УДК 512

Т. Р. Сейфуллин

Безутиан и ограниченные корневые функционалы системы полиномов

(Представлено академиком НАН Украины А. А. Летичевским)

Кореневий функціонал (елемент інверсної системи Маколея) є лінійним функціоналом, що визначений на кільці поліномів та анулює ідеал поліномів. Обмежений кореневий функціонал є функціонал, що анулює d-ту компоненту ідеалу в деякому його напівградуюванні. Вивчається дія обмеженого кореневого функціонала на безутіан для поліномів від декількох змінних.

В работе будут использоваться определения, обозначения и соглашения работ [1, 2]. Будем писать $\mathbf{R}[x]^{\leqslant d}$ вместо $\mathbf{R}[x^{\leqslant d}]$, будем использовать термин полуоднородная разностная производная вместо термина монотонная разностная производная.

Определение 1. Пусть $\mathbf{R}$ — коммутативное кольцо с единицей. Пусть $\mathcal{U}$ — модуль над $\mathbf{R}$, V — подмножество множества $\mathcal{U}$. Обозначим $V^{\perp}$ множество всех линейных функционалов на $\mathcal{U}$, т. е. отображений из $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathcal{U},\mathbf{R})$, которые аннулируют все элементы из V.

Определение 2. Пусть $\mathbf{A}$ — коммутативное кольцо, пусть K — конечное множество, $a=(a_i)_{i\in K}\in\mathbf{A}^K$, $b=(b_j)_{j\in K}\in\mathbf{A}^K$. Обозначим $a\wedge b=(a_i{\cdot}b_j-a_j{\cdot}b_i)_{(i,j)\in K\times K}$.

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{R}$ *— коммутативное кольцо с единицей,* $x=(x_1,\ldots,x_n)$ *— переменные,* $f(x)=(f_1(x),\ldots,f_s(x))$ *— полиномы из* $\mathbf{R}[x]$*. Тогда:*

1. $\mathbf{R}[x]^{\leqslant d_1}{\cdot}\mathbf{R}[x]^{\leqslant d_2}\subseteq\mathbf{R}[x]^{\leqslant d_1+d_2}$.

2. $(f(x))_x^{\leqslant d_1}{\cdot}\mathbf{R}[x]^{\leqslant d_2}\subseteq(f(x))_x^{\leqslant d_1+d_2}$.

3. $\mathbf{R}[x]^{\leqslant d_1}{\cdot}(f(x))_x^{\leqslant d_2}\subseteq(f(x))_x^{\leqslant d_1+d_2}$.

Таким образом, произведение $\mathbf{R}[x]{\times}\mathbf{R}[x]\to\mathbf{R}[x]$ *индуцирует произведение*

$$\frac{\mathbf{R}[x]^{\leqslant d_1}}{(f(x))_x^{\leqslant d_1}}\times\frac{\mathbf{R}[x]^{\leqslant d_2}}{(f(x))_x^{\leqslant d_2}}\to\frac{\mathbf{R}[x]^{\leqslant d_1+d_2}}{(f(x))_x^{\leqslant d_1+d_2}}.$$

Доказательство. Очевидно.

Лемма 2. *Пусть* $\mathbf{R}$ *— коммутативное кольцо с единицей,* $x=(x_1,\ldots,x_n)$ *— переменные,* $f(x)=(f_1(x),\ldots,f_s(x))$ *— полиномы из* $\mathbf{R}[x]$*. Тогда:*

1. $((f(x))_x^{\leqslant\Delta_1})^{\perp}{\cdot}\mathbf{R}[x]^{\leqslant d_2}\subseteq((f(x))_x^{\leqslant\Delta_1-d_2})^{\perp}$.

2. $(\mathbf{R}[x]^{\leqslant\Delta_1})^{\perp}{\cdot}\mathbf{R}[x]^{\leqslant d_2}\subseteq(\mathbf{R}[x]^{\leqslant\Delta_1-d_2})^{\perp}$.

3. $((f(x))_x^{\leqslant\Delta_1})^{\perp}{\cdot}(f(x))_x^{\leqslant d_2}\subseteq(\mathbf{R}[x]^{\leqslant\Delta_1-d_2})^{\perp}$.

