1. *Lakshmikantham V., Ram Mohapatra.* Theory of Fuzzy Differential Equations and Inclusions. – Melbourne: Florida Institute of Technology, 2003. – 178 p. (Manuscript).
2. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – Москва; Ленинград: ОГИЗ, 1947. – 324 с.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 18.12.2006

УДК 517.912

Р. М. Тацій, О. О. Власій

Еквівалентна рекурентна формула для узагальненого квазідиференціального рівняння та її застосування

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Б. Й. Пташником)

The equivalence of an (n+m)-order generalized quasi-differential equation and an (n+m)-order difference equation which will be named by the equivalent recurrent formula is established. Applications of the equivalent recurrent formula are considered.

Вперше існування точної різницевої схеми для диференціальних рівнянь другого порядку з сумовними коефіцієнтами було доведене А. А. Самарським в [1]. У даному повідомленні пропонується дещо інший підхід до побудови точних різницевих схем, який дає змогу одержати такі схеми для квазідиференціальних рівнянь (КДР)довільного порядку з узагальненими коефіцієнтами. У роботі [2] було одержано еквівалентне рекурентне співвідношення (точну різницеву схему) для узагальненого КДР другого порядку способом, який не вдалося поширити для КДР вищих порядків.

У роботі використовуватимемо такі позначення: I — відкритий інтервал дійсної осі $\mathbb{R}$; $BV^+_{\mathrm{loc}}(I)$ — простір неперервних справа функцій локально обмеженої на I варіації; $L_2(I)$ — простір квадратично сумовних за Лебегом на I функцій; $\delta(x-x_s)$ — функція Дірака з носієм у точці x_s; $\Delta C(x) = C(x)-C(x-0)$ — стрибок матриці-функції $C(x)$, елементи якої належать класу $BV^+_{\mathrm{loc}}(I)$, у точці $x \in I$; ω_N — довільне розбиття відрізка $[a;b] \subset I$: $\omega_N = \{x_i \colon a \equiv \equiv x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_N \equiv b\}$.

Розглянемо КДР

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}(a_{ij}(x)y^{(n-i)}(x))^{(m-j)} = 0. \tag{1}$$

На коефіцієнти $a_{ij}(x)$ накладемо такі умови:

A) $a_{00}^{-1}(x)$ — обмежена і вимірна на I функція;

B) $a_{i0}(x)$, $a_{0j}(x) \in L_2(I)$, $i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,m$;

C) $a_{ij}(x) = b'_{ij}(x)$, $b_{ij}(x) \in BV^+_{\mathrm{loc}}(I)$, $i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,m$.

Як відомо [3], КДР (1) за допомогою певним чином введених квазіпохідних $y^{[i]}(x)$, $i = 0, 1, \ldots, r-1$, де $r = m+n$, зводиться до коректної диференціальної системи першого порядку

$$\overline{Y}'(x) = C'(x)\overline{Y}(x), \tag{2}$$

де $\overline{Y}(x) = \mathrm{col}(y(x), y^{[1]}(x), \ldots, y^{[r-1]}(x))$; $C(x)$ — матриця-функція, елементи якої належать класу $BV^{+}_{\mathrm{loc}}(I)$, $(\Delta C(x_k))^2 = 0$ $\forall x_k \in I$. Зауважимо, що рівність (2) розуміється в сенсі теорії узагальнених функцій.

Дослідження системи (2) дало змогу створити [3, 5] лінійну теорію рівняння (1), згідно з якою для системи (2) існує фундаментальна матриця $B(x,\alpha) = \{\beta^{ij}(x,\alpha)\}_{i,j=1}^{r}$, елементи якої визначаються формулою

$$\beta^{ij}(x,\alpha) = K^{[i-1]\{r-j\}}(x,\alpha), \qquad i,j = 1,\ldots,r,$$

де $K(x,\alpha)$ — функція Коші, що відповідає КДР (1), $K^{[i-1]\{r-j\}}(x,\alpha)$ — її змішані квазіпохідні в сенсі вихідного і спряженого КДР.

