qquad k = 2, \ldots, N.$$

Здесь

$$y^{(N)}(t,\alpha,\phi) = \frac{a_0(t,\alpha)}{2} + \sum_{k=2}^{N} 1 - \frac{k}{N+1}(a_k(t,\alpha)\cos k\phi + b_k(t,\alpha)\sin k\phi).$$

Из системы уравнений

$$\int\limits_0^{2\pi} \mathcal{F}(t,\alpha,\overline{x}_1^{(N)}(t,\alpha)\cos\phi + \overline{x}_2^{(N)}(t,\alpha)\sin\phi + \overline{y}^{(N)}(t,\alpha,\phi))\cos\phi\,d\phi = 0,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \mathcal{F}(t,\alpha,\overline{x}_1^{(N)}(t,\alpha)\cos\phi + \overline{x}_2^{(N)}(t,\alpha)\sin\phi + \overline{y}^{(N)}(t,\alpha,\phi))\sin\phi\,d\phi = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{F}(t,\alpha,\overline{x}_1^{(N)}(t,\alpha)\cos\phi + \overline{x}_2^{(N)}(t,\alpha)\sin\phi + \overline{y}^{(N)}(t,\alpha,\phi))\cos k\phi\, d\phi = 0, \tag{3}$$

$$k = 0, 2, \ldots, N,$$

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{F}(t,\alpha,\overline{x}_1^{(N)}(t,\alpha)\cos\phi + \overline{x}_2^{(N)}(t,\alpha)\sin\phi + \overline{y}^{(N)}(t,\alpha,\phi))\sin k\phi\, d\phi = 0,$$

$$k = 2, \ldots, N,$$

определяется состояние равновесия этой системы:

$$x_1^{(N)}(t,\alpha) = \overline{x}_1^{(N)}(\alpha), \qquad x_2^{(N)}(t,\alpha) = \overline{x}_2^{(N)}(\alpha),$$

$$a_0^{(N)}(t,\alpha) = a_0^{(N)}(\alpha), \qquad a_k^{(N)}(t,\alpha) = \overline{a}_k^{(N)}(\alpha),$$

$$b_k^{(N)}(t,\alpha) = \overline{b}_k^{(N)}(\alpha), \qquad k = 2, \ldots, N,$$

которому соответствует приближенное решение исходного нечеткого дифференциального уравнения (1):

$$\overline{h}^{(N)}(t,\alpha,\phi) = \frac{\overline{a}_0(\alpha)}{2} + \sum_{k=1}^{N} 1 - \frac{k}{N+1}(\overline{a}_k(\alpha)\cos k\phi + \overline{b}_k(\alpha)\sin k\phi).$$

Предположим, что при достаточно больших N выполнено условие $h^{(N)}(t) \in \mathbb{E}^2$.

Определение 1. Состояние равновесия $h(t) = \overline{h}^{(N)}(t,\alpha,\phi)$ называется:

(1) устойчивым по уровням, если для любого $t_0 \geqslant 0$, $\alpha \in [0,1]$ и положительного ε существует число $\delta = \delta(t_0,\alpha,\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $\|h_0^{(N)}(\alpha,\phi) - \overline{h}^{(N)}(\alpha,\phi)\|_{C[0,2\pi]} < \delta$ следует неравенство $\|h^{(N)}(t,\alpha,\phi) - \overline{h}^{(N)}(\alpha,\phi)\|_{C[0,2\pi]} < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0$;

(2) асимптотически устойчивым по уровням, если выполняются условия 1 определения и для каждых $t_0 \geqslant 0$ и $\alpha \in [0,1]$ существует $\rho = \rho(t_0,\alpha) > 0$ такое, что из неравенства $\|h_0^{(N)}(\alpha,\phi) - \overline{h}^{(N)}(\alpha,\phi)\|_{C[0,2\pi]} < \rho$ следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} \|h^{(N)}(t,\alpha,\phi) - \overline{h}^{(N)}(\alpha,\phi)\|_{C[0,2\pi]} = 0$.

Если δ и ρ в определении 1 можно выбрать независимо от $\alpha \in [0,1]$, то приходим к определениям устойчивости и асимптотической устойчивости состояния равновесия $h(t) = \overline{h}^{(N)}(t,\alpha,\phi)$.

Можно также ввести определения других типов устойчивости.

Обозначим $z = (x_1, x_2, a_0, a_k, b_k)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{2N+1}$, $k = 2, \ldots, N$, $\|.\|$ — некоторую норму пространства $\mathbb{R}^{2N+1}$.

Вследствие эквивалентности норм в конечномерном пространстве определение 1 эквивалентно следующему.

