УДК 519.2:622.011.43

Д-р техн. наук Усаченко Б.М.,
д-р техн. наук Скипочка С.И.,
канд. техн. наук Рубец Г.Т.,
Бобро Н.Т.
(ИГТМ НАН Украины)

ПРИМЕНЕНИЕ ЛОГИСТИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ ИЗМЕНЧИВОСТИ И МАСШТАБНОГО ФАКТОРА ПРОЧНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Показана можливість на основі логістичної функції розподілу міцності гірської породи для одного об’єму прогнозувати функцію розподілу для зразків іншого об’єму

APPLICATION OF LOGISTICAL DISTRIBUTION FOR ESTIMATION OF VARIABILITY AND THE SCALE FACTOR OF THE STRENGTH’S CHARACTERISTICS

Possibility in the basis of logistical function of distribution of rock's strength for one volume is shown to predict function of distribution for samples of other volume

Функция логистического распределения была выведены в 1845 г. Верхюлстом в связи с определением количества населения для данной страны в разные периоды времени [1]. Позже эта функция получила очень широкое распространение для статистического анализа, высоты, веса, численности растений и животных, а также описания различных процессов развития человеческих популяций, бактериальных колоний, железных дорог и т.п. Для этих целей ею иногда сильно злоупотребляли и делались даже попытки доказать всеобщность «закона логистического развития»[2].

В биологических испытаниях подопытные животные или бактерии подвергались воздействию доз некоторого яда или вещества. Для различных доз данного вещества наблюдается определенная вероятность реагирования (смертности или выживания). Кривую, отображающая зависимость вероятности смертности от дозы, называли кривой «доза-эффект» [3].

Другим важным источником возникновения логистического распределения является асимптотическая теория экстремальных значений [1]. Полусумма крайних значений $V = (x_1 + x_n)/2$, называемая еще «центром» или срединным значением распределения, при увеличении значений n сходится к логистическому распределению. Здесь x_1 и x_n - минимальное и максимальное значения выборки объема n, взятой из симметричного распределения экспоненциального типа. Поэтому в тех практических ситуациях, когда исследуемая случайная величина возникает, как средняя крайних значений выборки целесообразно использовать логистическую кривую вероятностей.

В работе [4] предлагается применить эту кривую для исследования усталостной прочности металлов. Авторы предполагают, что величина напряжения x, играющего роль дозы, связана с долей образцов $F(x)$ (эффект), выдержавших испытание при напряжении x логистической функцией

$$F(x) = \frac{1}{1 + \exp[-(x - \mu)\sigma]}, \tag{1}$$

где μ - параметр сдвига (расположения); σ - параметр масштаба.

Для плотности распределения $f(x) = F'(x)$ из (1) получим:

$$f(x) = \frac{\exp[-(x - \mu)/\sigma]}{\sigma\{1 + \exp[-(x - \mu)/\sigma]\}^2}. \tag{2}$$

Это распределение называют еще гиперболическим законом ошибок или законом $\mathrm{Sech}^2 x$ (квадрат гиперболического секанса), так как функцию распределения $F(x)$ и плотность можно переписать в виде:

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[1 + th\left(\frac{x - \mu}{2\sigma}\right)\right]; \; f(x) = \frac{1}{4\sigma}\operatorname{sec}h^2\left(\frac{x - \mu}{2\sigma}\right).$$

Форма распределения относительно параметра μ очень мало отличается от функции нормального распределения. При изменении x от $-\infty$ до $+\infty$ функция (1), так же как и нормальная, изменяется от 0 до 1. Учитывая этот факт и симметричность $f(x)$, предпочтительнее выражение (1) функции нормального распределения. Логистическое распределение обладает тем же аналитическим преимуществом, что плотность распределения $f(x)$ и переменная x выражаются через функцию распределения $F(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma}F(x)[1 - F(x)], \; x = \mu + \sigma \ln\left[\frac{F(x)}{1 - F(x)}\right]. \tag{3}$$

Четыре начальных момента для (2) запишутся как:

$$\upsilon_1 = \mu = x_{mod} = x_{med}; \; \upsilon_2 = \mu_2 + \frac{\pi^2}{3}\sigma^2; \; \upsilon_3 = \mu^3 + \pi^2\sigma^2\mu, \; \upsilon_4 = \mu^4 + 2\pi^2\sigma^2\mu^2 + \frac{2\pi^2}{15}\sigma^4. \tag{4}$$

