



УДК 621.318.3.001.2

© 2007

Член-корреспондент НАН України А. Е. Божко

О реакции колебательной системы на удар прямоугольной формы

A new solution of the problem concerning the determination of the reaction of an oscillatory system to the action of an impact in the form of a rectangular pulse is proposed.

В реальных условиях часто встречаются удары в виде прямоугольных импульсов, которые действуют на колебательные системы, например, объекты, стоящие на амортизаторах. При проектировании последних необходимо знать их реакцию на действие таких ударов. А это значит, что решение задачи по определению колебаний механической колебательной системы при действии прямоугольных ударных импульсов является актуальной.

В данной работе прямоугольный ударный импульс длительностью $(0 \div \tau)$ (см. рис. 1, а) представляется разностью двух скачкообразных функций $F \cdot 1(t)$ и $E \cdot 1(t - \tau)$, где $1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0 \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$ и $1(t - \tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq \tau \\ 0 & \text{при } t < \tau \end{cases}$; t — время, т. е.

$$F1(0, \tau) = F1(t) - F1(t - \tau). \quad (1)$$

В работах [1–3] единичная скачкообразная функция $1(t)$ описывается в виде особого разложения

$$1(t) = 1(1 - e^{-\alpha t}) + e^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t, \quad (2)$$

где α — коэффициент затухания; U_{ak} , ω_k — амплитуда и круговая частота k -й гармоники; $U_{ak} = U_{a1}/\omega_k$; $U_{a1} = 1/(\pi\omega_1)$; $\sum_{k=1}^n U_{ak} = 1$.

Применяя (2) к (1), получим описание прямоугольного ударного импульса в виде особых разложений

$$F(0, \tau) = F(1 - \ell^{-\alpha t}) + \ell^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t - F[1 - \ell^{-\alpha(t-\tau)}] - \\ - \ell^{-\alpha(t-\tau)} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k (t - \tau). \quad (3)$$

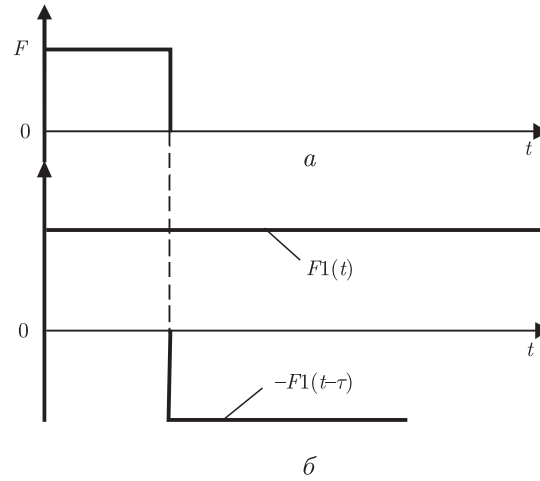


Рис. 1

Из выражения (3) видно, что в ударном прямоугольном импульсе на переднем и заднем фронтах имеется ряд затухающих с коэффициентом затухания α гармоник. Если $\alpha = \infty$, то (3) принимает вид (1), подразумевая при этом, что в первом слагаемом из (3) $F1(t)$, а в третьем вычитаемом члене $F1(t - \tau)$ без учета особого разложения (3).

Итак, в дальнейшем будем рассматривать прямоугольный ударный импульс, описываемый выражением (3). Рассмотрим действие такого удара на колебательную систему (КС) с одной степенью свободы и реакцию этой системы на этот удар. На рис. 2 показана механическая схема КС с указанием действия удара $F1(0, \tau)$. Здесь m — масса объекта, к которому приложен удар; c, b — элементы жесткости (упругости) и диссипации соответственно; x — колебания m . При расчетах под c и b примем коэффициенты жесткости и диссипации.

