



УДК 539.421

© 2010

А. О. Камінський, М. Ф. Селіванов, Ю. О. Черноіван

## Докритичний розвиток тріщини поздовжнього зсуву у в'язкопружному композиті

(Представлено академіком НАН України В. Д. Кубенком)

*В рамках нелінійної механіки руйнування отримано рівняння розвитку тріщини поздовжнього зсуву в композитному матеріалі, компоненти якого мають лінійно в'язкопружні властивості. Дослідження виконано на основі двох моделей механізму розвитку тріщини: моделі сталості довжини зони передруйнування та моделі сталості напружень у цій зоні. Запропоновану схему розв'язання застосовано для побудови числового розв'язку задачі у формі кінетичних кривих розвитку тріщини.*

Вивчення механізмів та закономірностей руйнування сучасних композитних матеріалів з в'язкопружними властивостями як актуальна проблема механіки руйнування вимагає побудови ефективних методів розв'язання задач щодо розвитку тріщин за умов різних типів навантаження на тіла з композитних матеріалів. Досі основна увага приділялася вивченню розвитку тріщин в умовах нормального відриву. Розроблено досить ефективні методики, за допомогою яких можна на основі характеристик в'язкопружної поведінки компонентів композитного матеріалу та принципу Вольтерра побудувати систему визначальних рівнянь, числове розв'язання якої надає змогу будувати кінетичні криві розвитку тріщин з невеликими зонами передруйнування.

Дана робота присвячена одержанню і дослідженню розв'язку задачі про докритичне поширення тріщини поздовжнього зсуву у композитному матеріалі, компоненти якого мають в'язкопружні властивості. Визначальні рівняння побудовано для двох основних моделей поширення тріщини у матеріалі з в'язкопружними властивостями: моделі незмінності розмірів зони передруйнування та моделі незмінності рівномірно розподілених вздовж її довжини напружень.

**1. Постановка задачі та використані моделі.** Розглянемо композитний матеріал з однонапрямленим армуванням дискретними волокнами. Волокно будемо моделювати еліпсоїдом обертання; відношення більшої осі еліпсоїда до меншої позначимо  $k$ , концентрацію фази армування —  $c_1$ . Вважатимемо, що матеріали обох фаз виявляють в'язкопружні властивості, які зумовлюють спадкову поведінку композита.

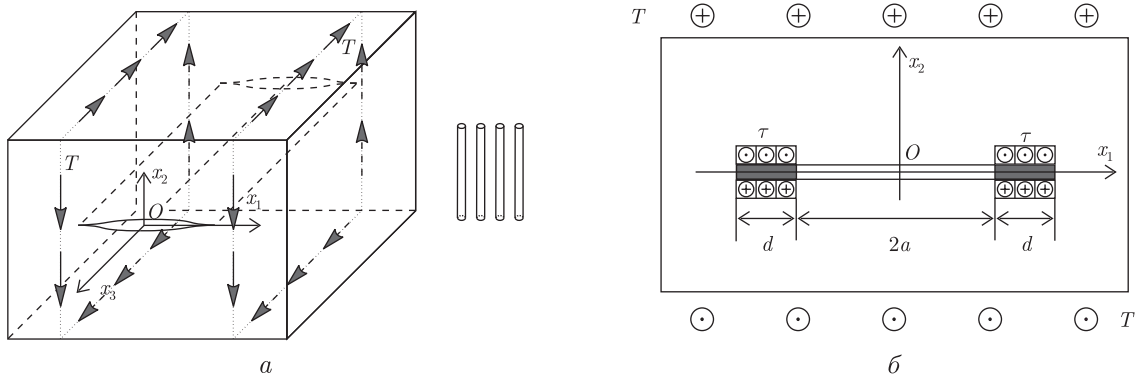


Рис. 1

Будемо досліджувати тривале руйнування в'язкопружного композитного тіла внаслідок поширення наскрізної тріщини. На нескінченності на тіло діють зусилля  $T$  в нормальному до осі  $x_1$  напрямку (рис. 1, *a*).

Деформування тіла відбувається в умовах плоскої деформації. Тріщина розташована в перпендикулярній до напрямку армування площині і при своєму розвитку не виходить із неї. Це припущення виконується для композитів з високим ступенем адгезії, не схильних до розшарування.

