7. *Трикоми Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1957. – 438 с.
8. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – Москва: Наука, 1966. – 672 с.
9. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. – Москва: Наука, 1973. – 296 с.

НТУ Украины "Киевский политехнический институт"
Самарский государственный экономический университет

Поступило в редакцию 16.02.2007

УДК 512.544

Л. А. Курдаченко, І. Я. Субботін, В. А. Чупордя

Про обмежено артінові фінітарні модулі

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. П. Моторним)

We consider a following special case of Artinian finitary modules. Let D be a Dedekind domain and G is a group. The DG-module A is said to be bounded Artinian finitary, if A is Artinian finitary, and there are the numbers $\mathbf{b}_F(A) = \mathbf{b}$, $\mathbf{b}_d(A) = \mathbf{d}$, $\mathbf{b}, \mathbf{d} \in N$ *and a finite subset* $\mathbf{b}_\sigma(A) = \tau \subseteq \mathbf{Spec}(D)$ *such that* $\mathbf{l}_F(A/C_A(g)) \leqslant \mathbf{b}$, $\mathbf{l}_d(A/C_A(g)) \leqslant \mathbf{d}$ *and* $\mathbf{Ass}_D(A/C_A(g)) \subseteq \tau$ *for every element* $g \in G$. *Here, we study the bounded Artinian finitary modules under some natural restriction.*

Нехай F — поле, G — група і A — FG-модуль. Будемо говорити, що A — фінітарний модуль, або що G — фінітарна лінійна група, якщо для кожного елемента $g \in G$ фактормодуль $A/C_A(g)$ має скінченну вимірність над F. Вивчення фінітарних лінійних груп було першим кроком на шляху розвитку теорії нескінченно вимірних лінійних груп. Зараз теорія фінітарних лінійних груп розвинута досить добре, накопичено багато цікавих результатів (див., напр., [1]). Цей істотний прогрес вказує на можливість розширення теорії фінітарних груп у різних напрямках. Беручи до уваги той факт, що артінові та нетерові модулі над кільцями є природними узагальненнями векторних просторів скінченної вимірності, Б. Верфріц [2] ввів до розгляду таке узагальнення фінітарних груп і фінітарних модулів, як скінченно фінітарні групи. Нехай R — кільце, G — група, A — RG-модуль. Група G називається скінченно фінітарною, якщо для кожного елемента $g \in G$ фактормодуль $A/C_A(g)$ є скінченним.

Важливим типом скінченно фінітарних модулів є мінімально нескінченні модулі, тобто модулі кожний власний фактормодуль яких є скінченним. Ці модулі, детально розглядалися в книзі [3, гл. 6–8].

У роботі [4] Б. Верфріц ввів артіново-фінітарні та нетерово-фінітарні групи. Група G називається артіново-фінітарною (відповідно, нетерово-фінітарною), якщо для кожного елемента $g \in G$ фактормодуль $A/C_A(g)$ є артіновим (відповідно, нетеровим) R-модулем. У своїх роботах [2, 4] Б. Верфріц розглядає перший природний випадок, коли $R = \mathbb{Z}$ — кільце цілих чисел.

З наведених означень випливає, що ми можемо розглядати фінітарні лінійні групи та скінченно фінітарні групи як лінійний аналог FC-груп. Аналогічно, ми можемо розглядати артіново-фінітарні (відповідно, нетерово-фінітарні) групи як лінійний аналог CC-груп (відповідно, PC-груп). Одним з перших важливих результатів теорії FC-груп була теорема Б. Неймана [5] про будову груп, у яких класи спряжених елементів скінченні і їх порядки обмежені деяким натуральним числом b. Нагадаємо, що група G називається BFC-групою, якщо існує число $b \in \mathbb{N}$, що $|G : C_G(g)| \leqslant b$, для кожного елемента g групи G. Б. Нейман довів, що комутант BFC-групи буде скінченною підгрупою. В роботі [6] було розглянуто лінійний аналог результата Б. Неймана. А саме, ця робота була присвячена обмеженим фінітарним лінійним групам. Групу G будемо називати обмежено фінітарною лінійною групою, якщо існує таке натуральне число b, що $\dim_F(A/C_A(g)) \leqslant b$, для кожного елемента $g \in G$. Відзначимо, що підмодуль $A(\omega FG)$ є аналогом комутанта (тут через ωFG позначається фундаментальний ідеал групового кільця FG). Неважко побудувати приклад такої елементарної абелевої обмежено фінітарної p-групи G над простим полем $F = \mathbf{F}_p$, щоб $\dim_F(A(\omega FG))$ була нескінченною [6]. Але за деяких природних обмежень на p-секції обмежено фінітарних груп у роботі [6] була доведена скінченність $\dim_F(A(\omega FG))$, тобто отримано лінійний аналог наведеної вище теореми Б. Неймана.