Таким образом, произведение $\mathbf{R}[x]_*{\times}\mathbf{R}[x]\to\mathbf{R}[x]_*$ *индуцирует произведение*

$$\frac{((f(x))_x^{\leqslant\Delta_1})^{\perp}}{(\mathbf{R}[x]^{\leqslant\Delta_1})^{\perp}}\times\frac{\mathbf{R}[x]^{\leqslant d_2}}{(f(x))_x^{\leqslant d_2}}\to\frac{((f(x))_x^{\leqslant\Delta_1-d_2})^{\perp}}{(\mathbf{R}[x]^{\leqslant\Delta_1-d_2})^{\perp}}.$$

Доказательство. Положим $A^{\leqslant d}=\mathbf{R}[x]^{\leqslant d}$, $I^{\leqslant d}=(f(x))_x^{\leqslant d}$.

Доказательство 1. Имеет место

$$(I^{\leqslant\Delta_1})^{\perp}\cdot A^{\leqslant d_2}.I^{\leqslant\Delta_1-d_2}=(I^{\leqslant\Delta_1})^{\perp}.A^{\leqslant d_2}\cdot I^{\leqslant\Delta_1-d_2}\subseteq(I^{\leqslant\Delta_1})^{\perp}.I^{\leqslant\Delta_1}=\{0\},$$

следовательно, $(I^{\leqslant\Delta_1})^{\perp}\cdot A^{\leqslant d_2}\subseteq(I^{\leqslant\Delta_1-d_2})^{\perp}$.

Доказательство 2. Имеет место

$$(A^{\leqslant\Delta_1})^{\perp}\cdot A^{\leqslant d_2}.A^{\leqslant\Delta_1-d_2}=(A^{\leqslant\Delta_1})^{\perp}.A^{\leqslant d_2}\cdot A^{\leqslant\Delta_1-d_2}\subseteq(A^{\leqslant\Delta_1})^{\perp}.A^{\leqslant\Delta_1}=\{0\},$$

следовательно, $(A^{\leqslant\Delta_1})^{\perp}\cdot A^{\leqslant d_2}\subseteq(A^{\leqslant\Delta_1-d_2})^{\perp}$.

Доказательство 3. Имеет место

$$(I^{\leqslant\Delta_1})^{\perp}\cdot I^{\leqslant d_2}.A^{\leqslant\Delta_1-d_2}=(I^{\leqslant\Delta_1})^{\perp}.I^{\leqslant d_2}\cdot A^{\leqslant\Delta_1-d_2}\subseteq(I^{\leqslant\Delta_1})^{\perp}.I^{\leqslant\Delta_1}=\{0\},$$

следовательно, $(I^{\leqslant\Delta_1})^{\perp}\cdot I^{\leqslant d_2}\subseteq(A^{\leqslant\Delta_1-d_2})^{\perp}$.

Лемма 3. *Пусть* $\mathbf{R}$ *— коммутативное кольцо с единицей,* $x=(x_1,\ldots,x_n)$ *— переменные,* $y\simeq x$, $f(x)=(f_1(x),\ldots,f_s(x))$ *и* $F(x)=(F_1(x),\ldots,F_t(x))$ *— полиномы из* $\mathbf{R}[x]$. *Тогда:*

1. $((f(y))_y^{\leqslant\Delta})^{\perp}.(f(y))_{x,y}^{\leqslant d}\subseteq\mathbf{R}[x]^{\leqslant d-\Delta-1}$.

2. $(\mathbf{R}[y]^{\leqslant\Delta})^{\perp}.(F(x))_{x,y}^{\leqslant d}\subseteq(F(x))_x^{\leqslant d-\Delta-1}$.

3. $((f(y))_y^{\leqslant\Delta})^{\perp}.(F(x)\cdot f(y))_{x,y}^{\leqslant d}\subseteq(F(x))_x^{\leqslant d-\Delta-1}$.

