УДК 512.544

А. В. Тушев

Контроллеры простых точных идеалов групповых алгебр абелевых групп без кручения конечного ранга

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. П. Моторным)

We develop some methods which allow studying properties of the controller of a faithful prime ideal I of the group algebra kA of a torsion-free Abelian group A of finite rank over a field k. We apply some results of the theory of fields such as the Kummer theory and properties of the multiplicative groups of fields. Using these methods, in particular, we obtain an independent proof of a new version of the Brookes theorem on the controllers of prime ideals of the group algebra kA.

Пусть R — кольцо, G — группа и пусть I — правый идеал группового кольца RG. Идеал I называется точным, если $I^{\dagger} = G \bigcap (1 + I) = 1$. Будем говорить, что подгруппа H группы G контролирует идеал I, если

$$I = (I \bigcap RH)RG. \tag{1}$$

Пересечение $c(I)$ всех подгрупп группы G, контролирующих идеал I, называется контроллером идеала I.

Пусть U — правый RH-модуль, где подгруппа H группы G. Тогда можно определить тензорное произведение $U \otimes_{RH} RG$, которое является правым RG-модулем, называемым RG-модулем, индуцированным с RH-модуля U. При этом

$$M = U \otimes_{RH} RG \tag{2}$$

тогда и только тогда, когда

$$M = \oplus_{t \in T} Ut, \tag{3}$$

где T — правая трансверсаль подгруппы H в группе G, т. е. T — множество представителей правых смежных классов группы G по подгруппе H.

Предположим, что $M = aRG$ — циклический RG-модуль, порожденный ненулевым элементом $a \in M$. Пусть $I = Ann_{kG}(a)$ и пусть $U = akH$, где H — подгруппа группы G. Не трудно показать, что в приведенных выше обозначениях равенство (1) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется равенство (3). Таким образом, в данном случае равенства (1), (2) и (3) означают одно и то же.

Пусть k — поле, A — абелева группа без кручения конечного ранга. В работе рассматриваются свойства контроллеров точных простых идеалов групповой алгебры kA. Основная идея исследований заключается в том, что в случае, когда P — точный простой идеал групповой алгебры kA, факторкольцо kA/P может быть вложено как область целостности $k[A]$ в некоторое поле F, а так как идеал P точный, то при этом группа A становится подгруппой мультипликативной группы поля F. Это позволяет применить к изучению области $k[A]$

методы теории полей. Такой подход использовался в работах [1–3], при этом к изучению области целостности $k[A]$ применялась теория нормирований полей. В настоящей работе применяются другие методы теории полей, такие как теория Куммера и свойства мультипликативных групп полей. Впервые такие методы были применены в работе [4] (см. [4, леммы 2, 5]), где было доказано равенство (3) для модулей над абелевыми группами конечного ранга. В дальнейшем эти методы развивались в работах [5–8]. В свою очередь, свойства факторкольца $k[A] \cong kA/P$ существенным образом определяются свойствами идеала P. Для того чтобы доказать равенство (1), мы доказываем равенства (2) и (3) для kA-модуля $k[A]$.

Пусть A — абелева группа, B — подгруппа группы A. Множество $is_A(B)$, состоящее из элементов $a \in A$ таких, что $a^n \in B$ для некоторого натурального числа n, является подгруппой группы A, которую называют изолятором подгруппы B в группе A. Подгруппа B называется плотной в группе A, если $is_A(B) = A$. Если же $is_A(B) = B$, то подгруппа B называется изолированной в группе A.

Пусть k — подполе поля f, G — подгруппа мультипликативной группы f^* поля f. Тогда поле $k(G)$ можно рассматривать как kG-модуль, а поле k можно рассматривать как $k(G \bigcap k^*)$-модуль. Следовательно, можно определить тензорное произведение $k \otimes_{k(G \cap k^*)} kG$, при этом соотношение $k(G) = k \otimes_{k(G \cap k^*)} kG$ означает, что $k(G) = \oplus_{t \in T} kt$, где T — трансверсаль подгруппы $G \bigcap k*$ в группе G. Если $|G/G \bigcap k^*| = m < \infty$, то соотношение $k(G) = k \otimes \otimes_{k(G \cap k^*)} kG$ имеет место тогда и только тогда, когда $[k(G) : k] = m$. Связь между $|G/G \bigcap k^*|$ и $[k(G) : k]$ изучается в теории Куммера (см. [9, гл. VIII, теорема 10]).