При этом дисперсия равна $\mu_2 = \frac{\pi^2}{3}\sigma^2$, третий центральный момент - $\mu_3 = 0$, четвертый центральный момент - $\mu_4 = \frac{7\pi^4}{15}\sigma^4$. Нормированные коэффициенты асимметрии и эксцесса - $\sqrt{\beta_1} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = 0, \quad \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu^2{}_2} = 4{,}2$

Величина коэффициента эксцесса показывает, что плотность логистического распределения более островершинная, чем плотность нормального распределения. Логистическое распределение может быть использовано для аппроксимации нормированной функции нормального распределения

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt,$$

в виде:

$$F(t) = \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{3}} t\right)},$$

и, соответственно, для плотностей:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}, \; f(t) = \frac{\pi \cdot \exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{3}} t\right)}{\sqrt{3}\left[1 + \exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{3}} t\right)\right]}. \qquad 5)$$

Таблицы функции F (t) и f (t) для значений t = 0.00 (0.01) 1.00.(0.05) 3.00 приведены в работе [5]. В этой же работе даны таблицы квантилей t распределения F (t), т.е. корней решения уравнений.

$$p = \int_{-\infty}^{t} f(t)\, dt = F(t).$$

Величина t представляет собой такое значение, при котором функции распределения F (t) принимает значение p. Для t приведено соответствующее значение плотности вероятности f (t) . Квантили t_p затабулированы для различных p [5].

Оценку параметров распределения (2) можно проводить методом моментов, а выборочные характеристики среднего значения $\bar{x}$ и стандартного отклонения s

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} f_i \cdot x_i, \quad s = \left\{ \frac{1}{n} f \left(x_i - \bar{x} \right)^2 \right\}^{1/2}, \qquad (6)$$

где n - объем выборки; x_i - середины интервалов группирования; f_i - частоты попадания признака в каждый интервал; m - количество интервалов.

Если числовой материал не группируется в интервалы, то в формулах следует положить f_i = 1 и m = n . Для неизвестных параметров имеем: $\mu = \bar{x}, \quad \sigma = \frac{\sqrt{3}}{\pi} s$. Кроме этого, оценка параметров может быть осуществлена методом наименьших квадратов [2] с использованием значений переменных x_i и соответствующих им накопленных частот F_i как для группированного материала, так и негруппированного. Дело в том, что кривую (2) путем преобразований можно привести к линейной зависимости относительно неизвестных параметров μ и σ:

$$\ln\left(\frac{F}{1-F}\right)=\frac{1}{\sigma}x-\frac{\mu}{\sigma}. \tag{7}$$

Система нормальных уравнений для (7) будет:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m}\ln\left(\frac{Fi}{1-Fi}\right)-\left(\frac{1}{\sigma}x_i-\frac{\mu}{\sigma}\right)=0,\\
&\sum_{i=1}^{m}\left[\ln\left(\frac{Fi}{1-Fi}\right)-\left(\frac{1}{\sigma}x_i-\frac{\mu}{\sigma}\right)\right]x=0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Решив систему (8), для σ и μ получаем:

$$\sigma=\frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}x_i^2-\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}x_i\right)^2}{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}x_i\ln\left(\frac{Fi}{1-Fi}\right)-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}x_i\cdot\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\ln\left(\frac{Fi}{1-Fi}\right)}\quad;\mu=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}x_i-\frac{\sigma}{n}\sum_{i=1}^{m}\ln\left(\frac{Fi}{1-Fi}\right).$$

В настоящее время имеется много работ и подходов, которые ставят своей целью учесть влияния структурной неоднородности на процессы деформирования и разрушения горных пород с помощью вероятностно-статистических методов. Одним из важных вопросов в этом направлении является параметризация совокупностей механических характеристик, т.е. теоретические предположения о виде закона распределения рассматриваемых случайных величин и его связь с масштабным фактором [10].