Дифференциальное уравнение движения такой КС имеет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = F(0, \tau),$$

или, с учетом (3),

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = F(1 - \ell^{-\alpha t}) + \ell^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t - F[1 - \ell^{-\alpha(t-\tau)}] - \ell^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k(t - \tau). \quad (4)$$

Для определения зависимости x от параметров m, b, c и $F(0, \tau)$ применим операционный метод, использующий изображения Карсона [4]. Изображение Карсона, соответствующее оригиналу (4), будет следующим:

$$x(p)(mp^2 + bp + c) = F\alpha \frac{1}{p + \alpha} + F\ell^{\alpha\tau} \frac{1}{p + \alpha} + \sum_{k=1}^n U_{ak} \frac{p(p + \alpha)}{(p + \alpha)^2 + \omega_k^2} - \ell^{-\alpha\tau} \sum_{k=1}^n U_{ak} (\cos_k \tau) \frac{p(p + \alpha)}{(p + \alpha)^2 + \omega_k^2} - \ell^{-\alpha\tau} \sum_{k=1}^n U_{ak} (\sin_k \tau) \frac{\omega_k p}{(p + \alpha)^2 + \omega_k^2}. \quad (5)$$

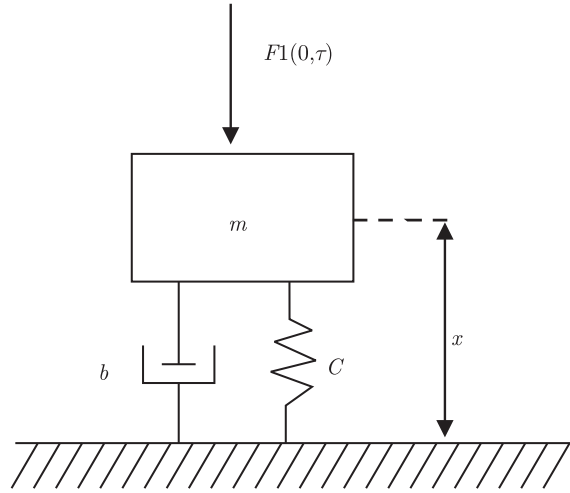


Рис. 2

В изображение $F(p) \rightleftharpoons F(0, \tau)$ введено тригонометрическое преобразование $\cos \omega_k(t - \tau) \cos \omega_k t \cos \omega_k \tau + \sin \omega_k t \sin \omega_k \tau$. На основании (5) изображение

$$\begin{aligned}
 x(p) = & \frac{F\alpha}{(p+\alpha)(mp^2+bp+c)} + \frac{F\ell^{\alpha\tau}p}{(p+\alpha)(mp^2+bp+c)} + \\
 & + \sum_{k=1}^n \frac{U_{ak}p(p+\alpha)}{[(p+\alpha)^2+\omega_k^2](mp^2+bp+c)} - \ell^{-\alpha\tau} \sum_{k=1}^n \frac{U_{ak}(\cos \omega_k \tau)p(p+\alpha)}{[(p+\alpha)^2+\omega_k^2](mp^2+bp+c)} - \\
 & - \ell^{-\alpha\tau} \sum_{k=1}^n \frac{U_{ak}(\sin \omega_k \tau)\omega_k p}{[(p+\alpha)^2+\omega_k^2](mp^2+bp+c)}. \tag{6}
 \end{aligned}$$

Соответственно (6) будем находить оригиналы для каждого слагаемого или вычитаемого члена, а затем общий оригинал будет равен сумме и разности членов, соответствующих этому изображению.

Обозначим $x(p) = x_1(p) + x_2(p) + x_3(p) - x_4(p) - x_5(p)$. Здесь составляющие члены соответствуют членам со своими знаками в (6). Предварительно каждый член $x_i(p)$, $i = \overline{1, 5}$, из $x(p)$ будем разбивать на простые дроби, находить коэффициенты в числителях простых дробей, а затем по таблицам [4] определять оригиналы каждой дроби.