Означення 1. Рекурентне співвідношення (рекурентну формулу)

$$\sum_{k=0}^{r} A_k(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+r}) y_{i+k} = 0$$

називатимемо еквівалентним для КДР (1), якщо $y_{i+k} = y(x_{i+k})$ — значення певного розв'язку цього рівняння в точці $x = x_{i+k} \in \omega_N$.

Теорема 1. *Нехай $\beta^{ij}_{s+k,s}$, $i, j = 1, \ldots, r$, — елементи фундаментальної матриці $B(x,\alpha)$ диференціальної системи (2), обчислені в точці (x_{s+k}, x_s). Тоді еквівалентна рекурентна формула (ЕРФ) для КДР (1) має вигляд*

$$\Delta_s^0 \cdot y_s + \Delta_s^1 \cdot y_{s+1} + \cdots + \Delta_s^r \cdot y_{s+r} = 0, \tag{3}$$

де

$$\Delta_s^0 = \begin{vmatrix} \beta^{11}_{s+1,s} & \beta^{12}_{s+1,s} & \ldots & \beta^{1,r}_{s+1,s} \\ \beta^{11}_{s+2,s} & \beta^{12}_{s+2,s} & \ldots & \beta^{1,r}_{s+2,s} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \beta^{11}_{s+r,s} & \beta^{12}_{s+r,s} & \ldots & \beta^{1,r}_{s+r,s} \end{vmatrix},$$

$\Delta_s^i = -A_{i0}$, *A_{i0}, $i = 1, \ldots, r$, — алгебраїчне доповнення до елементів першого стовпця визначника Δ_s^0.*

За допомогою фундаментальної матриці системи (2) розв'язок цієї системи подається у вигляді $\overline{Y}(x) = B(x,\alpha)\overline{Y}(\alpha)$. Оскільки згідно з означенням $B(x,\alpha)$ за змінною x є розв'язком системи (2), то для неї є справедливою [4] умова стрибка $\Delta B(x,\alpha) = \Delta C(x) B(x-0,\alpha)$, звідки випливає, що $B(x,\alpha) = (E + \Delta C(x))B(x-0,\alpha)$. Матриця $B(x-0,\alpha)$ є еволюційним оператором диференціальної системи, що відповідає "неперервній частині" КДР (1), коефіцієнти якої не містять дискретної компоненти.

Отже, визначальним при побудові ЕРФ для узагальненого КДР є побудова функції Коші для "неперервної" частини цього рівняння. Однак таку функцію не завжди вдається знайти. Тому постає питання заміни КДР (1) таким квазідиференціальним рівнянням, для якого можна побудувати функцію Коші.

Означення 2. Частково виродженим називатимемо КДР

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}(\alpha_{ij}(x)y^{(n-i)}(x))^{(m-j)}=0, \tag{4}$$

де $\alpha_{i0}(x)$, $\alpha_{i0j}(x)$, $i=1,\ldots,n$, $j=1,\ldots,m$, — кусково-сталі на I функції; $\alpha_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{N}\alpha_{ij}^{k}\delta(x-x_k)$, $\alpha_{ij}^{k}\in\mathbb{R}$, $i=1,\ldots,n$, $j=1,\ldots,m$.

Відомо [5], що фундаментальна матриця, яка відповідає рівнянню типу (4), будується в замкненій формі. Отже, ЕРФ такого рівняння можна побудувати в явному вигляді способом, вказаним у теоремі 1.