Для дослідження кінетики розвитку тріщини використовуватимемо визначальні рівняння докритичного розвитку тріщини, отримані в роботі [1]. В основі побудови цих рівнянь лежить модель тріщини з зоною передруйнування.

Тріщину-щілину у в'язкопружному композиті можна подати як розріз, береги якого мають дві характерні ділянки — на одному березі взаємодіють, на іншому — ні [2]. При цьому взаємодія берегів відбувається у вузьких зонах передруйнування на краях тріщини (рис. 1, *б*). При поздовжньому зсуві поширення тріщини стримується матеріалом у зоні вершини тріщини, поки зсув берегів у зоні вершини не перевищить критичного значення  $\delta_{III*}$  [2, 3]

$$2w(t)|_{x_1=a} = \delta_{III*}, \tag{1}$$

де  $2a$  — розмір тріщини;  $w(t)$  — зміщення вздовж осі  $x_3$ ;  $t$  — час.

При моделюванні протидії матеріалу в зоні устя тріщини (зоні передруйнування) відповідними дотичними напруженнями будемо дотримуватись однієї з двох концепцій: 1) напруження  $\tau$  рівномірно розподілені вздовж берегів зони передруйнування  $d(t)$  і не змінюються протягом докритичного зростання (концепція  $\tau = \text{const}$ ); 2) напруження  $\tau(t)$  рівномірно розподілені по берегах зони передруйнування, розмір якої під час зростання тріщини зберігає сталі значення  $d$  (концепція  $d = \text{const}$ ).

Поширення тріщини визначається як процес переходу точок області, де є взаємодія берегів, в область, де її немає.

Для характеристики тривалої тріщиностійкості в роботі використовуватимемо такі параметри: 1) геометричний параметр  $\eta_* = a_*/a_0$ , де  $a_0$  і  $a_*$  — початковий і критичний напіврозміри тріщини відповідно; 2) при використанні концепції  $\tau = \text{const}$  введемо силовий параметр, який дорівнює відношенню інтенсивності дотичних напружень у зоні передруйнування до інтенсивності зовнішнього навантаження  $\rho_2 = \tau/T$ ; при використанні концепції  $d = \text{const}$  вводимо геометричний параметр  $\rho = d/a_0$ .

**2. В'язкопружне зміщення берегів тріщини та розвиток тріщини.** В'язкопружне зміщення на продовженні тріщини визначатимемо на основі розв'язку задачі про пружне розкриття в ортотропному тілі в умовах плоскої деформації. Для цього скористаємося принципом пружно-в'язкопружної аналогії, що є аналогом принципу Вольтерра, який дістав обґрунтування для аналогічних задач в роботі [4]. Згідно з цим принципом, у виразі для зміщень берегів на продовженні тріщини змінимо пружні модулі відповідними перетвореними величинами і скористаємося оберненим перетворенням.

У випадку, коли релаксаційні властивості матеріалів компонентів композита можна описати в рамках лінійної теорії в'язкопружності, ефективні модулі можна подати рядом функцій Міттаг–Леффлера [5]. При проведенні обчислень ми залишимо лише один доданок у цьому ряді і використовуватимемо один параметр  $\alpha$  функції Міттаг–Леффлера для описання довготривалих властивостей матеріалів компонентів композита з метою якісного дослідження результатів. Вважатимемо також, що матеріали компонентів композита є ізотропними (механічні властивості описуємо модулем Юнга  $E$  і коефіцієнтом Пуассона  $\nu$ ). Відзначаємо, що жодне з цих спрощень не зумовлене використанням методом розв'язання поставленої задачі. За вказаних спрощень вираз для модулів релаксації в області перетворення набуде вигляду

$$\tilde{E}^{(i)}(s) = E_{\infty}^{(i)} + \frac{(E_0^{(i)} - E_{\infty}^{(i)})s^{\alpha}}{s^{\alpha} + \beta^{(i)}}, \quad (2)$$

де  $\tilde{E}(s) = s\bar{E}(s)$ ,  $\bar{E}(s)$  — перетворення Лапласа функції  $E(t)$ ;  $E_0$  — миттєве значення модуля;  $i = 1$  відповідає армуванню,  $i = 2$  — наповнювачу.