Для прочностных свойств образцов одинакового объема, испытанных в однородных условиях в достаточно большом количестве, мы получаем статистическое распределение прочности данного материала или функцию вероятности разрушения материала при данном напряженном состоянии. В зависимости от материала, характера распределения ориентаций и размеров дефектов, характеристики прочности могут иметь различные вероятностные распределения: нормальное, логарифмически-нормальное, Вейбулла и др. [6].

Нами предпринята попытка на основе логистической функции распределения прочности горной породы для одного объема испытанных образцов приближенно прогнозировать функцию распределения или среднее значение и стандартное отклонение прочности для образцов другого объема, отличного от первого. Такой подход является оправданным с той точки зрения, что сейчас накоплено большое число массовых определений прочностных свойств для различных типов пород и эта информация, кроме своего обычного назначения, может быть использована также для оценки масштабного фактора на основе статистической теории экстремальных значений [7].

Этот подход основывается на таких положениях статистической теории масштабного фактора [8]:

а) функция вероятности разрушения для любого объема материала при данном напряженном состоянии представляет собой логистическую кривую;

б) считается, что образец состоит из некоторого числа «первичных» элементов, кривая распределения прочности которых известна и, которые соединены последовательным образом.

Образец считается разрушенным тогда, когда разрушается один, самый слабый элемент из всей совокупности. Наглядной интерпретацией такой идеализированной модели является цепь, состоящая из звеньев. Прочность такой цепи равна прочности ее наиболее слабого звена.

Со статистической точки зрения мы имеем здесь случай изучения распределения наименьшей порядковой статистики вариационного ряда при условии, что исходная совокупность имеет логистическое распределение. Такие вопросы изучает статистика экстремальных значений, важность применения которой значительно возрастает в задачах прочности и разрушения материалов [1].

Рассмотрим распределение наименьшей порядковой статистики для функции (1). Для нормированного распределения $F(t) = 1/(1+e^{-x})$ минимальное значение выборки объема n, имеет распределение:

$$\Phi(t) = 1 - \left(\frac{1}{1+e^{-t}}\right)^n, \quad t = (x-\mu)/\sigma \tag{9}$$

Среднее значение и стандартное отклонение распределения минимальных значений (9) будет:

$$\mu_t = \Psi(1) - \Psi(n), \quad \sigma_e = \sqrt{\psi^1(n)} + \psi^1(1), \tag{10}$$

где $\psi(n)$ - логарифмическая производная гамма-функции [9],

$$\begin{gathered} \psi(n) = -c + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k}, \quad \psi(1) = -c; \\ \psi^1(n) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}, \quad \psi^1(1) = \frac{\pi^2}{6}; \end{gathered} \tag{11}$$

где c – постоянная Эйлера, равная 0,577216.

Формулы (10) можно переписать по-другому:

$$\mu_t = -\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}, \quad \sigma_t = \left\{\frac{\pi^2}{3} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}\right\}^{1/2}. \tag{12}$$

Для исходной переменной x распределения (1) с учетом (12) получаем:

$$\mu_x = \mu + \sigma \cdot \mu_t \quad , \quad \sigma_x = \sigma_t \cdot \sigma. \tag{13}$$

Эти формулы применимы при небольших значениях n (n<50-100) и представляют собой точные результаты. Средние значения и стандартные отклонения стандартизованных переменных, выраженные в функции n = 1 (1) 50, представлены в табл. 1.

При больших n (n > 100-200) можно получить асимптотические результаты для μ_t и σ_t следующим образом. Из [9] для μ_t получаем:

$$\mu_t = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = -c - \ln(n-1) - \frac{1}{2(n-1)} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{Ak}{(n-1)n(n+1)\ldots(n+k-2)}, \tag{14}$$

где $Ak = \frac{1}{k} \int_0^1 x(1-x)(2-x)\ldots(k-1-x)dx$.