Розглянемо практично важливі апроксимації коефіцієнтів КДР (1). Позначимо первісні функцій $a_{i0}(x)$, $a_{0j}(x)$, $i=1,\ldots,n$, $j=1,\ldots,m$, через $b_{i0}(x)$, $b_{0j}(x)$ відповідно. На відрізку $[x_k;x_{k+1})$ апроксимуємо функції $b_{i0}(x)$, $b_{0j}(x)$ (L-апроксимація, див., напр., [6]):

$$b_{i0}(x)\approx b_{i0}^{N}(x)=\frac{b_{i0}(x_{k+1})-b_{i0}(x_k)}{x_{k+1}-x_k}x+b_{i0}(x_k),\qquad i=1,\ldots,n;$$

$$b_{0j}(x)\approx b_{0j}^{N}(x)=\frac{b_{0j}(x_{k+1})-b_{0j}(x_k)}{x_{k+1}-x_k}x+b_{0j}(x_k),\qquad j=1,\ldots,m.$$

Функції $b_{ij}(x)$, $i=1,\ldots,n$, $j=1,\ldots,m$, апроксимуємо способом, запропонованим Ф. Аткінсоном в [4] (D-апроксимація):

$$b_{ij}(x)\approx b_{ij}^{N}(x)=b_{ij}(x_k), x\in[x_k;x_{k+1}).$$

Тоді

$$a_{i0}^{N}(x)=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{b_{i0}(x_{k+1})-b_{i0}(x_k)}{x_{k+1}-x_k}\Theta_k(x),\qquad i=1,\ldots,n; \tag{5}$$

$$a_{0j}^{N}(x)=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{b_{0j}(x_{k+1})-b_{0j}(x_k)}{x_{k+1}-x_k}\Theta_k(x),\qquad j=1,\ldots,m; \tag{6}$$

$$a_{ij}^{N}(x)=\sum_{k=1}^{N}[b_{ij}(x_k)-b_{ij}(x_{k-1})]\delta(x-x_k),\qquad i=1,\ldots,n,\qquad j=1,\ldots,m, \tag{7}$$

де $\Theta_k(x)$ — характеристична функція проміжку $[x_k;x_{k+1})$:

$$\Theta_k(x)=\begin{cases}1, & x\in[x_k;x_{k+1}),\\ 0, & x\in I\setminus[x_k;x_{k+1}).\end{cases}$$

У результаті апроксимації (5)–(7) одержимо рівняння

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}(a_{ij}^{N}(x)y_N^{(n-i)}(x))^{(m-j)}=0, \tag{8}$$

яке є частково виродженим рівнянням типу (4), а отже, для нього ЕРФ будується в явному вигляді.

Описана апроксимація справджує всі умови теореми про збіжність [7], що дозволяє сформулювати таке твердження:

Теорема 2. *Розв'язки частково виродженого КДР* (8) *разом з квазіпохідними до* $(r-1)$*-го порядку включно рівномірно за змінною x збігаються до відповідних розв'язків та їх квазіпохідних КДР* (1)*:*

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ \max\limits_k |x_{k+1}-x_k|\to 0}} |y^{[i]}(x) - y_N^{[i]}(x)| = 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, r-1.$$

1. *Самарский А. А.* Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями: Учеб. пособие для ун-тов. – Москва: Высш. шк., 1987. – 296 с.
2. *Стасюк М. Ф., Власій О. О.* Рекурентне співвідношення для узагальненого квазідиференціального рівняння другого порядку // Вісн. НУ "Львів. політехніка". Прикл. математика. – 2000. – № 407. – С. 82–87.
3. *Тацій Р. М., Пахолок Б. Б.* Про структуру фундаментальної матриці квазідиференціального рівняння // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1989. – № 4. – С. 25–28.
4. *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи: Пер. с англ. – Москва: Мир, 1968. – 749 с.
5. *Кісілевич В., Стасюк М., Тацій Р.* Конструкція елементів фундаментальної матриці квазідиференціальних рівнянь з узагальненими коефіцієнтами // Вісн. НУ "Львів. політехніка". Фіз.-мат. науки. – 2004. – № 518. – С. 30–35.
6. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – Москва: Наука, 1967. – 472 с.
7. *Власій О.* Про збіжність наближених розв'язків квазідиференціальних рівнянь з мірами // Вісн. НУ "Львів. політехніка". Фіз.-мат. науки. – 2005. – № 540. – С. 62–64.

Університет Казимира Великого, Бидгощ, Польща
Прикарпатський національний університет
ім. Василя Стефаника, Івано-Франківськ

Надійшло до редакції 22.01.2007