Будемо моделювати композит з однонапрямленими короткими волокнами трансверсально ізотропним тілом із зведеними характеристиками [6]. Розглянемо поздовжній зсув цього тіла, коли площина ізотропії перпендикулярна осі  $x_2$  (див. рис. 1). Таким чином, зсув відбувається в площині, перпендикулярній до площини розташування тріщини.

Виходячи із симетрії задачі, тріщину будемо розглядати як розріз уздовж осі  $x_1$ , при цьому на ділянці  $a \leq x_1 \leq a + d$  дотичні напруження, що стягують береги тріщини, розподілено рівномірно з інтенсивністю  $\tau$ . Загальна довжина розрізу  $2(a + d)$  визначається в ході розв'язання задачі. Тому крайову задачу лінійної теорії пружності слід сформулювати так: у пружній області є розріз по осі  $x_1$  довжиною  $2(a + d)$  з центром в початку координат; на поверхні розрізу діють напруження

$$\sigma_{11}(x_1, 0) = 0; \quad \sigma_{22}(x_1, 0) = 0; \quad \tau_{23} = \begin{cases} 0, & |x_1| \leq a, \\ \tau, & a < |x_1| \leq a + d. \end{cases}$$

У нескінченно віддалених точках площини прикладене зовнішнє навантаження інтенсивністю  $\tau_{23}(x_1, \infty) = T$ .

Зсув берегів тріщини довжиною  $2a$  в точці  $(x_1, 0)$  запишемо на основі результатів роботи [2] у формі

$$\delta(x_1, a) = L T a \delta_0(s; \rho_i), \quad s = \frac{x_1}{a}, \quad i = \overline{1, 5}, \quad (3)$$

де

$$\delta_0(s; \rho_i) = \rho_3 \operatorname{Re}\{(1 - b)t_1 + t_2 + (s + 1)t_3 + (s - 1)t_4\} + 2(1 - \rho_2)t_5,$$

причому величини  $b$ ,  $t_3$ ,  $t_4$  і  $t_5$  залежать від геометричного параметра  $s$ ,

$$\begin{aligned} t_1 &= \ln \frac{d_2}{d_1}, & t_2 &= \ln \frac{d_3}{d_2}, & t_3 &= \ln \frac{d_2 - \bar{b}}{d_3 - \bar{b}}, & t_4 &= \ln \frac{d_4 - \bar{b}}{d_2 - \bar{b}}, & t_5 &= \sqrt{\rho_5 - s^2}; \\ d_1 &= 1 + i\rho_4, & d_2 &= -1 + i\rho_4, & d_3 &= -1 - i\rho_4, & d_4 &= 1 - i\rho_4, & b &= s + it_5, \\ \rho_2 &= \frac{\tau}{T}, & \rho_3 &= 2\frac{\rho_2}{\pi}, & \rho_4 &= \operatorname{tg} \rho_3^{-1}, & \rho_5 &= 1 + \rho_4^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Параметр  $\rho_5$  пов'язано з параметрами моделі у такий спосіб:

$$\rho_5 = (1 + \rho_1)^2, \quad \rho_1 = d/a. \quad (5)$$

Умова скінченності напружень  $\tau_{23}$  в точці  $(a+d, 0)$ , яка використовується при отриманні виразу (3), у введених позначеннях має вигляд

$$\rho_2 = \frac{\pi}{2 \operatorname{arctg} \sqrt{(1 + \rho_1)^2 - 1}}, \quad (6)$$

звідки випливає твердження про сталість величини  $\rho_1$  під час поширення тріщини в разі використання концепції  $\tau = \operatorname{const}$  і сталій інтенсивності зовнішнього навантаження. В цьому випадку з виразів (4)–(6) випливає, що величини  $\rho_i$ ,  $i = \overline{1, 5}$ , будуть сталими і залежатимуть тільки від  $\rho_2$ , який ми ввели в попередньому параграфі як відносний параметр тріщиностійкості для концепції  $\tau = \operatorname{const}$ . Із зростанням тріщини збільшуватиметься довжина зони передруйнування.

