УДК 536.24

Академик НАН Украины **И. В. Сергиенко,** академик НАН Украины
В. С. Дейнека

Решение граничных обратных задач многокомпонентных эллиптических распределенных систем

The technology of development of computational algorithms used to solve inverse boundary problems for multicomponent elliptic distributed systems with main and natural heterogeneous conjugation conditions is presented. Explicit formulas of the Frechet derivatives for gradient computational algorithms are obtained.

В работе [1] предложена технология использования прямых и соответствующих сопряженных задач в слабых постановках теории оптимального управления [2, 3] для реализации градиентных методов [4] минимизации функционалов-невязки в граничных обратных задачах теплопроводности многокомпонентных тел. Эта технология достаточно универсальна и легко распространяется на обратные задачи других классов распределенных систем.

В данной работе представлена технология построения вычислительных алгоритмов решения обратных граничных задач многокомпонентных эллиптических распределенных систем с главными и естественными неоднородными условиями сопряжения. Получены явные выражения производных Фреше для построения градиентных вычислительных алгоритмов.

1. Смешанная краевая задача. Рассмотрим задачу восстановления плотностей потоков на части Γ_2 границы $\Gamma = \partial\Omega$ связной ограниченной строго липшицевой области $\Omega \in R^n$, математическая задача которой состоит в следующем.

Пусть на области Ω определено эллиптическое уравнение

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j}\right) + \widetilde{f}, \tag{1}$$

где $k_{ij} = k_{ji}(x) \in C(\overline{\Omega})\bigcap C^1(\Omega),\ f \in C(\Omega),\ |f| < \infty$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} k_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \alpha_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \qquad \forall \xi_i, \xi_j \in R^1, \qquad \alpha_0 = \mathrm{const} > 0. \tag{1$'$}$$

На части Γ_1 границы Γ ($\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2, \Gamma_1 \bigcap \Gamma_2 = \varnothing$) задано неоднородное условие Дирихле

$$y = \varphi, \tag{2}$$

а на части Γ_2 — условие Неймана

$$\sum_{i,j=1}^{n} k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j}\cos(\nu, x_i) = u, \tag{3}$$

где ν — внешняя нормаль к части Γ_2 границы Γ.

Предполагаем, что на N $(n-1)$-мерных областях γ_j, разбивающих область Ω на $N+1$ связных строго липшицевых областей Ω_j $\left(\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{N+1} \Omega_j \bigcup\limits_{i=1}^{N} \gamma_i\right)$, известны следы решения $y = y(x)$ краевой задачи (1)–(3):

$$y|_{\gamma_i} = f_i, \qquad i = \overline{1, N}. \tag{4}$$

Требуется найти неизвестную функцию $u \in L_2(\Gamma_2)$, при которой решение $y = y(u) = y(u; x)$ краевой задачи (1)–(3) удовлетворяет равенствам (4).

Решение $u(x)$ задачи (1)–(4) будем искать приближенно, следуя [4], минимизируя функционал-невязку

$$J(u) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \|A_i u - f_i\|^2_{L_2(\gamma_i)} \tag{5}$$

на гильбертовом пространстве $U = L_2(\Gamma_2)$, в предположении выполнения равенств (1)–(3), где ρ_i — весовые коэффициенты. Предположим

$$Au = \{A_i u\}_{i=1}^{N}, \qquad A_i u = y(u; x)|_{\gamma_i}, \qquad i = \overline{1, N}.$$

Итерационная последовательность для нахождения приближения u_{n+1} решения u задачи (1)–(3), (5) имеет вид

$$u_{n+1} = u_n - \beta_n p_n, \qquad n = 0, 1, \ldots, n^*, \tag{6}$$

и начинается с некоторого начального приближения u_0, где направление спуска p_n и коэффициент β_n определяются выражениями [4]:

для метода минимальных ошибок

$$p_n = J'_{u_n}, \qquad \beta_n = \frac{\|e_n\|^2}{\|J'_{u_n}\|^2}, \tag{7}$$

для метода скорейшего спуска

$$p_n = J'_{u_n}, \qquad \beta_n = \frac{\|J'_{u_n}\|^2}{\|AJ'_{u_n}\|^2}, \tag{8}$$

для метода сопряженных градиентов

$$\begin{aligned} &p_n = J'_{u_n} + \gamma_n p_{n-1}, \qquad \gamma_0 = 0, \\ &\gamma_n = \frac{\|J'_{u_n}\|^2}{\|J'_{u_{n-1}}\|^2}, \qquad \beta_n = \frac{(J'_{u_n}, p_n)}{\|Ap_n\|^2}, \end{aligned} \tag{9}$$

где $e_n = Au_n - f$.