Метою даної роботи є розширення цих результатів на артіново-фінітарні модулі. Нехай A — артіновий $\mathbb{Z}$-модуль, інакше кажучи, A — абелева черніковська група. Тоді A має такі числові інваріанти. Якщо D — максимальна подільна підгрупа A (подільна частина A), тоді $D = K_1 \oplus \cdots \oplus K_d$, де K_j — квазіциклічна підгрупа, $1 \leqslant j \leqslant d$. Число $\mathbf{d} = \mathbf{l}_d(A)$ є інваріантом для A. Іншим важливим інваріантом є порядок $\mathbf{l}_F(A)$ факторгрупи A/D. Якщо G — група, то $\mathbb{Z}G$-модуль A будемо називати обмежено артіновим фінітарним, якщо A є артіново-фінітарним модулем і існують такі натуральні числа $\mathbf{b}_F(A) = \mathbf{b}$, $\mathbf{b}_d(A) = \mathbf{d}$ та така скінченна підмножина τ простих чисел, що $\mathbf{l}_F(A/C_A(g)) \leqslant \mathbf{b}$, $\mathbf{l}_d(A/C_A(g)) \leqslant \mathbf{d}$ і $\mathbf{\Pi}(A/C_A(g)) \subseteq \tau$.

Це визначення може бути поширено і на DG — модулі, де D — дедекіндова область. Нагадаємо деякі поняття, які будуть потрібними далі.

Нехай R — комутативне кільце, A — R-модуль. Нехай

$$\mathbf{t}_R(A) = \{a \in A \mid \mathbf{Ann}_R(a) \neq \langle 0 \rangle\}.$$

Якщо R — не має дільників нуля, то підмножина $\mathbf{t}_R(A)$ буде підмодулем A. Підмодуль $\mathbf{t}_R(A)$ називається R-періодичною частиною A, якщо $A = \mathbf{t}_R(A)$, то модуль A називається R-періодичним, якщо ж $\mathbf{t}_R(A) = \langle 0 \rangle$, то говоритимемо, що модуль A не має R-скруту.

Нехай D — дедекіндова область. Покладемо

$$\mathbf{Spec}(D) = \{P \mid P \text{ є максимальним ідеалом } D\}.$$

Якщо I є ідеалом D, тоді покладемо

$$A_I = \{a \in A \mid aI^n = \langle 0 \rangle, \text{для деякого натурального числа } n\}.$$

Неважко бачити, що A_I буде D-підмодулем A. Підмодуль A_I називається I-компонентою A. Якщо A збігається зі своєю I-компонентою, то говоритимемо, що A є I-модулем над кільцем D. Покладемо далі

$$\Omega_{I,n}(A) = \{a \in A \mid aI^n = \langle 0 \rangle\}.$$

Легко бачити, що $\Omega_{I,n}(A)$ є D-підмодулем і $\Omega_{I,n}(A) \leqslant \Omega_{I,n+1}(A)$, для кожного $n \in \mathbb{N}$, а також $\bigcup\limits_{n \in N} \Omega_{I,n}(A) = A_I$.

Покладемо $\mathbf{Ass}_D(A) = \{P \in \mathbf{Spec}(D) \mid A_D \neq \langle 0 \rangle\}$. Тоді $\mathbf{t}_D(A) = \bigoplus\limits_{P \in \pi} A_P$, де $\pi = \mathbf{Ass}_D(A)$ (див., напр., [7]). Якщо C — простий D-модуль, то $C \cong R/P$, для деякого $P \in \mathbf{Spec}(D)$. Позначимо D-ін'єктивну оболонку C через $\mathbf{C}_{P^\infty}$ і називатимемо цей модуль прюферовим P-модулем. Як і в теорії абелевих груп, можна показати, що

$$\mathbf{C}_{P^\infty} \cong \mathbf{liminj}\{D/P^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

За своєю будовою $\mathbf{C}_{P^\infty}$ є P-модулем, більше того, $\Omega_{P,k}(\mathbf{C}_{P^\infty}) \cong_D D/P^k$, та $\Omega_{P,k+1}(\mathbf{C}_{P^\infty})/\Omega_{P,k}(\mathbf{C}_{P^\infty}) \cong (D/P^{k+1})/(P/P^{k+1}) \cong D/P$, для всіх $k \in \mathbb{N}$. Отже, якщо B є власним D-підмодулем $\mathbf{C}_{P^\infty}$, то існує номер k, що $B = \Omega_{P,k}(\mathbf{C}_{P^\infty})$. Слід також відзначити, що прюферів P-модуль $\mathbf{C}_{P^\infty}$ є монолітичним і його D-моноліт збігається з $C = \Omega_{P,1}(\mathbf{C}_{P^\infty})$.