В разі використання концепції  $d = \operatorname{const}$  при зростанні тріщини величина  $\rho_2$  буде збільшуватись і, таким чином, збільшуватимуться напруження в зоні передруйнування при сталих інтенсивностях зовнішнього навантаження. Величини  $\rho_i$ ,  $i = \overline{1, 5}$ , в цьому випадку залежатимуть від розміру тріщини. З огляду на вибір другого параметра тріщиностійкості, в рамках цієї концепції величини  $\rho_i$  у виразі для розкриття тріщини (3) обчислюватимемо в зворотному порядку

$$\rho_5 = \left[ 1 + \frac{\rho}{a/a_0} \right]^2, \quad \rho_4 = \sqrt{\rho_5 - 1}, \quad \rho_3 = \frac{1}{\operatorname{arctg} \rho_4}, \quad \rho_2 = \frac{\pi \rho_3}{2}.$$

Розкриття в вершині тріщини, згідно з (3),

$$\delta(a, a) = LTa\delta_0(1; \rho_i) = LTa\rho_6, \quad \rho_6 = -2\rho_3 \ln \cos \frac{1}{\rho_3}. \quad (7)$$

У виразах (3) і (7) характеристика  $L$ , зв'язана із властивостями матеріалу, визначається так [2]:

$$L = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{44}\lambda_{66}}}, \quad (8)$$

де  $\lambda_{ij}$  — ефективні модулі композита з напрямленими вздовж осі  $x_3$  дискретними волокнами. Використаємо результати роботи [6], в якій ці модулі отримано як функції геометричного параметра волокна  $k$ , концентрації волокон  $c_1$  та характеристик Ламе матеріалів компонент композита.

Згідно з принципом пружно-в'язкопружної аналогії [7], замінимо залежні від часу характеристики релаксації  $E^{(i)}(t)$  відповідними перетвореними величинами  $\tilde{E}^{(i)}(s)$  (згідно з (2)), попередньо переписавши характеристики Ламе через модуль пружності  $E$ , що використовується нами для описання спадкових характеристик матеріалів компонент композита, і коефіцієнт Пуассона  $\nu$ ; вважатимемо при цьому об'ємну деформацію пружною, що надасть змогу записати коефіцієнти Пуассона матеріалів компонент у вигляді функції миттєвих характеристик матеріалів і їх перетворених модулів Юнга.

Підставляючи перетворені величини  $\tilde{\lambda}_{ij}$  в агрегат (8), отримаємо  $\tilde{L}$  в області перетворення. Агрегат  $L$  та його похідну як функції часу знайдемо за допомогою оберненого перетворення Лапласа

$$L(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\tilde{L}}{s}\right\}, \quad L'(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{L} - \tilde{L}_\infty\}, \quad (9)$$

де  $s$  — параметр перетворення Лапласа.

За допомогою результатів роботи [8] перетворені вирази можна знайти на часових інтервалах у вигляді лінійної комбінації експонент  $\sum_{k=-n}^n \gamma_k e^{z_k t}$ ,  $t_j \leq t \leq \Lambda t_j$ ,  $\gamma_k, z_k \in \mathbb{C}$ .

Для побудови рівнянь докритичного розвитку тріщини поздовжнього зсуву в рамках обох використаних концепцій запишемо параметр критичного розкриття, що фігурує у вихідному рівнянні (1) у вигляді

$$\delta_{III*} = L_0 T a_* \delta_0(1; \rho_i), \quad (10)$$

де  $\rho_i$  залежать від  $a_*$  при використанні концепції  $d = \text{const}$ .

Також введемо позначення

$$\zeta(\xi, \eta) = \eta \delta_0\left(\frac{\xi}{\eta}; \rho_i\right), \quad \zeta(\eta) = \zeta(\eta, \eta), \quad \zeta_* = \zeta(\eta_*); \quad (11)$$

при використанні концепції  $d = \text{const}$  величини  $\rho_i$  залежать від  $\eta$ .

Визначальні рівняння докритичного росту тріщини поздовжнього зсуву отримаємо на підставі підходу, викладеного в [4], виходячи із критерію руйнування (1) і в'язкопружного зсуву берегів тріщини (див. нижче).

Процес докритичного стабільного росту тріщини поздовжнього зсуву, як і для тріщини нормального відриву, умовно розділимо на три періоди [4]: інкубаційний, перехідний і основний. Виходячи з принципу Вольтерра і співвідношень для визначення пружного зсуву берегів тріщини (3) і (7), запишемо вираз для в'язкопружного розкриття тріщини в точці  $x_1 = a(t)$  залежно від її положення на лінії продовження тріщини, прирівняємо його до критичного розкриття  $\delta_{III*}$  згідно з (10) та розділимо на  $L T a_0$ , вводячи безрозмірну довжину тріщини  $\eta = a/a_0$  і  $L_1(t) = L(t)/L_0$ .