Разбиение $x_i(p)$, $i = \overline{1, 5}$, следующее:

$$\begin{aligned}
 x_1(p) &= \frac{F\alpha}{(p+\alpha)(mp^2+bp+c)} = \frac{A_1}{p+\alpha} + \frac{B_1p+c_1}{mp^2+bp+c}, \\
 x_2(p) &= \frac{F\ell^{\alpha\tau}p}{(p+\alpha)(mp^2+bp+c)} = \frac{A_2}{p+\alpha} + \frac{B_2p+c_2}{mp^2+bp+c}.
 \end{aligned}$$

При определении $x_3(p)$, $x_4(p)$, $x_5(p)$ вначале разобьем на простые дроби k -е составляющие сумм $\left(\sum_{k=-1}^n \dots \right)$, т.е. x_{ik} , $k = \overline{1, n}$, $i = \overline{3, 5}$, затем определим оригиналы этих k -х

составляющих и далее оригиналы, соответствующие $x_i(p)$, $i = \overline{3, 5}$. Разбиение k -х составляющих $x_{ik}(p)$, $i = \overline{3, 5}$, $k = \overline{1, n}$, представляем в виде

$$\begin{aligned} x_{3k}(p) &= \frac{U_{ak}p(p+\alpha)}{[(p+\alpha)^2 + \omega_k^2](mp^2 + bp + c)} = \frac{A_3p + B_3}{(p+\alpha)^2 + \omega_k^2} + \frac{c_3p + D_3}{mp^2 + bp + c}, \\ x_{4k}(p) &= \frac{\ell^{-\alpha\tau}U_{ak}(\cos \omega_k\tau)p(p+\alpha)}{[(p+\alpha)^2 + \omega_k^2](mp^2 + bp + c)} = \frac{A_4p + B_4}{(p+\alpha)^2 + \omega_k^2} + \frac{c_4p + D_4}{mp^2 + bp + c}, \\ x_{5k}(p) &= \frac{\ell^{-\alpha\tau}U_{ak}(\sin \omega_k\tau)\omega_k p}{[(p+\alpha)^2 + \omega_k^2](mp^2 + bp + c)} = \frac{A_5p + B_5}{(p+\alpha)^2 + \omega_k^2} + \frac{c_5p + D_5}{mp^2 + bp + c}. \end{aligned}$$

Определение коэффициентов A_i , B_i , C_i , $i = \overline{1, 5}$, и D_i , $i = \overline{3, 5}$, является простым, но громоздким. Для краткости приведем сразу результаты вычисления этих коэффициентов

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{F\alpha}{m\alpha^2 - b\alpha + c}; & B_1 &= \frac{Fm\alpha}{m\alpha^2 - b\alpha + c}; & C_1 &= F\alpha \frac{m\alpha - b}{m\alpha^2 - b\alpha + c}; \\ A_2 &= \frac{\alpha F \ell^{-\alpha\tau}}{b\alpha - m\alpha^2 - c}; & B_2 &= \frac{m\alpha F \ell^{-\alpha\tau}}{m\alpha^2 - b\alpha + c}; & C_2 &= F\alpha \frac{cF \ell^{-\alpha\tau}}{m\alpha^2 - b\alpha + c}; \\ A_3 &= \frac{1}{b - 2m\alpha} \left\{ U_{ak} + \frac{D_3}{c} [m(\alpha^2 + \omega_k^2)] \right\}; & B_3 &= -\frac{D_3(\alpha^2 + \omega_k^2)}{c}; & C_3 &= -A_3m; \\ D_3 &= \frac{U_{ak}c[b\alpha - c - (\alpha^2 - \omega_k^2)m]}{(\alpha^2 + \omega_k^2)[cm + m - b(b - 2m\alpha) - m^2(\alpha^2 + \omega_k^2)]}; \\ A_4 &= \frac{1}{b - 2m\alpha} \left\{ \ell^{-\alpha\tau}U_{ak} \cos_k \tau + \frac{D_4}{c} [m(\alpha^2 + \omega_k^2) - c] \right\}; \\ B_4 &= -\frac{D_4(\alpha^2 + \omega_k^2)}{c}; & C_4 &= A_4m; \\ D_4 &= \frac{c\ell^{-\alpha\tau}U_{ak}(\cos \omega_k\tau)[b\alpha - c - (\alpha^2 - \omega_k^2)m]}{(\alpha^2 + \omega_k^2)[cm + m - b(b - 2\alpha m) - m^2(\alpha^2 + \omega_k^2)]}; \\ A_5 &= \frac{D_5}{cc(b - 2m\alpha)} [m(\alpha^2 + \omega_k^2) - c]; & B_5 &= -D_5 \frac{\alpha^2 + \omega_k^2}{c}; & C_5 &= mA_5; \\ D_5 &= (\ell^{-\alpha\tau}U_{ak}\omega_k \sin \omega_k\tau) \left\{ [m(\alpha^2 + \omega_k^2) - c] - \frac{b}{c}(\alpha^2 + \omega_k^2)(b - 2m\alpha) - \right. \\ &\quad \left. - [m(\alpha^2 + \omega_k^2) - c][1 - m(\alpha^2 + \omega_k^2)] + (b - 2m\alpha) \left[2\alpha - \frac{b}{c}(\alpha^2 + \omega_k^2) \right] \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