Доказательство 1.

$$((f(y))_y^{\leqslant\Delta})^{\perp}.(f(y))_{x,y}^{\leqslant d}=((f(y))_y^{\leqslant\Delta})^{\perp}.\sum_{\alpha}(f(y))_y^{\leqslant\alpha}\cdot\mathbf{R}[x]^{\leqslant d-\alpha}\subseteq\mathbf{R}[x]^{\leqslant d-\Delta-1},$$

$$(\mathbf{R}[y]^{\leqslant\Delta})^{\perp}.(F(x))_{x,y}^{\leqslant d}=(\mathbf{R}[y]^{\leqslant\Delta})^{\perp}.\sum_{\alpha}\mathbf{R}[y]^{\leqslant\alpha}\cdot(F(x))_x^{\leqslant d-\alpha}\subseteq(F(x))_x^{\leqslant d-\Delta-1},$$

$$((f(y))_y^{\leqslant\Delta})^{\perp}.(F(x)\cdot f(y))_{x,y}^{\leqslant d}=((f(y))_y^{\leqslant\Delta})^{\perp}.\sum_{\alpha}(f(y))_y^{\leqslant\alpha}\cdot(F(x))_x^{\leqslant d-\alpha}\subseteq(F(x))_x^{\leqslant d-\Delta-1}.$$

Во всех трех случаях слагаемые с $\alpha\leqslant\Delta$ являются нулевыми, поэтому их можно отбросить без изменения суммы. У остальных слагаемых $\alpha\geqslant\Delta+1$, следовательно, $d-\alpha\leqslant d-\Delta-1$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{R}$ *— коммутативное кольцо с единицей,* $x=(x_1,\ldots,x_n)$ *— переменные,* $y\simeq x$, $f(x)=(f_1(x),\ldots,f_{n+1}(x))$ *— полиномы из* $\mathbf{R}[x]$, $\delta_f=\sum\limits_{i=1}^{n+1}\deg(f_i)-n$. *Тогда:*

1. $\det\begin{Vmatrix}\nabla f(x,y)\\ f(x)\end{Vmatrix}=\det\begin{Vmatrix}\nabla f(x,y)\\ f(y)\end{Vmatrix}$, *обозначим этот полином* $B(x,y)$.

2. $B(x,y)\in(f(x))_{x,y}^{\leqslant\delta_f}$, $B(x,y)\in(f(y))_{x,y}^{\leqslant\delta_f}$, $B(x,y)\in\mathbf{R}[x,y]^{\leqslant\delta_f}$.

3. $B(x,y)$ *определяется однозначно с точностью до слагаемого из* $(f(x)\wedge f(y))_{x,y}^{\leqslant\delta_f}$ *независимо от выбора* $\nabla f(x,y)$.

Определение 3. Определитель $B(x,y)$ в теореме 1 называется безутианом полиномов $f(x)$ для матрицы их разностных производных $\nabla f(x,y)$.

Теорема 1. (Продолжение.)

4. Если $B'(x,y)$ *является безутианом полиномов* $f(x)$ *для матрицы их разностных производных* $\nabla'f(x,y)=\nabla f(y,x)$, *то* $B'(x,y)=B(y,x)$; *и* $B(y,x)-B(x,y)\in(f(x)\wedge f(y))_{x,y}^{\leqslant\delta_f}$.

5. Если $F(x)\in\mathbf{R}[x]^{\leqslant d}$, *то* $B(x,y)\cdot(F(x)-F(y))\in(f(x)\wedge f(y))_{x,y}^{\leqslant\delta_f+d}$.

Доказательство 1, 2, 3. *1* и *3* теоремы следуют из теоремы 1 из [1], если в нее вместо $f(x)$ подставить $(f(x), F(x))$, вместо δ_f подставить $\delta_f + d$; *2* теоремы очевидно.

Доказательство 4. В силу *1* леммы 2 из [1] $\nabla' f_i(x,y) = \nabla f_i(y,x)$ является разностной производной полинома $f_i(x)$ для $i = 1,\ n+1$. Легко видеть, что $\nabla' f_i(x,y)$ является полуоднородной разностной производной полинома $f_i(x)$, так как $\nabla f_i(x,y)$ является полуоднородной разностной производной полинома $f_i(x)$. Пусть $B'(x,y)$ является безутианом полиномов $f(x)$ для матрицы их разностных производных $\nabla' f(x,y) = \nabla f(y,x)$, тогда

$$B'(x,y) = \det \begin{Vmatrix} \nabla' f(x,y) \\ f(y) \end{Vmatrix} = \det \begin{Vmatrix} \nabla f(y,x) \\ f(y) \end{Vmatrix} = B(y,x).$$

Следовательно, в силу *3* теоремы $B(y,x) - B(x,y) = B'(x,y) - B(x,y) \in (f(x) \wedge f(y))_{x,y}^{\leqslant \delta_f}$.