1. При  $x_1 = a_0$  ( $a_0$  — початковий напіврозмір тріщини) маємо рівняння для визначення тривалості інкубаційного періоду (спостерігаємо зсув берегів тріщини без її зростання)  $t_0$

$$\zeta(1)L_1(t_0) = \zeta_*. \quad (12)$$

2. При  $a_0 < x_1 \leq a_0 + d_0$  ( $d_0$  — початковий розмір зони передруйнування) маємо рівняння для перехідного періоду

$$\zeta[\eta(t)] + \zeta(\eta(t), 1)[L(t) - L(t - t_0)] + \int_{t_0}^t L_1'(t - \tau) \zeta[\eta(t), \eta(\tau)] d\tau = \zeta_*; \quad (13)$$

за час цього періоду тріщина стартує і проходить відстань  $d_0$ . Перший доданок у лівій частині відповідає миттєвому значенню розкриття у вершині тріщини, другий — розкриттю в точці  $x_1 = a(t)$  тріщини розміром  $a_0$ , яке отримано протягом інкубаційного періоду, третій — розкриттю в точці  $x_1 = a(t)$  тріщини розміром  $a(\tau)$ , яке отримано протягом поточного періоду.

3. При  $x_1 > a_0 + d_0$  маємо рівняння для основного періоду

$$\zeta[\eta(t)] + \int_{t'}^t L'_1(t - \tau) \zeta[\eta(t), \eta(\tau)] d\tau = \zeta_*, \quad (14)$$

де  $t'$  визначається з рівняння  $a(t) - a(t') = d(t)$ , яке, залежно від обраної концепції, набуває вигляду  $\eta(t') = (1 - \rho_1)\eta(t)$  ( $\tau = \text{const}$ ),  $\eta(t') = \eta(t) - \rho$  ( $d = \text{const}$ ); за час основного періоду тріщина повільно підростає до свого критичного розміру, після чого починається її динамічний розвиток.

В рамках концепції  $\tau = \text{const}$  величини  $\rho_i$  у рівняннях (12)–(14) є сталими величинами і залежать тільки від відносного параметра тріщиноустійкості  $\rho_2$ . В рамках концепції  $d = \text{const}$  ці величини, згідно з (5), залежатимуть від величини  $d/a$ , яка не є сталою під час зростання тріщини. Отже, в перших доданках лівої частини рівнянь (13) і (14)  $\rho_i$  залежатимуть від  $\eta(t)$ , а в третьому доданку лівої частини рівняння (13) і в другому (14) — від  $\eta(\tau)$  (за змінною  $\tau$  проводиться інтегрування).

Розв'язуючи послідовно рівняння (12)–(14), можна досліджувати кінетику розвитку тріщини зсуву, а також визначити довговічність в'язкопружного композита з тріщиною.

**3. Числові розв'язки та обговорення результатів.** Зафіксуємо характеристики матеріалу наповнювача й введемо коефіцієнти, які характеризують взаємне розташування залежностей від часу для модулів матеріалів армування й наповнювача (згідно з модельним поданням (2))

$$k_E = \lg \frac{E_0^{(1)}}{E_0^{(2)}}, \quad k_\beta = -\frac{\lg(\beta^{(1)}/\beta^{(2)})}{\alpha}, \quad k_1 = \lg \frac{E_0^{(1)}}{E_\infty^{(1)}}. \quad (15)$$

Перший з коефіцієнтів визначає співвідношення між миттєвим модулем Юнга двох матеріалів, другий — відношення миттєвого й довготривалого модулів Юнга для матеріалу армування, третій — зсув в додатному напрямку осі часу кривої, що описує зміну в часі модуля матеріалу армування щодо залежності зміни в часі модуля матеріалу наповнювача.

Розіб'ємо відрізок на продовженні тріщини від точки  $a_0$  до точки  $a_*$  на  $N$  відрізків. Тоді з рівнянь (12)–(14) послідовно визначатимемо моменти часу  $t_K$  проходження тріщиною  $K$ -го вузла розбиття  $\eta_K$ ; у межах кожного з відрізків шукатимемо розв'язок у формі показникової функції. Виходячи з того, що для дослідженого класу задач спостерігається збільшення прискорення при наближенні етапу нестабільного зростання тріщини, виконаємо розбиття відрізка  $[1, \eta_*]$  зі зростаючими  $\Delta\eta_K$ , наприклад, за геометричною прогресією.