Якщо A є артіновим D-модулем, тоді A буде D-періодичним і $A = \bigoplus\limits_{P \in \pi} A_P$, де множина $\pi = \mathbf{Ass}_D(A)$ є скінченною. Крім того, $A_P = C_1 \bigoplus \cdots \bigoplus C_k \bigoplus E_1 \bigoplus \cdots \bigoplus E_d$, де C_j — циклічний P-підмодуль, $1 \leqslant j \leqslant k$, а E_j — прюферів P-підмодуль, $1 \leqslant j \leqslant d$ (див., напр., [8, теорема 5.7]). Більше того, цей розклад єдиний з точністю до ізоморфізму [9, теорема 1.7].

Нехай $0 \neq x \in D$. D-модуль A називається x-подільним, якщо $A = Ax$. Якщо A буде x-подільним для довільного ненульового елемента $x \in D$, то говоритимемо, що A є D-подільним.

Відзначимо, що прюферів P-модуль є D-подільним (див., напр., [8, лема 5.1]). Тому кожний артіновий D-модуль A розкладається в пряму суму максимального D-подільного підмодуля B (B називають D-подільною частиною A) і скінченно породженого D-періодичного підмодуля C. За наведеним вище $B = K_1 \bigoplus \cdots \bigoplus K_d$, де K_i — прюферів P-модуль, $1 \leqslant i \leqslant d$, і цей розклад буде єдиним з точністю до ізоморфізму. Зокрема, число $\mathbf{d}$ є інваріантом для модуля A. Покладемо $\mathbf{d} = \mathbf{l}_d(A)$. Фактормодуль A/B є D-періодичним і скінченно породженим, тому він має скінченний ряд підмодулів з D-простими факторами. З теореми Жордана–Гельдера випливає, що довжина цього ряду також буде інваріантом для A. Позначимо це число через $\mathbf{l}_F(A)$.

Нехай D — дедекіндова область і G — група. Модуль A над груповим кільцем DG називається обмежено артіновим фінітарним модулем, якщо A є артіново-фінітарним і існують такі натуральні числа $\mathbf{b}_F(A) = \mathbf{b}$, $\mathbf{b}_d(A) = \mathbf{d}$ і скінченна підмножина $\mathbf{b}_\sigma(A) = \tau \subseteq \mathbf{Spec}(D)$, що $\mathbf{l}_F(A/C_A(g)) \leqslant \mathbf{b}$, $\mathbf{l}_d(A/C_A(g)) \leqslant \mathbf{d}$ і $\mathbf{Ass}_D(A/C_A(g)) \subseteq \tau$, для кожного $g \in G$.

Нехай $\pi(A) = \{p \mid p = \mathrm{char}(D/P),\ \text{для всіх}\ P \in \tau\}$.

У роботі досліджуються обмежено артінові фінітарні модулі A над груповим кільцем DG, де D — дедекіндова область, а G — узагальнено розв'язна група з деякими обмеженнями на p-секції для всіх $p \in \pi(A)$.

Нагадаємо, що група G має скінченний спеціальний ранг $\mathbf{r}(G) = r$, якщо кожна її скінченно породжена підгрупа може бути породжена не більш ніж r елементами і r — найменше число, що має таку властивість. Це поняття було введено А. І. Мальцевим у роботі [10].

Нехай p — просте число. Будемо говорити, що група G має скінченний секційний p-ранг $\mathbf{r}_p(G) = r$, якщо кожна елементарна абелева p-секція групи G є скінченною та має порядок, що не перевищує p^r і при цьому існує така елементарна абелева p-секція K/L, що $|K/L| = p^r$.

Будемо говорити, що група G має скінченний секційний 0-ранг, $\mathbf{r}_0(G) = r_0$, якщо спеціальний ранг кожної абелевої секції без скруту не перевищує r_0 і існує така абелева секція

A/B, що $\mathbf{r}(A/B) = r_0$. Для розв'язних груп ці поняття були введені А. І. Мальцевим [11] і Д. Робінсоном [12, 6.1].