Следуя [2, 3, 5], можно записать

$$\langle J'_u, v - u\rangle = (\overline{y}(u) - f, \overline{y}(v) - \overline{y}(u))_{L_2(\overline{\gamma})}, \tag{10}$$

где $\overline{y}(v) = \{\overline{y}_i(v)\}_{i=1}^N$, $\overline{y}_i(v) = y(v)|_{\gamma_i}$, $i = \overline{1,N}$, $(\varphi,\psi)_{L_2(\overline{\gamma})} = \sum\limits_{i=1}^N \rho_i(\varphi,\psi)_{L_2(\gamma_i)}$, $(\varphi,\psi)_{L_2(\gamma_i)} = \int\limits_{\gamma_i} \varphi\psi\, d\gamma_i$, $y(v)$ — обобщенное решение краевой задачи (1)–(3) при $u = v$.

Определение 1. При каждом фиксированном $u \in U$ обобщенным решением краевой задачи (1)–(3) называется функция $y = y(u) = y(u;x) \in H$, которая $\forall w(x) \in H_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(y,w) = l(u;w), \tag{11}$$

где

$$H_0 = \{v(x) \in W_2^1(\Omega)\colon v|_{\Gamma_1} = 0\}, \qquad H = \{v(x) \in W_2^1(\Omega)\colon v|_{\Gamma_1} = \varphi\},$$

$$a(y,w) = \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n k_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_i}\, dx, \qquad l(u;w) = (\widetilde{f}, w) + (u,w)_{L_2(\Gamma_2)}.$$

Для каждого приближения $u_n = u_n(x)$ решения $u(x)$ задачи (1)–(3), (5) введем в рассмотрение следующую сопряженную краевую задачу:

$$\begin{aligned}
&-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right) = 0, \qquad x \in \Omega \setminus \gamma_d,\\
&\psi|_{\Gamma_1} = 0,\\
&\sum_{i,j=1}^n k_{ij}\frac{\partial \psi}{\partial x_j}\cos(\nu, x_i) = 0, \qquad x \in \Gamma_2,\\
&[\psi] = 0, \qquad [q_\psi] = -\rho_i(y_i(u_n;x) - f_i(x)), \qquad x \in \gamma_i, \qquad i = \overline{1,N},
\end{aligned} \tag{12}$$

где $[\varphi]|_{\gamma_i} = \varphi^+ - \varphi^-$, $\varphi^+ = \{\varphi\}^+ = \varphi(x)$ при $x \in \partial\Omega_{i+1} \bigcap \gamma_i$, $\varphi^- = \{\varphi\}^- = \varphi(x)$ при $x \in \partial\Omega_i \bigcap \gamma_i$, ν — нормаль к γ_i, направленная в область Ω_{i+1}, $\gamma_d = \bigcup\limits_{i=1}^N \gamma_i$.

Определение 2. При каждом фиксированном $u_n = u_n(x)$ обобщенным решением краевой задачи (12) называется функция $\psi(x) \in \widetilde{H}_0 = \{v(x)\colon v|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i),\ i = \overline{1, N+1},\ [v]|_{\gamma_i} = 0,\ i = \overline{1,N},\ v|_{\Gamma_1} = 0\}$, которая $\forall w(x) \in \widetilde{H}_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(\psi, w) = l_\psi(y_n; w), \tag{13}$$

где

$$l_\psi(y_n; w) = \sum_{i=1}^N \rho_i(y_i(u_n;\cdot) - f_i(\cdot), w)_{L_2(\gamma_i)}. \tag{14}$$

Выбирая в тождестве (13) вместо функции w разность $y_{n+1} - y_n$, с учетом (11), получаем

$$\sum_{i=1}^N \rho_i(y_i(u_n) - f_i, y_i(u_{n+1}) - y_i(u_n))_{L_2(\gamma_i)} = (\psi, \Delta u_n)_{L_2(\Gamma_2)}.$$

Следовательно,

$$J'_{u_n} = \widetilde{\psi}_n = \psi, \qquad x \in \Gamma_2. \tag{15}$$

Таким образом, для реализации метода минимальных ошибок (6), (7) (для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения u задачи (1)–(3), (5)) направление спуска p_n и коэффициент β_n можем определить с помощью выражений (7).

