Доповіді
національної
академії наук
україни

11 • 2010

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 519.81

В. М. Михалевич

К моделированию ситуации в задаче решения с денежными потерями

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Чикрием)

Досліджується система прийняття рішень, ситуація в якій має числові наслідки з оберненим до природного порядком, що є відношенням переваг того, хто приймає рішення на них. При запропонованій інтерпретації виділяється досить широкий клас ситуацій, в яких той, хто приймає рішення при погодженні з досить природними умовами, може використовувати критерій вказаного виду, який залежить лише від закономірності, що описує випадковість в широкому сенсі — закономірність масового явища, що утворюється станом природи.

Условие, что параметрическая задача решения (ЗР) с денежными доходами, а отображения последствий есть функция потерь, означает, что ее схема ситуации задачи решения (ССЗР) принадлежит классу $\mathbf{Z}((\mathbb{R},\leqslant))$, где $(\mathbb{R},\leqslant)$ — множество действительных чисел с естественным порядком $(\leqslant)$, т. е. имеет вид $((\mathbb{R},\leqslant),\Theta,U,g)$. При этом полагаем, что $g(\cdot,u)\in M(\Theta)$ $\forall\, u\in U$, а $M(\Theta)$ — банахово пространство всех действительных ограниченных функций f на Θ с $\|f\| = \sup\limits_{\theta\in\Theta}|f(\theta)|$. В этой работе всюду, употребляя обозначения (Θ,U,g) и $\mathbb{Z}(\Theta)$, будем подразумевать $((\mathbb{R},\leqslant),\Theta,U,g)$ и $\mathbf{Z}((\mathbb{R},\leqslant),\Theta)$. Следующее определение обобщает соответствующее ему определение в [1].

Определение 1. *Правилом выбора критерия* (ПВК) для ССЗР из класса $\mathbb{Z}'(\Theta)\subseteq\mathbb{Z}(\Theta)$ будем называть всякое отображение π, определенное на $\mathbb{Z}'(\Theta)$ и сопоставляющее каждой $Z=(\Theta,U,g)\in\mathbb{Z}'(\Theta)$ некоторую действительную функцию $g^*_Z(\cdot)$, определенную на U.

Класс всех ПВК для $\mathbb{Z}'(\Theta)$ обозначим через $\Pi(\mathbb{Z}'(\Theta))$ и при этом будем относить к $\Pi_0(\mathbb{Z}'(\Theta))\subset\Pi(\mathbb{Z}'(\Theta))$ все ПВК для $\mathbb{Z}'(\Theta)$, удовлетворяющие следующим условиям:

У1. Если $Z_1=(\Theta,U_1,g_1)\in\mathbb{Z}'(\Theta)$, $Z_2=(\Theta,U_2,g_2)\in\mathbb{Z}'(\Theta)$, $U_1\subseteq U_2$ и $g_1(\theta,u)=g_2(\theta,u)$, $\forall\,\theta\in\Theta$, $\forall\,u\in U_1$, то

$$g^*_{Z_1}(u)=g^*_{Z_2}(u),\qquad \forall\,u\in U_1;$$

У2. Если $Z=(\Theta,U,g)\in\mathbb{Z}'(\Theta)$, $u_i\in U$, $i=\overline{1,2}$ и $g(\theta,u_1)\leqslant g(\theta,u_2)$, $\forall\,\theta\in\Theta$, то

$$g^*_Z(u_1)\leqslant g^*_Z(u_2);$$

У3. Если $Z = (\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'(\Theta)$, $u_i \in U$, $i = \overline{1,2}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \geqslant 0$ и $g(\theta, u_1) = ag(\theta, u_2) + b$, $\forall\, \theta \in \Theta$, то

$$g^*_Z(u_1) = ag^*_Z(u_2) + b;$$

У4. Если $Z = (\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'(\Theta)$, $u_i \in U$, $i = \overline{1,3}$ и $g(\theta, u_1) + g(\theta, u_2) = 2g(\theta, u_3)$, $\forall\, \theta \in \Theta$, то

$$g^*_Z(u_1) + g^*_Z(u_2) \geqslant 2g^*_Z(u_3).$$

Определение 2. *МПВК* (Ω-ПМПВК) *в классе ССЗР* $\mathbb{Z}'(\Theta) \in \mathbb{Z}(\Theta)$ будем называть конечную совокупность условий (аксиом) **У** на ПВК для класса $\mathbb{Z}'(\Theta)$, которые задают единственное ПВК (с точностью до параметра $\omega \in \Omega$, где Ω — множество значений параметра ω), и обозначать [**У**] в классе $\mathbb{Z}'(\Theta)$ (с параметром $\omega \in \Omega$).