На рис. 2 б, в, ж наведено кінетичні діаграми ( $t - \eta$ ,  $t$  в секундах) росту тріщини в композитному тілі в рамках концепції  $\tau = \text{const}$ . Діаграми отримано при  $k = 10$ ,  $c_1 = 0,33$  (параметри форми і концентрації елементів армування);  $\alpha = 0,5$  (параметр функції Міттаг-Леффлера);  $\nu_0^{(1)} = 0,3$  (миттєвий коефіцієнт Пуассона матеріалу елементів армування);  $E_0^{(2)} = 4 \cdot 10^9$  Па,  $\nu_0^{(2)} = 0,35$  (миттєві характеристики наповнювача),  $\beta^{(2)} = 0,1 \text{ c}^{-\alpha}$

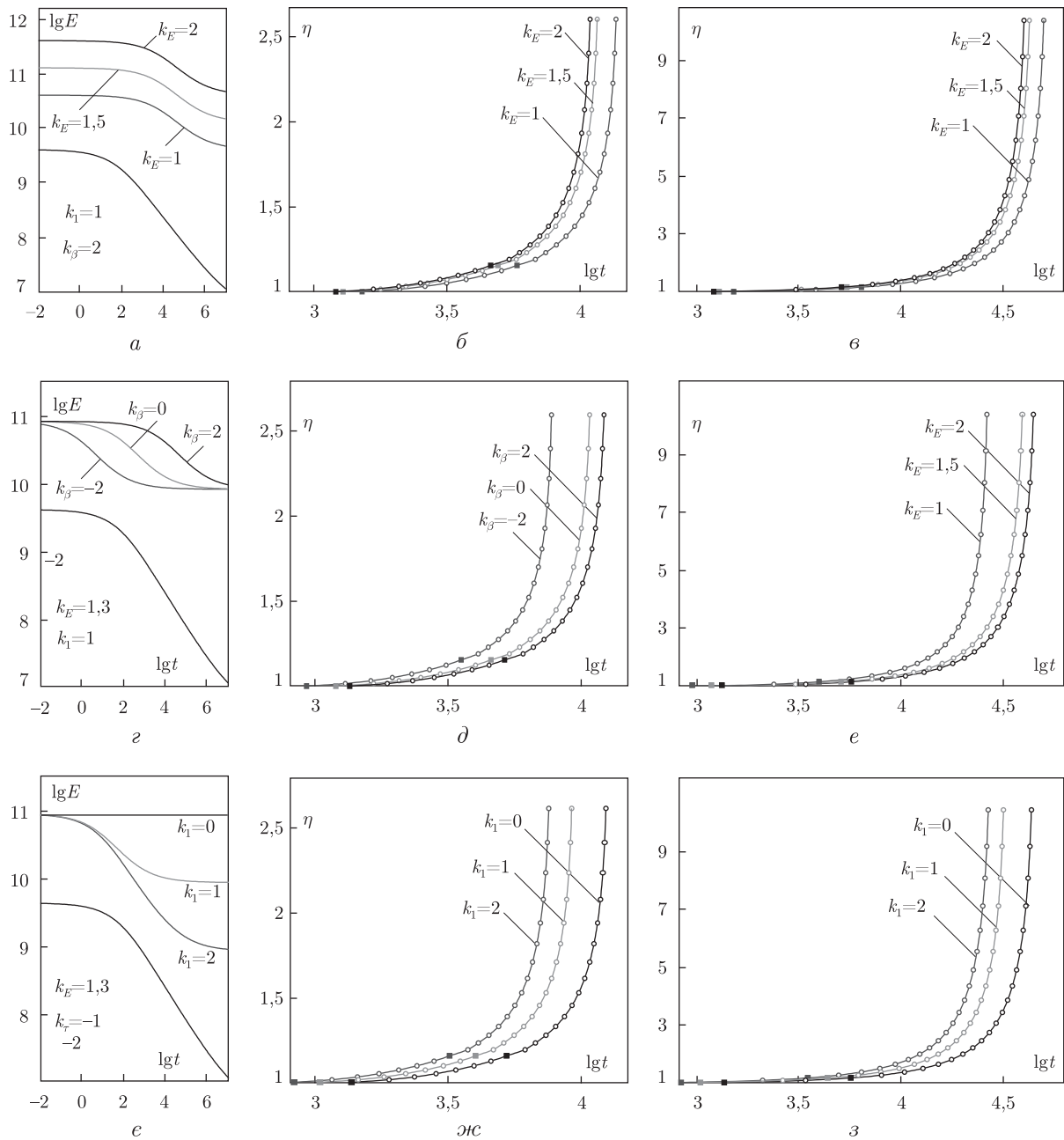


Рис. 2

(реологічний параметр наповнювача);  $\eta_* = 5$ ,  $\rho_2 = 3$  (параметри тріщиностійкості). Інші реологічні параметри визначаються за допомогою введених у (15) коефіцієнтів, значення яких подано на рисунку. Темні квадратики на кожній з кінетичних кривих відповідають тривалості інкубаційного періоду і часу закінчення перехідного періоду. Кінетичні криві на кожному з блоків відповідають зазначеному положенню кривої релаксації ( $t - E$ ,  $E$  в Паскалях) матеріалу волокон відносно кривої релаксації наповнювача з відповідного блоку рис. 2, а, г, е.

На рис. 2, в, е, з подано кінетичні для випадку використання концепції  $d = \text{const}$ . При розрахунках збережені всі вихідні параметри, крім  $\eta_*$ , який обрано таким чином, щоб під час інкубаційного періоду параметр  $\rho_2$  становив таку ж саму величину, як ми обрали при дослідженні в рамках концепції  $\tau = \text{const}$ ; згідно з (6), параметр  $\rho = \cos^{-1}(\pi/2\rho_2) - 1$ .

Характер кінетичних діаграм розвитку тріщини поздовжнього зсуву якісно відповідає аналогічним діаграмам для тріщини нормального відриву, отриманим у роботах [1, 4]. Близькість довговічностей для різних значень одного з параметрів  $k_E$ ,  $k_1$  і  $k_\beta$  і фіксованих інших зумовлена відповідними розбіжностями між кривими релаксації матеріалу волокон на часовому проміжку, в якому одержано розв'язок рівнянь докритичного розвитку тріщини.