Решив задачу нахождения функции $z \in H$, которая $\forall\, w \in H_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(z, w) = l(\widetilde{\psi}_n; w), \tag{16}$$

определим вектор

$$AJ'_{u_n} = \{z_i(\widetilde{\psi}_n)\}_{i=1}^N, \tag{17}$$

где $z_i(\widetilde{\psi}_n) = z(\widetilde{\psi}_n; x)|_{\gamma_i}$, $i = \overline{1, N}$.

С учетом (17), для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения u задачи (1)–(3), (5) можем использовать метод скорейшего спуска (8). Поскольку мы получили J'_{u_n}, p_{n-1}, $J'_{u_{n-1}}$, то можем вычислить направление спуска p_n с помощью (9).

Подставляя в функционал $l(\widetilde{\psi}_n; w)$ тождества (16), вместо функции $\widetilde{\psi}_n$ функцию p_n, в качестве решения задачи (16) с функционалом $l(p_n; w)$ получим функцию $z(p_n)$, т.е. получим вектор

$$Ap_n = \{z_i(p_n)\}_{i=1}^N. \tag{18}$$

Учитывая (18), можем использовать метод сопряженных градиентов (6), (9) для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u(x)$ задачи (1)–(3), (5).

2. Задача с условиями сопряжения тонкого составного включения. Пусть на области $\Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2 (\Omega_1 \bigcap \Omega_2 = \varnothing,\ \partial\Omega_1 \bigcap \partial\Omega_2 = \gamma \neq \varnothing,\ \Omega_1, \Omega_2 \in R^n;\ \Omega_1, \Omega_2$ — ограниченные связные строго липшицевы области) определено эллиптическое уравнение

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}(x)\frac{\partial y}{\partial x_j}\right) = \widetilde{f}, \tag{19}$$

где $k_{ij}|_{\overline{\Omega}_l} = k_{ji}|_{\overline{\Omega}_l} \in C(\overline{\Omega}_l) \bigcap C^1(\Omega_l)$, $\sum\limits_{i,j=1}^{n} k_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \alpha_0 \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2$, $\forall \xi_i,\ \xi_j \in R^1$, $\forall x \in \Omega_l$, $i, j = \overline{1, n}$; $\widetilde{f}|_{\Omega_l} \in C(\Omega_l)$, $l = 1, 2$; $|\widetilde{f}| < \infty$.

На границе $\Gamma = \bigcup\limits_{l=1}^{3} \Gamma_l (\Gamma = (\partial\Omega_1 \bigcup \partial\Omega_2) \setminus \gamma)$ заданы смешанные краевые условия

$$y|_{\Gamma_1} = \varphi, \tag{20}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j}\cos(\nu, x_i) = u_1, \qquad x \in \Gamma_2, \tag{21}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_j}\cos(\nu, x_i) = -\alpha y + u_2, \qquad x \in \Gamma_3, \tag{22}$$

где $\alpha = \text{const} > 0$.

На составном тонком включении γ условия сопряжения имеют вид

$$R_1 q_y^- + R_2 q_y^+ = [y] + \delta, \tag{23}$$

$$[q_y] = \omega, \tag{24}$$

где δ, $\omega \in L_2(\gamma)$ — известные функции, $q_y = \sum\limits_{i,j=1}^{n} k_{ij} \dfrac{\partial y}{\partial x_j} \cos(\nu, x_i)$, ν — нормаль к γ, направленная в область Ω_2.

Также предполагаем, что область Ω разбита поверхностями γ_i на области Ω_i, Ω_{i+1}, $i = \overline{1, N}$. Области $\Omega_i \in R^n$ — ограниченные связные строго липшицевы. На поверхностях γ_i известно решение краевой задачи (19)–(24):

$$y|_{\gamma_i} = f_i, \qquad x \in \gamma_i, \qquad i = \overline{1, N}. \tag{25}$$

Тем самым мы получили задачу: найти функцию $u = (u_1, u_2)^{\mathrm{T}} \in U = L_2(\Gamma_2) \times L_2(\Gamma_3)$, при которой решение $y = y(u) = y(u; x)$ краевой задачи (19)–(24) удовлетворяет равенствам (25).