Таблица 1 – Средние значения и стандартные отклонения

n	μ_t	σ_t	n	μ_t	σ_t
1	0.0000	1.8138	26	-3.8160	1.2977
2	-1.0000	1.5132	27	-3.8544	1.2972
3	-1.5000	1.4282	28	-3.8915	1.2966
4	-1.8333	1.3888	29	-3.9272	1.2961
5	-2.0833	1.3661	30	-3.9616	1.2957
6	-2.2833	1.3514	31	-3.9950	1.2952
7	-2.4500	1.3411	32	-4.0272	1.2949
8	-2.5929	1.3334	33	-4.0585	1.2945
9	-2.7179	1.3276	34	-4.0888	1.2941
10	-2.8290	1.3229	35	-4.1182	1.2938
11	-2.9290	1.3191	36	-4.1468	1.2935
12	-3.0199	1.3159	37	-4.1746	1.2932
13	-3.1032	1.3133	38	-4.2016	1.2929
14	-3.1801	1.3111	39	-4.2279	1.2926
15	-3.2516	1.3091	40	-4.2535	1.2924
16	-3.3182	1.3074	41	-4.2785	1.2921
17	-3.3807	1.3059	42	-4.3029	1.2919
18	-3.4395	1.3046	43	-4.3267	1.2917
19	-3.4951	1.3034	44	-4.3500	1.2915
20	-3.5477	1.3024	45	-4.3727	1.2913
21	-3.5977	1.3014	46	-4.3949	1.2911
22	-3.6454	1.3006	47	-4.4166	1.2909
23	-3.6908	1.2998	48	-4.4380	1.2907
24	-3.7343	1.2990	49	-4.4588	1.2906
25	-3.7760	1.2984	50	-4.4792	1.2904

При $n \to \infty$, членами, содержащими n^2 в знаменателе (14) суммы, можно пренебречь, так как при этом допускается ошибка не больше $1/[12n(n-1)]$.

Подобным образом в выражении для σ_t сумму $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}$ можно заменить через $\pi^2/6$, совершая при этом ошибку не превосходящую $1/(n-1)^2$.

Окончательно, с учетом сделанных упрощений и приближений, для среднего и стандартного отклонения наименьшей порядковой статистики стандартизированной переменной $t = (x-\mu)/\sigma$ получаем:

$$\mu_t = -c - \ln(n-1) - \frac{1}{2(n-1)}, \quad \sigma_t \approx \frac{\pi}{\sqrt{6}}. \tag{15}$$

Для исходной случайной величины, учитывая (15), эти характеристики будут:

$$\mu_x = \mu - \sigma\left[c + \ln(n-1) + \frac{1}{2(n-1)}\right], \quad \sigma_x = \frac{\pi}{\sqrt{6}}\sigma. \tag{16}$$

Таким образом, в зависимости от величины n при логистическом распределении прочностных параметров для оценки среднего значения и стандартного отклонения прочности образцов, объемом в n раз большим, чем исходный, можно использовать формулы (13) с таблицами или асимптотические формулы (16).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гумбель Э. Статистика экстремальных значений/Э. Гумбель.- М.: Мир, 1965.- 258 с.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том 2 / В. Феллер. – М.: Мир, 1967.- 350 с.
3. Ван дер Варден. Математическая статистика / Ван дер Варден. - М.: ИЛ, 1960.- С. 31-37.
4. Soni A.H. Statistical analysis of fatigue limits using the logistic function / A.H. Soni, R.E. Little // Res and Stand. – 1964. - 4. № 9. – P.79-87.
5. Оуэн Д.Б. Сборник статистических таблиц/ Д.Б. Оуэн. - М.: Физматгиз, 1966.- 310 с.
6. Глушко В.Т. Статистический метод обработки данных о прочностных свойствах реальных горных пород / В.Т. Глушко, Г.Т. Рубец, Н.Т. Бобро // Сб. научных трудов НИГРИ. - Кривой Рог, 1971.- С. 15-21.
7. Рубец Г.Т. Статистический метод оценки масштабного фактора при нормальном распределении прочности горной породы / Г.Т. Рубец // Механика и разрушение горных пород: сб. науч. тр. ИГТМ АН УССР. – К.: Наукова думка, 1974. – Вып.2.- С. 8-14.
8. Ломакин В.Д. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел / В.Д. Ломакин. - М.: Наука, 1970. - 260 с.
9. Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Пыжик. - М.: Наука, 1971.- 210 с.
10. Писаренко Г.С. Статистичні теорії міцності та їх застосування до металокерамічних матеріалів / Г.С. Писаренко, В.Т. Трощенко. - К.: Вид-во АН УССР, 1961.- 390 с.