Вивчення кривих на рис. 2 показує, що використання моделі зі сталою довжиною зони передруйнування призводить до отримання більших значень довговічності, ніж використання моделі зі сталим напруженням у зоні передруйнування. Отже, якщо за допомогою попередніх досліджень не вдається визначити, якій з моделей слід надавати перевагу при прогнозуванні розвитку тріщин у тому чи іншому композитному матеріалі, оцінку довговічності варто виконувати за результатами дослідження з використанням моделі сталого напруження у зоні передруйнування.

1. Каминский А. А., Гаврилов Д. А. Длительное разрушение полимерных и композитных материалов с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1992. – 248 с.
2. Серенсен С. В., Зайцев Г. П. Несущая способность тонкостенных конструкций из армированных пластиков с дефектами. – Киев: Наук. думка, 1982. – 295 с.
3. Панасюк В. В. Механика квазихрупкого разрушения материалов. – Киев: Наук. думка, 1991. – 416 с.
4. Каминский А. А. Разрушение вязкоупругих тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1990. – 310 с.
5. Selivanov M. F. On the effective properties of linear viscoelastic composite // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, No 10. – P. 62–70.
6. Хорошун Л. П., Маслов Б. П., Шижула Е. Н., Назаренко Л. В. Статистическая механика и эффективные свойства материалов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 390 с. – (Механика композитов: в 12 т. Т. 3).
7. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – Москва: Мир, 1982. – 336 с.
8. López-Fernández M., Palencia C., Schädle A. A spectral order method for inverting sectorial Laplace transforms // SIAM J. Numer. Anal. – 2006. – 44, No 3. – P. 1332–1350.

*Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка  
НАН України, Київ*

*Надійшло до редакції 25.02.2010*

**A. A. Kaminsky, M. F. Selivanov, Yu. O. Chornoivan**

### **Subcritical growth of a model III crack in a viscoelastic composite**

*In the frame of nonlinear fracture mechanics, the equations for the growth of a longitudinal shear crack in a composite, whose components possess linearly viscoelastic properties, are constructed and numerically solved.*