Как и в предыдущем разделе, решение u будем искать приближенно, следуя [4], минимизируя функционал-невязку (5) с ограничениями (19)–(24).

Определение 3. При каждом фиксированном $u \in U$ обобщенным решением краевой задачи (19)–(24) называется функция $y(u; x) \in H$, которая $\forall w(x) \in H_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(y, w) = l(u; w), \tag{26}$$

где $H_0 = \{v(x)\colon v|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i),\ i = 1, 2;\ v|_{\Gamma_1} = 0\}$, $H = \{v(x)\colon v|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i),\ i = 1, 2;\ v|_{\Gamma_1} = \varphi\}$, $a(y, w) = \int\limits_{\Omega} \sum\limits_{i,j=1}^{n} k_{ij} \dfrac{\partial y}{\partial x_j} \dfrac{\partial w}{\partial x_i} dx + \int\limits_{\gamma} \dfrac{[y][w]}{R_1 + R_2} d\gamma + \int\limits_{\Gamma_3} \alpha y w \, d\Gamma_3$, $l(u; w) = (\widetilde{f}, w) + \int\limits_{\gamma} \dfrac{R_2 \omega - \delta}{R_1 + R_2} [w] d\gamma - \int\limits_{\gamma} \omega w^+ d\gamma + (u_1, w)_{L_2(\Gamma_2)} + (u_2, w)_{L_2(\Gamma_3)}$.

Для каждого приближения u_n решения $u \in U$ задачи (19)–(24), (5) введем в рассмотрение следующую сопряженную задачу:

$$\begin{gathered}
-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right) = 0, \qquad x \in \Omega \setminus \overline{\gamma}_d, \\
\psi|_{\Gamma_1} = 0, \\
\sum_{i,j=1}^{n} k_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \cos(\nu, x_i) = 0, \qquad x \in \Gamma_2, \\
\sum_{i,j=1}^{n} k_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \cos(\nu, x_i) = -\alpha \psi, \qquad x \in \Gamma_3, \\
[\psi] = 0, \qquad [q_\psi] = -\rho_i (y_i(u_n; x) - f_i(x)), \qquad x \in \gamma_i, \qquad i = \overline{1, N}, \\
[q_\psi] = 0, \qquad \{q_\psi\}^{\pm} = \frac{[\psi]}{R_1 + R_2}, \qquad x \in \gamma,
\end{gathered} \tag{27}$$

где $\gamma_d = \bigcup\limits_{i=1}^{N} \gamma_i$.

Определение 4. При каждом фиксированном u_n обобщенным решением краевой задачи (27) называется функция $\psi(x) \in H_0$, которая $\forall w \in H_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(\psi, w) = l_\psi(y_n; w), \tag{28}$$

где функционал $l_\psi(y_n; w)$ определен выражением (14).

На основании (28), (26) получаем

$$\sum_{i=1}^{N} \rho_i(y_i(u_n) - f_i, y_i(u_{n+1}) - y_i(u_n))_{L_2(\gamma_i)} = (\widetilde{\psi}, \Delta u_n)_{L_2(\Gamma_2)\times L_2(\Gamma_3)}. \tag{29}$$

Следовательно,

$$J'_{u_n} = \widetilde{\psi} = \widetilde{\psi}_n, \tag{30}$$

где $\widetilde{\psi}_n = (\psi(u_n)|_{\Gamma_2},\ \psi(u_n)|_{\Gamma_3})^{\mathrm{T}}$.

Таким образом, для реализации метода минимальных ошибок (7) (для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения u задачи (19)–(24), (5)) направление спуска p_n и коэффициент β_n можем определить с помощью выражений (7).

Решив задачу нахождения функции $z \in H$, которая $\forall w \in H_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(z, w) = l(\widetilde{\psi}_n; w), \tag{31}$$

определим вектор

$$AJ'_{u_n} = \{z_i(\widetilde{\psi}_n)\}_{i=1}^{N}, \tag{32}$$

где $z_i(\widetilde{\psi}_n) = z(\widetilde{\psi}_n; x)|_{\gamma_i}$, $i = \overline{1, N}$.