Доказательство 5.

$$B(x,y) \cdot (F(x) - F(y)) = \det \begin{Vmatrix} \nabla f(x,y) \\ f(x) \end{Vmatrix} \cdot (F(x) - F(y)) =$$

$$= \det \begin{Vmatrix} \nabla f(x,y) & \nabla F(x,y) \\ f(x) & 0 \\ 0 & F(x) - F(y) \end{Vmatrix} = \det \begin{Vmatrix} \nabla f(x,y) & \nabla F(x,y) \\ f(x) & 0 \\ f(y) & 0 \end{Vmatrix} \in (f(x) \wedge f(y))_{x,y}^{\leqslant \delta_f + d}.$$

Матрица третьего определителя получается из матрицы второго определителя путем прибавления к последней строке линейной комбинации остальных строк

$$-\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k) \cdot \| \nabla^k f(x,y) \quad \nabla^k F(x,y) \| + \| \ f(x) \quad 0 \ \| = \| f(y) \quad -F(x) + F(y) \|.$$

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{R}$ *— коммутативное кольцо с единицей,* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *— переменные,* $y \simeq x$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_{n+1}(x))$ *— полиномы из* $\mathbf{R}[x]$, $\delta_f = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \deg(f_i) - n$. *Положим*

$$B(x,y) = \det \begin{Vmatrix} \nabla f(x,y) \\ f(x) \end{Vmatrix} = \det \begin{Vmatrix} \nabla f(x,y) \\ f(y) \end{Vmatrix}.$$

Пусть $L(x_*) \in \mathbf{R}[x]_*$ *и аннулирует* $(f(x))_x^{\leqslant \Delta}$. *Тогда:*

1. $L(y_*).B(x,y) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant \delta_f - \Delta - 1}$.

2. $L(y_*).B(x,y) \in (f(x))_x^{\leqslant \delta_f}$.

3. $L(y_*).B(x,y)$ *определяется однозначно с точностью до слагаемого из* $(f(x))_x^{\leqslant \delta_f - \Delta - 1}$ *независимо от выбора* $\nabla f(x,y)$.

4. $L(y_*).B(x,y)$ *определяется однозначно с точностью до слагаемого из* $(f(x))_x^{\leqslant \delta_f - \Delta - 1}$ *независимо от действия* $L(x_*)$ *вне* $\mathbf{R}[x]^{\leqslant \Delta}$.

Доказательство 1, 2. В силу *2* теоремы 1 $B(x,y) \in (f(y))_{x,y}^{\leqslant \delta_f}$. Поскольку $L(y_*)$ аннулирует $(f(y))_y^{\leqslant \Delta}$, то в силу *1* леммы 3 $L(y_*).B(x,y) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant \delta_f - \Delta - 1}$.

В силу *1* теоремы 1 $B(x,y) \in (f(x))_{x,y}^{\leqslant \delta_f}$. Тогда $L(y_*).B(x,y) \in (f(x))_x^{\leqslant \delta_f}$.

Доказательство 3. В силу *3* теоремы 1 $B(x,y)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого $S(x,y) \in (f(x) \wedge f(y))_{x,y}^{\leqslant \delta_f} \subseteq (f(x) \cdot f(y))_{x,y}^{\leqslant \delta_f}$ независимо от выбора $\nabla f(x,y)$.

Поскольку $L(y_*)$ аннулирует $(f(y))_y^{\leqslant\Delta}$, то в силу *3* леммы 3 имеет место $L(y_*).S(x,y) \in \in (f(x))_x^{\leqslant\delta_f-\Delta-1}$. Следовательно, $L(y_*).B(x,y)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого $L(y_*).S(x,y)$ из $f(x))_x^{\leqslant\delta_f-\Delta-1}$ независимо от выбора $\nabla f(x,y)$.