Теорема 1. *Пусть k — подполе поля f, G — подгруппа мультипликативной группы f^* поля f такие, что факторгруппа Gk^*/k^* является периодической такой, что $\operatorname{char} k \notin \pi(Gk^*/k^*)$, для любого простого числа $p \in (\pi(t(Gk^*)) \bigcap \pi(Gk^*/k^*))$ поле k содержит примитивный корень из 1 степени p и подполе k содержит примитивный корень из 1 степени 4, если факторгруппа Gk^*/k^* содержит элемент порядка 4. Тогда $k(G) = = k \otimes_{k(k^* \cap G)} kG = \oplus_{t \in T} kt$, где T — трансверсаль подгруппы $k^* \bigcap G$ в G.*

Следствие 1. *Пусть k — подполе поля f и предположим, что поле k содержит все корни из 1. Пусть G — подгруппа мультипликативной группы f^* поля f и пусть $B = = k^* \bigcap G$. Предположим, что факторгруппа G/B является периодической, причем $\operatorname{char} k \notin \notin \pi(G/B)$. Тогда $k(A) = k \otimes_{kB} kA = \oplus_{t \in T} kt$, где T — трансверсаль подгруппы B в группе G.*

Теорему 1 можно рассматривать как обобщение теоремы 13 из [9, гл. VIII] на случай расширений бесконечной степени.

Абелева группа называется минимаксной, если она обладает конечным рядом, каждый фактор которого либо циклический, либо квазициклический. Если A — абелева минимаксная группа, то спектр $Sp(A)$ группы A состоит из простых чисел p таких, что группа A обладает бесконечной p-секцией. Не трудно заметить, что множество $Sp(A)$ конечное.

Будем говорить, что поле k регулярное, если его мультипликативная группа счетная и, кроме того, ее можно представить в виде прямого произведения периодической и свободной абелевой групп. Поле k называется конечно порожденным, если оно получено присоединением конечного множества к минимальному подполю поля k.

Предложение 1. *Пусть f — алгебраически замкнутое поле, k — конечно порожденное подполе поля f. Пусть π — конечное множество простых чисел такое, что $\operatorname{char} f \notin \pi$, X — множество всех корней из 1 поля f, X_π — множество всех корней из 1 степени q^n, где $n \in \mathbb{N}$ и $q \in \pi$. Пусть p — простое число, A — минимаксная подгруппа без* *кручения мультипликативной группы f^* поля f такая, что $Sp(A) \subseteq \{p\}$ и пусть B — конечно порожденная плотная подгруппа группы A такая, что факторгруппа A/B является p-группой. Тогда:*

(i) поле k является регулярным, а группа $t(k^*)$ является конечной;

(ii) поле $k(X_\pi)$ является регулярным, а группа $t((k(X_\pi))^*)$ является локально циклической черниковской группой;

(iii) если $\operatorname{char} f = p$, $s = k(X)(B)$ и $h = k(X)(A)$, то поле s является регулярным, а факторгруппа h^*/s^* является p-группой.

Применение теоремы 1 и предложения 1 позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть k — конечно порожденное поле, A — абелева группа без кручения конечного ранга, P — простой точный идеал групповой алгебры kA. Тогда:*

(i) если поле k имеет нулевую характеристику, то контроллер $c(P)$ идеала P является конечно порожденной подгруппой группы A;

(ii) если поле k имеет положительную характеристику p, то контроллер $c(P)$ идеала P является минимаксной подгруппой группы A такой, что $Sp(c(P)) \subseteq \{p\}$.

Пусть k — поле, A — абелева группа без кручения конечного ранга, на которой действует группа операторов Γ, I — идеал групповой алгебры kA. Подгруппа $S_\Gamma(I)$ группы Γ, состоящая из элементов $\gamma \in \Gamma$ таких, что $I \bigcap kB = I^\gamma \bigcap kB$ для некоторой конечно порожденной плотной подгруппы B группы A, называется стандартизатором идеала I в группе Γ (см. [3]). Теорема 2 играет ключевую роль в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть k — конечно порожденное поле, пусть A — абелева группа без кручения конечного ранга, на которой действует группа операторов Γ, и пусть P — простой точный идеал групповой алгебры kA. Предположим, что $S_\Gamma(P) = \Gamma$. Тогда:*

(i) если поле k имеет нулевую характеристику, то идеал P контролируется Γ-инвариантной конечно порожденной подгруппой S группы A;

(ii) если поле k имеет положительную характеристику p, то идеал P контролируется Γ-инвариантной минимаксной подгруппой S группы A такой, что $Sp(S) \subseteq \{p\}$.