Далее, через $B_\Sigma(\Theta)$, или просто $B(\Theta)$ (B) в контексте с фиксированным Σ (Θ и Σ), обозначим множество всех Σ-измеримых ограниченных функций на Θ. Ясно, что $B(\Theta)$ всюду плотно в пространстве $B(\Theta, \Sigma)$ — всех равномерных пределов конечных линейных комбинаций характеристических функций множеств из Σ.

Введем в рассмотрение отображение $\eta_{\mathbb{Z}'(\Theta)} \colon P(\Theta) \to \Pi(\mathbb{Z}'(\Theta))$, где $P(\Theta)$ — семейство всех статистических закономерностей на (Θ, Σ). Это отображение $\eta_{\mathbb{Z}'(\Theta)}$ определяется следующим образом. Если

$$P \in P(\Theta), \qquad \pi = \eta_{\mathbb{Z}'(\Theta)}(P), \qquad Z = (\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'(\Theta) \subseteq \mathbb{Z}(\Theta), \qquad \pi(Z) = g^*_Z(\cdot),$$

то

$$g^*_Z(u) = \max_{p \in P} \int\limits_{\Theta} g(\theta, u) p(d\theta), \qquad \forall\, u \in U,$$

где интеграл понимается в естественном смысле интеграла по конечно-аддитивной мере. При этом существование максимума следует из замкнутости множества $P \in P(\Theta)$.

Наконец обозначим через $\mathbb{Z}_\sharp(\Theta)$ подкласс всех ССЗР класса $\mathbb{Z}(\Theta)$ вида

$$\mathbb{Z}_\sharp(\Theta) = \{Z = (\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}(\Theta) : g(\cdot, u) \in B,\ \forall\, u \in U\}.$$

В принятых обозначениях мы можем сформулировать основную теорему, доказанную в [1] (см. теорему 3.1, с. 63).

Теорема 1. *Если* $\Sigma = 2^\Theta$, *то*

$$\eta_{\mathbb{Z}_\sharp(\Theta)}(P(\Theta)) = \Pi_0(\mathbb{Z}_\sharp(\Theta)).$$

Далее будем обозначать через $x_\Theta(\cdot)$ отображение, тождественно равное $x \in X$ на Θ, т. е. $x_\Theta(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} x\ \forall\, \theta \in \Theta$, а там, где это не приводит к недоразумениям, индекс Θ опускать. Тогда через X_Θ будем обозначать все постоянные отображения на Θ, т. е.

$$X_\Theta = \{x_\Theta \colon x \in X\}. \tag{1}$$

Также через $B_0(\Theta)$ или просто B_0 в контексте заланного Θ обозначим множество всех конечнозначных Σ-измеримых функций на Θ, т. е.

$$B_0(\Theta) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in B(\Theta) \colon \operatorname{Card} f(\Theta) < \infty\}.$$

А через $B_0(a,b)$, где $a,b\in\mathbb{R}$, $(-a),b>0$, будем обозначать множество всех конечнозначных Σ-измеримых функций на Θ со значениями в интервале $\{a,b\}$, т. е. $B_0(a,b)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\{f\in\mathbb{R}^{\Theta}\colon f\in B_0, f(\Theta)=\mathrm{co}[f(\Theta)],\ \overline{f(\Theta)}=[a,b]\}$.

Определение 3. ССЗР $Z=(\Theta,U,g)\in\mathbb{Z}(\Theta)$ будем называть **определяющей**, если найдутся $a,b\in\mathbb{R}$, $0\in\mathrm{int}(a,b)$, что

$$B_0(a,b)\subseteq g(\cdot,U)=\mathrm{co}[g(\cdot,U)]\subseteq B. \tag{2}$$

Далее для ССЗР $\mathbb{Z}'(\Theta)\subseteq\mathbb{Z}(\Theta)$ будем относить к $\overline{\Pi}_0(\mathbb{Z}'(\Theta))\subseteq\Pi(\mathbb{Z}'(\Theta))$ все ПВК для $\mathbb{Z}'(\Theta)$, которые для любой определяющей ССЗР $Z=(\Theta,U,g)\in\mathbb{Z}'(\Theta)$ удовлетворяют условиям **У2**, **У4**. Таким образом ослабленные условия мы будем обозначать **У2$'$** и **У4$'$**, соответственно, а через $\Pi_{01}(\mathbb{Z}'(\Theta))\subseteq\overline{\Pi}_0(\mathbb{Z}'(\Theta))$ — все ПВК для $\mathbb{Z}'(\Theta)$, которые удовлетворяют еще следующим условиям:

У1$'$. Если $Z_1=(\Theta,U_1,g_1)\in\mathbb{Z}'(\Theta)$, $Z_2=(\Theta,U_2,g_2)\in\mathbb{Z}'(\Theta)$, $u_1\in U_1$, $u_2\in U_2$, $g_1(\theta,u_1)=g_2(\theta,u_2)\ \forall\,\theta\in\Theta$, то

$$g^*_{Z_1}(u_1)=g^*_{Z_2}(u_2);$$

У3$'$. Если $Z=(\Theta,U,g)\in\mathbb{Z}'(\Theta)$ — определяющая, $u_i\in U$, $i=\overline{1,3}$, $\alpha\in[0,1]$, $g(\cdot,u_3)=c_\Theta$ и для любых $\theta\in\Theta$ $g(\theta,u_1)=\alpha g(\theta,u_2)+(1-\alpha)c$, то

$$g^*_Z(u_1)=\alpha g^*_Z(u_2)+(1-\alpha)c.$$

Для произвольного векторного пространства V введем отношение эквивалентности $\left(\stackrel{\mathrm{co}}{\approx}\right)$ на 2^V таким образом. Для любых X, $Y\subseteq V$

$$X\stackrel{\mathrm{co}}{\approx}Y\Leftrightarrow \mathrm{co}\,X=\mathrm{co}\,Y. \tag{3}$$

Класс всех ПВК для $\mathbb{Z}'(\Theta)$, которые удовлетворяют условию **У1$'$**, а также ослабленным условиям **У2$'$**, **У3$'$**, **У4$'$** тем, что требования этих условий распространяются лишь на $g\in B_0(\Theta)$, будем обозначать через $\Pi_{02}(\mathbb{Z}'(\Theta))$. Соответствующие ослабленные условия мы будем обозначать через **У2$''$**, **У3$''$**, **У4$''$**.

Также введем в рассмотрение отображение $\eta'_{\mathbb{Z}'(\Theta)}\colon P(\Theta)/\stackrel{\mathrm{co}}{\approx}\to\Pi(\mathbb{Z}'(\Theta))$ таким образом, что, если $\widetilde{P}$ — класс эквивалентности по отношению $(P(\Theta),\stackrel{\mathrm{co}}{\approx})$ с представителем $P\in\widetilde{P}$, то

$$\eta'_{\mathbb{Z}'(\Theta)}(\widetilde{P})\stackrel{\mathrm{def}}{=}\eta_{\mathbb{Z}'(\Theta)}(P).$$

Через $P_{\mathrm{co}}(\Theta)$ будем обозначать множество всех выпуклых статистических закономерностей на Θ, т.е. $P_{\mathrm{co}}(\Theta)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\{P\in P(\Theta)\colon P=\mathrm{co}P\}$.

Наконец, через $\mathbb{Z}'_1(\Theta)$ будем обозначать любой подкласс ССЗР класса $\mathbb{Z}(\Theta)$, в котором для любой ССЗР $Z'=(\Theta,U',g')\in\mathbb{Z}'_1(\Theta)$ и любого $u'\in U'$ найдется такая определяющая ССЗР $Z=(\Theta,U,g)\in\mathbb{Z}'_1(\Theta)$ и $u\in U$, что $g'(\theta,u')=g(\theta,u)\ \forall\,\theta\in\Theta$, а через $\mathbb{Z}'_0(\Theta)$ будем обозначать такой подкласс $\mathbb{Z}'_1(\Theta)$, у которого для любой определяющей ССЗР $Z=(\Theta,U,g)\in\mathbb{Z}'_0(\Theta)$ выполняется соотношение $g(\cdot,U)\subseteq B_0$.

Для любого класса $\mathbb{Z}'_1(\Theta)$ определим соответствующий ему класс $\mathbb{Z}'_0(\Theta)$, который будем обозначать $\mathbb{Z}'_{01}(\Theta)$, следующим образом:

$$\mathbb{Z}'_{01}(\Theta):=\bigl\{(\Theta,\overline{U},\overline{g})\colon Z=(\Theta,U,g)\in\mathbb{Z}'_1(\Theta),\ \overline{U}=\{\overline{u}\in U\colon g(\cdot,\overline{u})\in B_0(\Theta)\},$$
$$\overline{g}(\cdot,u)=g(\cdot,u)\ \forall\,u\in\overline{U}\bigr\}.$$

Теперь можно сформулировать результат, обобщающий теорему 1.