Доказательство 4. Пусть $L'(x_*) \in \mathbf{R}[x]_*$ и имеет место $L'(x_*) \equiv L(x_*)$ на $\mathbf{R}[x]^{\leqslant\Delta}$, положим $l(x_*) = L'(x_*) - L(x_*)$, тогда $l(x_*)$ аннулирует $\mathbf{R}[x]^{\leqslant\Delta}$ и $L'(y_*).B(x,y) - L(y_*).B(x,y) = = l(y_*).B(x,y)$. Поскольку $l(y_*)$ аннулирует $\mathbf{R}[y]^{\leqslant\Delta}$ и в силу *2* теоремы 1 $B(x,y) \in (f(x))_{x,y}^{\leqslant\delta_f}$, то в силу *2* леммы 3 $l(y_*).B(x,y) \in (f(x))_x^{\leqslant\delta_f-\Delta-1}$. Следовательно, $L(y_*).B(x,y)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого $l(y_*).B(x,y)$ из $(f(x))_x^{\leqslant\delta_f-\Delta-1}$ независимо от действия $L(x_*)$ вне $\mathbf{R}[x]^{\leqslant\Delta}$.

Следствие 1. *Пусть имеют место условия теоремы 2. Тогда:*

1. Если $\Delta \geqslant \delta_f$, то $L(y_*).B(x,y) = 0$ и определяется однозначно независимо от выбора $\nabla f(x,y)$ и независимо от действия $L(x_*)$ вне $\mathbf{R}[x]^{\leqslant\Delta}$.

2. Если $\Delta = \delta_f - 1$, то $L(y_*).B(x,y) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant 0}$.

3. Если $\Delta = \delta_f - 1$ и $\deg(f_i) \geqslant 1$ для $i = 1, n+1$, то $L(y_*).B(x,y)$ определяется однозначно независимо от выбора $\nabla f(x,y)$ и независимо от действия $L(x_*)$ вне $\mathbf{R}[x]^{\leqslant\Delta}$.

Доказательство 1. Так как $\Delta \geqslant \delta_f$, то $\delta_f - \Delta - 1 < 0$. Следовательно, $\mathbf{R}[x]^{\leqslant\delta_f-\Delta-1} = \{0\}$ и $(f(x))_x^{\leqslant\delta_f-\Delta-1} = \{0\}$.

В силу *1* теоремы 2 имеет место $L(y_*).B(x,y) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant\delta_f-\Delta-1} = \{0\}$, следовательно, $L(y_*).B(x,y) = 0$.

В силу *3* теоремы $L(y_*).B(x,y)$ однозначно определяется с точностью до слагаемого из $(f(x))_x^{\leqslant\delta_f-\Delta-1} = \{0\}$ независимо от выбора $\nabla f(x,y)$, т.е. определяется однозначно. В силу *4* теоремы 1 $L(y_*).B(x,y)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого из $(f(x))_x^{\leqslant\delta_f-\Delta-1} = \{0\}$ независимо от действия $L(x_*)$ вне $\mathbf{R}[x]^{\leqslant\Delta}$, т.е. определяется однозначно.

Доказательство 2. Так как $\Delta = \delta_f - 1$, то $\delta_f - \Delta - 1 = 0$, тогда в силу *1* теоремы 2 имеет место $L(y_*).B(x,y) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant\delta_f-\Delta-1} = \mathbf{R}[x]^{\leqslant 0}$.

Доказательство 3. Так как $\Delta = \delta_f - 1$, то $\delta_f - \Delta - 1 = 0$, тогда $(f(x))_x^{\leqslant\delta_f-\Delta-1} = (f(x))_x^{\leqslant 0}$. Так как $\deg(f_i) \geqslant 1$ для $i = 1, n+1$, то $(f(x))_x^{\leqslant 0} = \{0\}$, следовательно, $(f(x))_x^{\leqslant\delta_f-\Delta-1} = \{0\}$. Далее доказательство полностью повторяет третий абзац доказательства *1* следствия.