Далее найдем оригиналы, соответствующие изображениям $x_1(p)$, $x_2(p)$, $x_3(p) = \sum_{k=1}^n x_{3k}(p)$, $x_4(p) = \sum_{k=1}^n x_{4k}(p)$, $x_5(p) = \sum_{k=1}^n x_{5k}(p)$, применяя простые дроби с найденными коэффициентами A_i , B_i , C_i , D_i , $i = \overline{1, 5}$.

В соответствии с таблицами [4] искомые оригиналы будут такими:

$$x_1(t) + x_2(t) = (A_1 + A_2) \frac{1}{\alpha} (1 - \ell^{-\alpha t}) + (B_1 + B_2) \frac{1}{m\omega_0} \ell^{-b/(2m)t} \sin \omega_0 t + \frac{C(C_1 + C_2)}{m} \left[1 - \ell^{-b/(2m)t} \left(\cos \omega_0 t + \frac{b}{2m\omega_0} \sin \omega_0 t \right) \right], \quad (7)$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$ – собственная частота колебательной системы,

$$x_3(t) - x_4(t) - x_5(t) = \sum_{k=1}^n \left\{ (\omega_k \ell^{-\alpha t} \sin \omega_k t) (A_3 - A_4 - A_5) + (B_3 - B_4 - B_5) \frac{1}{\alpha^2 + \omega_k^2} \left[1 - \ell^{-\alpha t} \left(\cos \omega_k t + \frac{\alpha}{\omega_k} \sin \omega_k t \right) \right] + (C_3 - C_4 - C_5) \frac{1}{m\omega_0} \ell^{-b/(2m)t} \sin \omega_0 t + (D_3 - D_4 - D_5) \frac{1}{m} \left[1 - \ell^{-b/(2m)t} \left(\cos \omega_0 t + \frac{b}{2m\omega_0} \sin \omega_0 t \right) \right] \right\}. \quad (8)$$

Общий оригинал

$$x(t) = \frac{1}{\alpha} (A_1 + A_2) (1 - \ell^{-\alpha t}) + \frac{B_1 + B_2}{m\omega_0} \ell^{-b/(2m)t} \sin \omega_0 t + \frac{c}{m} (C_1 + C_2) \left[1 - \ell^{-b/(2m)t} \left(\cos \omega_0 t + \frac{b}{2m\omega_0} \sin \omega_0 t \right) \right] + \sum_{k=1}^n \left\{ (\omega_k \ell^{-\alpha t} \sin \omega_k t) (A_3 - A_4 - A_5) + (B_3 - B_4 - B_5) \frac{1}{\alpha^2 + \omega_k^2} \left[1 - \ell^{-\alpha t} \left(\cos \omega_k t + \frac{\alpha}{\omega_k} \sin \omega_k t \right) \right] + (C_3 - C_4 - C_5) \frac{1}{m\omega_0} \ell^{-b/(2m)t} \sin \omega_0 t + (D_3 - D_4 - D_5) \frac{1}{m} \left[1 - \ell^{-b/(2m)t} \left(\cos \omega_0 t + \frac{b}{2m\omega_0} \sin \omega_0 t \right) \right] \right\}. \quad (9)$$