Пусть A — абелева группа без кручения конечного ранга, на которой действует группа операторов Γ. Элементы группы A, имеющие конечные орбиты, при действии группы Γ образуют подгруппу $\Delta_\Gamma(A)$ группы A. Пусть p — простое число, обозначим через $\Lambda_\Gamma^p(A)$ изолятор в группе A подгруппы, порожденной всеми элементами $a \in A$, для которых группа Γ обладает подгруппой Γ_a конечного индекса такой, что любой элемент $\gamma \in \Gamma_a$ действует на элементе a следующим образом: $a^\gamma = a^{p^m}$, где m — некоторое целое число.

Теорема A из работы Брукса [3] утверждает, что если k — поле и P — простой точный идеал групповой алгебры kA такой, что $S_\Gamma(P) = \Gamma$, то идеал P контролируется подгруппой $\Delta_\Gamma(A)$. Для случая, когда группа A является конечно порожденной и $|\Gamma\colon N_\Gamma(P)| < \infty$, аналогичный результат был доказан Роузблэйдом в [2, теорема D].

Однако недавно выяснилось, что оригинальное доказательство [3, теорема A] является неверным. Более того, существует пример, который показывает, что эта теорема вообще неверна в случае, когда поле k имеет положительную характеристику. Как об этом любезно информировал автора К. Брукс, он сформулировал новую версию своей теоремы для случая поля положительной характеристики. В новой версии теоремы A работы [3] для случая поля положительной характеристики p К. Брукс предположил, что подгруппу $\Delta_\Gamma(A)$ можно заменить на подгруппу группы A, порожденную всеми элементами $a \in A$ такими, что для любого элемента $\gamma \in \Gamma$ найдется натуральное число n такое, что $a^{\gamma^n} = a^{p^m}$ для некоторого целого числа m. В теореме 4 нам удалось несколько уточнить предположение Брукса, доказав, что подгруппу $\Delta_\Gamma(A)$ можно заменить подгруппой $\Lambda_\Gamma^p(A)$. При этом ключевую роль в доказательстве играет теорема 3.

Теорема 4. *Пусть k — поле, A — абелева группа без кручения конечного ранга, на которой действует группа операторов Γ, P — простой точный идеал групповой алгебры kA. Предположим, что $S_\Gamma(P) = \Gamma$. Тогда:*

(i) если поле k имеет нулевую характеристику, то идеал P контролируется подгруппой $\Delta_\Gamma(A)$;

(ii) если поле k имеет положительную характеристику p то идеал P контролируется подгруппой $\Lambda_\Gamma^p(A)$.

1. *Bergman G. M.* The logarithmic limit-set of an algebraic variety // Trans. Amer. Math. Soc. – 1971. – **157**. – P. 459–469.
2. *Roseblade J. E.* Prime ideals in group rings of polycyclic groups // Proc. London Math. Soc. – 1976. – **36**, No 3. – P. 385–447.
3. *Brookes Ch. J. B.* Ideals in group rings of soluble groups of finite rank // Math. Proc. Cambridge. Phil. Soc. – 1985. – **97**. – P. 27–49.
4. *Тушев А. В.* Нетеровы модули над абелевыми группами конечного свободного ранга // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 7, 8. – С. 1042–1048.
5. *Segal D.* On the group rings of abelian minimax groups // J. Algebra. – 2001. – **237**. – P. 64–94.
6. *Тушев А. В.* О нетеровых модулях над минимаксными абелевыми группами // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 7. – С. 969–980.
7. *Тушев А. В.* Индуцированные представления абелевых групп конечного ранга // Там же. – 2003. – **55**, № 9. – С. 974–985.
8. *Tushev A. V.* On deviation in groups // Ill. J. Math. – 2003. – **47**, No 1/2. – P. 539–550.
9. *Ленг С.* Алгебра. – Москва: Мир, 1968. – 564 с.

Днепропетровский национальный университет

Поступило в редакцию 19.01.2007