Теорема 3. *Пусть* $\mathbf{R}$ *— коммутативное кольцо с единицей,* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *— переменные,* $y \simeq x$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_{n+1}(x))$ *— полиномы из* $\mathbf{R}[x]$, $\delta_f = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \deg(f_i) - n$. *Положим*

$$B(x,y) = \det \left\| \begin{matrix} \nabla f(x,y) \\ f(x) \end{matrix} \right\| = \det \left\| \begin{matrix} \nabla f(x,y) \\ f(y) \end{matrix} \right\|.$$

Пусть $L_1(x_*) \in \mathbf{R}[x]_*$ и аннулирует $(f(x))_x^{\leqslant\Delta_1}$, $F_2(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant d_2}$. Тогда:

1. $(L_1(y_*).B(x,y))\cdot F_2(x)$, $(L_1(y_*)\cdot F_2(y)).B(x,y) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant\delta_f+d_2-\Delta_1-1}$.

2. $(L_1(y_*).B(x,y))\cdot F_2(x)$ и $(L_1(y_*)\cdot F_2(y)).B(x,y)$ определяются однозначно с точностью до слагаемого из $(f(x))_x^{\leqslant\delta_f+d_2-\Delta_1-1}$ независимо от выбора $\nabla f(x,y)$.

3. $(L_1(y_*).B(x,y))\cdot F_2(x)$, $(L_1(y_*)\cdot F_2(y)).B(x,y) \in (f(x))_x^{\leqslant\delta_f+d_2-\Delta_1-1}$, если $F_2(x) \in (f(x))_x^{\leqslant d_2}$.

4. $(L_1(y_*).B(x,y))\cdot F_2(x)$ и $(L_1(y_*)\cdot F_2(y)).B(x,y)$ определяются однозначно с точностью до слагаемого из $(f(x))_x^{\leqslant\delta_f+d_2-\Delta_1-1}$ независимо от действия $L_1(x_*)$ вне $\mathbf{R}[x]^{\leqslant\Delta_1}$.

5. $(L_1(y_*).B(x,y))\cdot F_2(x) - (L_1(y_*)\cdot F_2(y)).B(x,y) \in (f(x))_x^{\leqslant\delta_f+d_2-\Delta_1-1}$.

Доказательство. В силу *1* леммы 2 $L_1(x_*)\cdot F_2(x)$ аннулирует $(f(x))_x^{\leqslant \Delta_1 - d_2}$, так как $L_1(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x^{\leqslant \Delta_1}$ и $F_2(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant d_2}$. В силу *1* теоремы 2 $L_1(y_*).B(x,y) \in \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant \delta_f - \Delta_1 - 1}$, так как $L_1(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x^{\leqslant \Delta_1}$.

Доказательство 1. Так как $L_1(y_*).B(x,y) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant \delta_f - \Delta_1 - 1}$ и $F_2(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant d_2}$, то имеет место $(L_1(y_*).B(x,y))\cdot F_2(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant \delta_f + d_2 - \Delta_1 - 1}$. Так как $L_1(x_*)\cdot F_2(x)$ аннулирует $(f(x))_x^{\leqslant \Delta_1 - d_2}$, то в силу *1* теоремы 2 $(L_1(y_*)\cdot F_2(y)).B(x,y) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant \delta_f - (\Delta_1 - d_2) - 1} = \mathbf{R}[x]^{\leqslant \delta_f + d_2 - \Delta_1 - 1}$.

Доказательство 2. В силу *3* теоремы 2 $L_1(y_*).B(x,y)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого из $(f(x))_x^{\leqslant \delta_f - \Delta_1 - 1}$ независимо от выбора $\nabla f(x,y)$, так как $L_1(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x^{\leqslant \Delta_1}$. Тогда $(L_1(y_*).B(x,y))\cdot F_2(x)$ определяется однозначно, с точностью до слагаемого из $(f(x))_x^{\leqslant \delta_f - \Delta_1 - 1}\cdot\mathbf{R}[x]^{\leqslant d_2} \subseteq (f(x))_x^{\leqslant \delta_f + d_2 - \Delta_1 - 1}$, так как $F_2(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant d_2}$. В силу *3* теоремы 2 $(L_1(y_*)\cdot F_2(y)).B(x,y)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого из $(f(x))_x^{\leqslant \delta_f - (\Delta_1 - d_2) - 1} = (f(x))_x^{\leqslant \delta_f + d_2 - \Delta_1 - 1}$ при неоднозначности $\nabla f(x,y)$, так как $L_1(x_*)\cdot F_2(x)$ аннулирует $(f(x))_x^{\leqslant \Delta_1 - d_2}$.