Основними результатами роботи є

Теорема 1. *Нехай D — дедекіндова область, G — локально розв'язна група і A — DG-модуль. Припустимо, що A — обмежено артіновий фінітарний модуль і $\mathbf{b}_F(A) = \mathbf{b}$, $\mathbf{b}_d(A) = \mathbf{d}$, $\mathbf{b}_\sigma(A) = \tau$ і $|\tau| = \mathbf{t}$. Нехай ще існує таке натуральне число $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_p(G) \leqslant \mathbf{r}$, для всіх $p \in \pi(A)$. Тоді:*

(a) підмодуль $A(\omega DG)$ буде артіновим, більше того, $\mathbf{l}_F(A(\omega DG)) \leqslant f_1(\mathbf{b}, \mathbf{d}, \mathbf{r})$, $\mathbf{l}_d(A(\omega DG)) \leqslant f_2(\mathbf{b}, \mathbf{d}, \mathbf{r})$ і $\mathbf{Ass}_D(A(\omega DG)) \subseteq \tau$ для деяких цілочислових функцій f_1, f_2;

(b) фактор-група $G/C_G(A)$ має скінченний спеціальний ранг, більше того, $\mathbf{r}(G/C_G(A)) \leqslant f_3(\mathbf{b}, \mathbf{d}, \mathbf{r})$ для деякої цілочислової функції f_3.

Група G називається узагальнено радикальною, якщо G має зростаючий ряд, кожний фактор якого є або локально нільпотентним, або локально скінченним.

Теорема 2. *Нехай D — дедекіндова область, G — локально узагальнено радикальна група і A — DG-модуль. Припустимо, що A — обмежено артіновий фінітарний модуль і $\mathbf{b}_F(A) = \mathbf{b}$, $\mathbf{b}_d(A) = \mathbf{d}$, $\mathbf{b}_\sigma(A) = \tau$ і $|\tau| = \mathbf{t}$. Нехай ще існує натуральне число $\mathbf{r}$ таке, що $\mathbf{r}_p(G) \leqslant \mathbf{r}$, для всіх $p \in \pi(A)$. Тоді:*

(a) підмодуль $A(\omega DG)$ буде артіновим, більше того, $\mathbf{l}_F(A(\omega DG)) \leqslant f_4(\mathbf{b}, \mathbf{d}, \mathbf{r})$, $\mathbf{l}_d(A(\omega DG)) \leqslant f_5(\mathbf{b}, \mathbf{d}, \mathbf{r})$ і $\mathbf{Ass}_D(A(\omega DG)) \subseteq \tau$ для деяких цілочислових функцій f_4, f_5;

(b) факторгрупа $G/C_G(A)$ має скінченний спеціальний ранг, більше того, $\mathbf{r}(G/C_G(A)) \leqslant \leqslant f_6(\mathbf{b}, \mathbf{d}, \mathbf{r})$ для деякої цілочислової функції f_6.

1. *Phillips R.* Finitary linear groups: a survey "Finite and locally finite groups" / NATO ASI ser. C 471. – Dordrecht: Kluwer, 1995. – P. 111–146.
2. *Wehrfritz B. A. F.* Finite – finitary groups of automorphisms // J. Algebra and Its Applications. – 2002. – **1**, No 4. – P. 375–389.
3. *Kurdachenko L. A., Otal J., Subbotin I. Ya.* Groups with prescribed quotient groups and associated module theory. – Singapore: World Scientific, 2002. – 227 p.
4. *Wehrfritz B. A. F.* Finitary and artinian – finitary groups over the integers Z // Ukrain. Math. J. – 2002. – **54**, No 6. – P. 753–763.
5. *Neumann B. H.* Groups covered by permutable subsets // J. London Math. Soc. – 1954. – **29**. – P. 236–248.
6. *Kirichenko V. V., Kurdachenko L. A., Polyakov N. V.* On certain finitary modules // Ukrain. Math. Congr., 2001; Third Intern. Algebraic Conf. in Ukraine "Algebraic structures and their applications": Proceedings. – Kiev, 2002. – P. 283–296.
7. *Matlis E.* Cotorsion modules. – Providence: Memoirs Amer. Math. Soc., 1964. – Vol. 49. – P. 66.
8. *Kurdachenko L. A., Otal J., Subbotin I. Ya.* Groups with prescribed quotient groups and associated module theory. – Singapore: World Scientific, 2002. – 227 p.
9. *Kurdachenko L. A., Otal J., Subbotin I. Ya.* Artinian modules over group rings. – Basel: Birkhauser, 2006. – 259 p.
10. *Maltsev A. I.* On the groups of finite rank // Mat. Sbornik. – 1948. – **22**, No 2. – P. 351–352.
11. *Maltsev A. I.* On certain classes of infinite soluble groups // Ibid. – 1951. – **28**, No 3. – P. 567–588.
12. *Robinson D. J. S.* Infinite soluble and nilpotent groups. – London: Queen Mary Colledge, Mathematics Notes, 1968. – 210 p.

Дніпропетровський національний університет

Надійшло до редакції 05.03.2007