Полное выражение оригинала $x(t)$ будет при подстановке в (9) значений коэффициентов $A_i, B_i, C_i, i = \overline{1, 5}, D_i, i = \overline{3, 5}$. Как видим из (9) при условии подстановки в него указанных коэффициентов, выражение реакции $x(t)$ колебательной системы на действие удара в виде прямоугольного импульса сложное. Однако это выражение более точно приближается к описанию реального процесса в КС при рассматриваемой форме удара. Проверка (9) показала, что до удара ($t = 0$) $x(t) = 0$, после удара возникают послеударные затухающие с собственной частотой ω_0 колебания и при $t = \infty$ $x(\infty) = 0$, что отражает правильность данного решения. Выражение (9) в научной литературе представлено впервые.

1. Божко А. Е. Новая интерпретация переходных процессов в электрических цепях // Доп. НАН України. – 2004. – № 9. – С. 83–87.
2. Божко А. Е. О новой трактовке переходных процессов в электрических цепях переменного тока // Там само. – 2005. – № 4. – С. 81–86.
3. Божко А. Е. Аргументация новой концепции о переходных процессах в электроцепях с позиций волновой механики // Там само. – 2006. – № 3. – С. 83–88.
4. Гинзбург С. Г. Методы решения задач по переходным процессам в электрических цепях. – Москва: Сов. радио, 1959. – 404 с.

Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 24.11.2006

УДК 534.3

© 2007

А. О. Борисюк

Про використання моделей пульсацій тиску на плоскій стінці для опису пульсацій тиску на поверхнях циліндричних конструкцій

(Представлено академіком НАН України В. Т. Грінченком)

Conditions are searched, under which the available models of pressure fluctuations on a flat wall (i. e., the models of Crocos, Chase, F. Williams, and Smol'yakov and Tkachenko) can be used to describe the pressure fluctuation field which arises on the surfaces of cylindrical structures under their interaction with fully developed turbulent flows of incompressible fluids. For this purpose, the appropriate method and experimental equipment are developed. As a result, it is found that, in case of the axial symmetry of a flow, the acceptable-for-practice results of calculations of the vibration and/or acoustic fields of cylindrical structures can be obtained in the frames of the Chase model. This allows one to recommend the use of the model for description of the pressure field noted above. In case of a non-axisymmetric flow, the application of all the models of pressure fluctuations on a flat wall is unreasonable.

Дослідження коливальних і акустичних полів, які виникають при взаємодії циліндричних конструкцій з розвиненими турбулентними течіями нестисливих рідин, становить значний інтерес у машинобудуванні, нафтогазовій промисловості тощо. Вирішення такого роду проблем потребує наявності достовірної інформації про сили збудження конструкцій — пульсації тиску p_t на їх поверхнях. Вона може бути одержана з відповідної задачі динаміки рідини або з відповідного експерименту. Проте, з огляду на можливість значного спрощення розв'язку, бажанішим є використання існуючих моделей тиску p_t [1–3].

Як показує, однак, аналіз наукової літератури, поки немає прийнятних для потреб практики моделей тиску p_t для тіл циліндричної геометрії [1, 3]. За цих умов вчені змушені використовувати відповідні моделі поля p_t , обгрунтовані дослідями на плоскій пластині. Проте при цьому або взагалі не аргументуються такі дії й оминається питання вірогідності одержаних у такий спосіб результатів, або ж це робиться непереконливо. Таким чином, природно, виникає потреба: 1) з'ясування умов, за яких моделі тиску p_t на плоскій стінці можна