Доказательство 3. Так как $L_1(y_*).B(x,y) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant \delta_f - \Delta_1 - 1}$ и $F_2(x) \in (f(x))_x^{\leqslant d_2}$, то имеет место $(L_1(y_*).B(x,y))\cdot F_2(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant \delta_f - \Delta_1 - 1}\cdot(f(x))_x^{\leqslant d_2} \subseteq (f(x))_x^{\leqslant \delta_f + d_2 - \Delta_1 - 1}$. Так как $L_1(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x^{\leqslant \Delta_1}$ и $F_2(x) \in (f(x))_x^{\leqslant d_2}$, то в силу *3* леммы 2 $L_1(x_*)\cdot F_2(x)$ аннулирует $\mathbf{R}[x]^{\leqslant \Delta_1 - d_2}$, тогда $L_1(x_*)\cdot F_2(x) \equiv 0(x_*)$ на $\mathbf{R}[x]^{\leqslant \Delta_1 - d_2}$. Тогда в силу *4* теоремы 2 имеет место $(L_1(y_*)\cdot F_2(y)).B(x,y) - 0(y_*).B(x,y) \in (f(x))_x^{\leqslant \delta_f - (\Delta_1 - d_2) - 1} = (f(x))_x^{\leqslant \delta_f + d_2 - \Delta_1 - 1}$, так как $0(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x^{\leqslant \Delta_1 - d_2}$. Следовательно, $(L_1(y_*)\cdot F_2(y)).B(x,y) \in (f(x))_x^{\leqslant \delta_f + d_2 - \Delta_1 - 1}$.

Доказательство 4. В силу *4* теоремы 2 $(L_1(y_*).B(x,y))$ определяется однозначно, с точностью до слагаемого из $(f(x))_x^{\leqslant \delta_f - \Delta_1 - 1}$, независимо от действия $L_1(x_*)$ вне $\mathbf{R}[x]^{\leqslant \Delta_1}$. Так как $F_2(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant d_2}$, то $(L_1(y_*).B(x,y))\cdot F_2(x)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого из $(f(x))_x^{\leqslant \delta_f - \Delta_1 - 1}\cdot\mathbf{R}[x]^{\leqslant d_2} \subseteq (f(x))_x^{\leqslant \delta_f + d_2 - \Delta_1 - 1}$ независимо от действия $L_1(x_*)$ вне $\mathbf{R}[x]^{\leqslant \Delta_1}$. Так как $F_2(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant d_2}$, то в силу *2* леммы 2 функционал $L_1(x_*)\cdot F_2(x)$ определяется однозначно на $\mathbf{R}[x]^{\leqslant \Delta_1 - d_2}$ независимо от действия $L_1(x_*)$ вне $\mathbf{R}[x]^{\leqslant \Delta_1}$. Тогда в силу *4* теоремы 2 $(L_1(y_*)\cdot F_2(y)).B(x,y)$ определяется однозначно с точностью слагаемого из $(f(x))_x^{\leqslant \delta_f - (\Delta_1 - d_2) - 1} = (f(x))_x^{\leqslant \delta_f + d_2 - \Delta_1 - 1}$ независимо от действия $L_1(x_*)\cdot F_2(x)$ вне $\mathbf{R}[x]^{\leqslant \Delta_1 - d_2}$, следовательно, и независимо от действия $L_1(x_*)$ вне $\mathbf{R}[x]^{\leqslant \Delta_1}$.

Доказательство 5. В силу *4* теоремы 1 $B(x,y)\cdot(F_2(x) - F_2(y)) \in (f(x) \wedge f(y))_x^{\leqslant \delta_f + d_2} \subseteq \subseteq (f(x)\cdot f(y))_x^{\leqslant \delta_f + d_2}$. Поскольку $L_1(y_*)$ аннулирует $(f(y))_y^{\leqslant \Delta_1}$, то в силу *3* леммы 3

$$(L_1(y_*).B(x,y))\cdot F_2(x) - L_1(y_*)\cdot F_2(y).B(x,y) = L_1(y_*).B(x,y)\cdot(F_2(x) - F_2(y)) \in$$
$$\in L_1(y_*).(f(x)\cdot f(y))_x^{\leqslant \delta_f + d_2} = (f(x))_x^{\leqslant \delta_f + d_2 - \Delta_1 - 1}.$$