Определение 2. Состояние равновесия $\overline{z} = (x_1, x_2, a_0, a_k, b_k)^{\mathrm{T}}$ уравнения (2) называется:

(1) устойчивым по уровням, если для любого $t_0 \geqslant 0$, $\alpha \in [0,1]$ и положительного ε существует число $\delta = \delta(t_0,\alpha,\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $\|z_0 - \overline{z}\| < \delta$ следует неравенство $\|z(t) - \overline{z}\| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0$;

(2) асимптотически устойчивым по уровням, если выполняются условия 1 определения и для каждых $t_0 \geqslant 0$ и $\alpha \in [0, 1]$ существует $\rho = \rho(t_0, \alpha) > 0$ такое, что из неравенства $\|z_0 - \overline{z}\| < \rho$ следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} \|z(t) - \overline{z}\| = 0$.

Аналогично вводятся другие типы устойчивости. Исследование устойчивости состояния равновесия $z(t) = \overline{z}$ системы (2) можно проводить различными методами, разработанными в теории устойчивости конечномерных систем (первый метод Ляпунова, прямой метод Ляпунова, метод линеаризации и др.). Здесь рассмотрим лишь применение прямого метода Ляпунова к исследованию асимптотической устойчивости состояния равновесия $z(t) = \overline{z}$ системы (2).

В качестве функции Ляпунова рассмотрим выражение

$$V(x_1, x_2, a_0, a_k, b_k) = \frac{1}{2}(p_{11}x_1^2 + 2p_{12}x_1x_2 + p_{22}x_2^2) + M^2 - F_0F_1, \qquad k = 2, \ldots, N,$$

где $p_{11} > 0$, $p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0$, а

$$M = \int\limits_0^{2\pi} (\overline{h}^{(N)}(\alpha, \phi) h^{(N)}(t, \alpha, \phi) - \overline{h}_\phi^{(N)}(\alpha, \phi) h_\phi^{(N)}(t, \alpha, \phi)) d\phi =$$

$$= \frac{a_0(\alpha)\overline{a}_0(\alpha)}{2} + \sum_{k=2}^{N} \lambda_k^2 (1 - k^2)(a_k(\alpha)\overline{a}_k(\alpha) + b_k(\alpha)\overline{b}_k(\alpha)),$$

$$F_0 = \int\limits_0^{2\pi} ((\overline{h}^{(N)}(\alpha, \phi))^2 - (\overline{h}_\phi^{(N)}(\alpha, \phi))^2 = \frac{\overline{a}_0^2(\alpha)}{2} + \sum_{k=2}^{N} \lambda_k^2 (1 - k^2)(\overline{a}_k^2(\alpha) + \overline{b}_k^2(\alpha)),$$

$$F_1 = \int\limits_0^{2\pi} ((h^{(N)}(t, \alpha, \phi))^2 - (h_\phi^{(N)}(t, \alpha, \phi))^2) d\phi = \frac{a_0^2(\alpha)}{2} + \sum_{k=2}^{N} \lambda_k^2 (1 - k^2)(a_k^2(\alpha) + b_k^2(\alpha)),$$

и $\lambda_k = 1 - \dfrac{k}{N+1}$.

Обозначим U_ω, $\omega > 0$, — малую окрестность состояния равновесия $z(t) = \overline{z}$, т. е.

$$U_\omega = \{z \colon \|z - \overline{z}\| < \omega\},$$

тогда, принимая во внимание условие Липшица для оператора $\mathcal{F}$ в уравнении (1), нетрудно показать, что существуют постоянные K_1, $K_2 > 0$ такие, что выполняются оценки

$$|F_1 - F_0| \leqslant K_1 \|z - \overline{z}\|,$$

$$\left| \frac{dF_1}{dt} \bigg|_{(2)} \right| \leqslant K_2 \|z - \overline{z}\|$$

при всех $z \in U_\omega$. Введем также обозначение

$$G(x_1, x_2, a_0, a_k, b_k) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} (p_{11}x_1 \cos\phi + p_{12}x_1 \sin\phi + p_{12}x_2 \cos\phi + p_{22}x_2 \sin\phi + \overline{a}_0 M -$$

$$- a_0F_0 + 2\sum_{k=2}^{N}\lambda_k^2(1-k^2)(M\overline{a}_k\cos k\phi + M\overline{b}_k\sin k\phi - a_kF_0\cos k\phi - b_kF_0\sin k\phi)\times$$

$$\times\,\mathcal{F}(t,\alpha,x_1^{(N)}(t,\alpha)\cos\phi + x_2^{(N)}(t,\alpha)\sin\phi + y^{(N)}(t,\alpha,\phi))\,d\phi.$$