С учетом (32) для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения u задачи (19)–(24), (5) можем использовать метод скорейшего спуска (8). Поскольку мы получили J'_{u_n}, p_{n-1}, $J'_{u_{n-1}}$, то можем вычислить направление спуска p_n с помощью формул (9).

Подставляя в функционал $l(\widetilde{\psi}_n; w)$ тождества (31), вместо функции $\widetilde{\psi}_n$ функцию p_n, в результате решения задачи (31) с функционалом $l(p_n; w)$ получим решение $z(p_n)$, т. е. получим вектор

$$Ap_n = \{z_i(p_n)\}_{i=1}^{N}. \tag{33}$$

Учитывая (9), (33), можем использовать метод сопряженных градиентов (6), (9) для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения u задачи (19)–(24), (5).

3. Задача со смешанными неоднородными условиями сопряжения. Пусть в области $\Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2$ определено уравнение (19). На границе Γ заданы смешанные краевые условия (20)–(22). На разрезе γ области $\overline{\Omega}$ имеем следующие условия:

$$[y] = \delta, \qquad [q_y] = \omega. \tag{34}$$

Заданы условия (4) и функционал-невязка (5).

Определение 4. Обобщенным решением краевой задачи (19)–(22), (34) при каждом фиксированном $u \in U$ называется функция $y = y(u) = y(u; x) \in H$, которая $\forall w \in H_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(y, w) = l(u; w), \tag{35}$$

где $H_0 = \{v(x)\colon v|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i),\ i = 1,2;\ v|_{\Gamma_1} = 0,\ [v] = 0\}$, $H = \{v(x)\colon v|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i),\ i = 1,2;\ v|_{\Gamma_1} = \varphi,\ [v] = \delta\}$, $a(y,w) = \int\limits_{\Omega} \sum\limits_{i,j=1}^{n} k_{ij} \dfrac{\partial y}{\partial x_j} \dfrac{\partial w}{\partial x_i} dx + \int\limits_{\Gamma_3} \alpha y w \, d\Gamma_3$,

$$l(u;w) = (\widetilde{f}, w) - \int\limits_{\gamma} \omega w^{+} d\gamma + (u_1, w)_{L_2(\Gamma_2)} + (u_2, w)_{L_2(\Gamma_3)}. \tag{35$'$}$$

Для каждого приближения u_n решения $u \in U$ сопряженная задача состоит в нахождении функции $\psi \in H_0$, которая $\forall\ w \in H_0$ удовлетворяет тождеству

$$a(\psi, w) = l_{\psi}(y_n; w), \tag{36}$$

где функционал $l_{\psi}(y_n; w)$ определен выражением (14).

На основании (36), (35) получаем равенства вида (29), (30), что обеспечивает возможность реализации метода минимальных ошибок (6), (7) для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения u задачи (19)–(22), (34), (5).

Имея J'_{u_n}, с учетом представлений (35$'$), можем решить задачу нахождения функции $z \in H$, которая $\forall\ w \in H_0$ удовлетворяет тождеству вида (31).

Тем самым определим все величины, необходимые для реализации метода скорейшего спуска (6), (8).

Определив вектор Ap_n, реализуем метод сопряженных градиентов (6), (9).

1. *Сергиенко И. В., Дейнека В. С.* Решение граничных обратных задач теплопроводности для составного стержня // Пробл. управления и информатики. – 2007. – № 2. – С. 75–97.
2. *Дейнека В. С., Сергиенко И. В.* Оптимальное управление неоднородными распределенными системами. – Киев: Наук. думка, 2003. – 506 с.
3. *Sergienko I. V., Deineka V. S.* Optimal control of distributed systems with conjugation conditions. – New York: Kluwer, 2005. – 400 p.
4. *Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. – Москва: Наука, 1988. – 288 с.
5. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – Москва: Мир, 1972. – 414 с.
6. *Дейнека В. С., Сергиенко И. В.* Модели и методы решения задач в неоднородных средах. – Киев: Наук. думка, 2001. – 606 с.

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 29.03.2007