Теорема 2. *Для произвольного класса* $\mathbb{Z}_1'(\Theta)$ $\eta'_{\mathbb{Z}_1'(\Theta)}$ *является биекцией, и*

$$\eta'_{\mathbb{Z}_1'(\Theta)}(P(\Theta)/\overset{\text{co}}{\approx}) = \Pi_{01}(\mathbb{Z}_1'(\Theta)) = \Pi_{02}(\mathbb{Z}_1'(\Theta)).$$

Следствие 1. *Для любого класса* $\mathbb{Z}_1'(\Theta)$ *условия* ***У1***$'$, ***У2***$''$, ***У3***$''$, ***У4***$''$ *на ПВК в классе* $\mathbb{Z}_1'(\Theta)$, *т. е.* *[**У1**$'$, **У2**$''$, **У3**$''$, **У4**$''$]* *в классе* $\mathbb{Z}_1'(\Theta)$ *с параметром* $P \in P(\Theta)$, *представляют собой* $P(\Theta)$ *— ПМПВК в классе* $\mathbb{Z}_1'(\Theta)$.

Следствие 2. *В качестве следствия доказанной теоремы при* $\mathbb{Z}_1'(\Theta) = \mathbb{Z}_\sharp(\Theta)$ *и* $\Sigma = 2^\Theta$ *тотчас получаем теорему 1.*

Следствие 3. *Четверка* (Θ, U, g, P) *является полным математическим описанием ситуации с ССЗР* $Z = (\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}_\sharp(\Theta)$ *и закономерностью* $P \in P(\Theta)$ *для [**У1**$'$, **У2**$''$, **У3**$''$, **У4**$''$] в* $\mathbb{Z}_\sharp(\Theta)$ *с параметром* $P \in P(\Theta)$.

Другими словами, ТПРы с ПВК из класса $\Pi_{02}(\mathbb{Z}_1'(\Theta))$ принимают в заданной таким образом модели ситуации одинаковое решение.

Теорема 3. *Для произвольного класса ССЗР* $\mathbb{Z}_1'(\Theta)$ *всякое ПВК* $\overline{g}^* \in \Pi_{01}(\mathbb{Z}_{01}'(\Theta))$ *можно, и притом единственным образом, продолжить до ПВК* $g^* \in \Pi_{01}(\mathbb{Z}_1'(\Theta))$.

Следствие 4. *Для любого класса* $\mathbb{Z}_1'(\Theta)$ *условия* ***У1***$'$, ***У2***$'$, ***У3***$'$, ***У4***$'$ *для ПВК в классе* $\mathbb{Z}_{01}'(\Theta)$, *т. е.* *[**У1**$'$, **У2**$'$, **У3**$'$, **У4**$'$]* *в классе* $\mathbb{Z}_{01}'(\Theta)$ *с параметром* $P \in P(\Theta)$, *представляют собой* $P(\Theta)$ *— ПМПВК в классе* $\mathbb{Z}_{01}'(\Theta)$.

Следствие 5. *Четверка* (Θ, U, g, P) *является полным математическим описанием ситуации с ССЗР* $Z = (\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}_\sharp(\Theta)$ *и закономерностью* $P \in P(\Theta)$ *для [**У1**$'$, **У2**$'$, **У3**$'$, **У4**$'$] в* $\mathbb{Z}_\sharp(\Theta)$ *с параметром* $P \in P(\Theta)$.

Другими словами, ТПРы с ПВК из класса $\Pi_{01}(\mathbb{Z}_1'(\Theta))$ принимают в заданной таким образом модели ситуации одинаковое решение.

1. *Иваненко В. И., Лабковский В. А.* Проблема неопределенности в задачах принятия решений. – Киев: Наук. думка, 1990. – 135 с.

Национальный университет
"Киево-Могилянская академия"

Поступило в редакцию 19.03.2010

V. M. Mikhalevich

On the modeling of situations in the decision problems with monetary losses

A decision-making system having its situation with numerical consequences reverse to the natural order, adopting preference relations as decisions upon themselves, is studied. The interpretation suggested selects a broad enough class of situations, where a decision maker, while being consistent with some quite natural conditions, can use the indicated criterion, depending on the regularity which defines the randomness in general, i. e. a regularity of a mass event representing a state of the world.