Теорема 1. *Предположим, что система уравнений* (2) *такова, что в окрестности* U_ω *состояния равновесия* $z(t)=\overline{z}$ *выполняется неравенство*

$$G(z)\leqslant -\Delta(\alpha)\|z-\overline{z}\|^2,\quad \textit{при}\quad \textit{всех}\quad z\in U_\omega. \tag{4}$$

Тогда приближенное решение $h(t)=\overline{h}^{(N)}(\alpha,\phi)$ *нечеткого дифференциального уравнения* (1) *асимптотически устойчиво по уровням.*

Если $\Delta(\alpha)$ *в оценке* (4) *можно выбрать независимо от* α*, то имеет место асимптотическая устойчивость приближенного решения* $h(t)=\overline{h}^{(N)}(\alpha,\phi)$ *нечеткого дифференциального уравнения* (1).

Доказательство. Из классического изопериметрического неравенства Минковского [3] следует, что $M^2-F_0F_1\geqslant 0$, причем равенство достигается лишь в случае $a_0=\gamma\overline{a}_0$, $a_k=$ $=\gamma\overline{a}_k$, $b_k=\gamma\overline{b}_k$, $k=2,\ldots,N$, $\gamma\geqslant 0$. Таким образом, функция V является положительно полуопределенной и поэтому целесообразно ввести вспомогательную функцию

$$V_\eta = V+\eta(F_0-F_1)^2,\qquad \eta>0.$$

Очевидно, что V_η — положительно определенная функция и нетрудно показать, что

$$\left.\frac{dV_\eta}{dt}\right|_{(2)}\leqslant G+|F_1-F_0|\left|\frac{dF_1}{dt}\right|_{(2)}.$$

Пусть ε — положительное достаточно малое число такое, что в окрестности U_ε положения равновесия $z(t)=\overline{z}$ выполняется неравенство

$$\left.\frac{dV_\eta}{dt}\right|_{(2)}\leqslant -\Delta(\alpha)\|z-\overline{z}\|^2+\eta K_1K_2\|z-\overline{z}\|^2.$$

Выберем $\eta=\dfrac{\Delta(\alpha)}{2K_1K_2}$, тогда справедлива оценка

$$\left.\frac{dV_\eta}{dt}\right|_{(2)}\leqslant -\frac{\Delta(\alpha)}{2}\|z-\overline{z}\|^2. \tag{5}$$

Положим $l_\varepsilon=\inf V_\eta$ на множестве U_ε. Из непрерывности функции V_η в окрестности состояния равновесия $z(t)=\overline{z}$ следует, что существует число $\delta_1=\delta_1(\varepsilon,\alpha)>0$ такое, что

$$V_\eta(z)<l_\varepsilon\quad \text{при всех}\quad z\in U_{\delta_1}.$$

Предположим, что решение уравнения (2) с начальным условием $z_0\in U_{\delta_1}$ в некоторый момент времени $t=t_1>t_0$ достигает границы множества U_ε, тогда вследствие неравенства (5)

$$V_\eta(z(t_1))<l_\varepsilon,$$

что противоречит выбору l_ε.

Докажем притяжение состояния равновесия $z(t) = \overline{z}$ системы уравнений (2). Поскольку функция $v(t) = V_\eta(z(t))$ убывает, то существует предел $\beta = \lim\limits_{t\to\infty} v(t) \geqslant 0$. Предположим, что $\beta > 0$, тогда $v(t) \geqslant \beta$ и существует положительное число ρ такое, что $z \in U_\rho \bigcap U_\varepsilon$. Из неравенства (5) следует, что

$$\frac{dV_\eta}{dt} \leqslant -\frac{\Delta(\alpha)}{2}\rho^2$$

и вследствие формулы Ньютона–Лейбница

$$V_\eta(z(t)) \leqslant v(t_0) - \frac{\Delta(\alpha)}{2}\rho^2(t - t_0)$$

и при достаточно больших t функция V_η принимает отрицательные значения, что невозможно, поэтому $\beta = 0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = 0$. Из непрерывности функции V_η следует, что $z(t) \to \overline{z}$. Вторая часть утверждения теоремы доказывается аналогично. Теорема доказана.

1. *Слынько В. И.* О приближенных решениях нечетких дифференциальных уравнений в пространстве $\mathbb{E}^2$ // Доп. НАН України. – 2007. – № 9. – С. 12–17.
2. *Мартынюк А. А., Слынько В. И.* Об условиях ограниченности движений механических систем, описываемых нечеткими дифференциальными уравнениями // Прикл. механика. – 2005. – **41**, № 12. – С. 93–99.
3. *Lakshmikantham V., Ram Mohapatra.* Theory of fuzzy differential equations and inclusions. – Melbourne: Florida Institute of Technology, 2003. – 178 p. (Manuscript).

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 18.12.2006