Теорема 4. *Пусть $\mathbf{R}$ — коммутативное кольцо с единицей, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — переменные, $y \simeq x$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_{n+1}(x))$ — полиномы из $\mathbf{R}[x]$, $\delta_f = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \deg(f_i) - n$. Положим*

$$B(x,y) = \det \begin{Vmatrix} \nabla f(x,y) \\ f(x) \end{Vmatrix} = \det \begin{Vmatrix} \nabla f(x,y) \\ f(y) \end{Vmatrix}.$$

Пусть $L_p(x_*) \in \mathbf{R}[x]_*$ и аннулирует $(f(x))_x^{\leqslant \Delta_p}$ для $p = 1, 2$. Тогда:

1. $L_1(x_*)\cdot(L_2(y_*).B(x,y))$ аннулирует $(f(x))_x^{\leqslant \Delta_1 + \Delta_2 - (\delta_f - 1)}$.

2. $L_1(x_*)\cdot(L_2(y_*).B(x,y))$ *определяется однозначно на* $\mathbf{R}[x]^{\leqslant\Delta_1+\Delta_2-(\delta_f-1)}$ *независимо от выбора* $\nabla f(x,y)$.

3. $L_1(x_*)\cdot(L_2(y_*).B(x,y))$ *определяется однозначно на* $\mathbf{R}[x]^{\leqslant\Delta_1+\Delta_2-(\delta_f-1)}$ *независимо от действия* $L_1(x_*)$ *вне* $\mathbf{R}[x]^{\leqslant\Delta_1}$ *и действия* $L_2(x_*)$ *вне* $\mathbf{R}[x]^{\leqslant\Delta_2}$.

4. $L_1(x_*)\cdot(L_2(y_*).B(x,y)) \equiv L_2(x_*)\cdot(L_1(y_*).B(x,y))$ *на* $\mathbf{R}[x]^{\leqslant\Delta_1+\Delta_2-(\delta_f-1)}$.

Доказательство 1. Так как $L_2(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x^{\leqslant\Delta_2}$, то в силу *1* теоремы 2 полином $L_2(y_*).B(x,y) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant\delta_f-\Delta_2-1}$. Так как $L_1(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x^{\leqslant\Delta_1}$, то в силу *1* леммы 2 $L_1(x_*)\cdot(L_2(y_*).B(x,y))$ аннулирует $(f(x))_x^{\leqslant\Delta_1-(\delta_f-\Delta_2-1)} = (f(x))_x^{\leqslant\Delta_1+\Delta_2-(\delta_f-1)}$.

Доказательство 2. Так как $L_2(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x^{\leqslant\Delta_2}$, то в силу *3* теоремы 2 полином $L_2(y_*).B(x,y)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого $S(x)$ из $(f(x))_x^{\leqslant\delta_f-\Delta_2-1}$ независимо от выбора $\nabla f(x,y)$. Поскольку $L_1(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x^{\leqslant\Delta_1}$, то в силу *3* леммы 2 $L_1(x_*)\cdot S(x)$ аннулирует $\mathbf{R}[x]^{\leqslant\Delta_1-(\delta_f-\Delta_2-1)} = \mathbf{R}[x]^{\leqslant\Delta_1+\Delta_2-(\delta_f-1)}$. Тогда функционал $L_1(x_*)\cdot(L_2(y_*).B(x,y))$ определяется однозначно с точностью до слагаемого $L_1(x_*)\cdot S(x)$, аннулирующего $\mathbf{R}[x]^{\leqslant\Delta_1+\Delta_2-(\delta_f-1)}$, следовательно, $L_1(x_*)\cdot(L_2(y_*).B(x,y))$ определяется однозначно на $\mathbf{R}[x]^{\leqslant\Delta_1+\Delta_2-(\delta_f-1)}$ независимо от выбора $\nabla f(x,y)$.

Доказательство 3. Так как $L_2(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x^{\leqslant\Delta_2}$, то в силу *4* теоремы 2 полином $L_2(y_*).B(x,y)$ определяется однозначно с точностью до слагаемого $S(x)$ из $(f(x))_x^{\leqslant\delta_f-\Delta_2-1}$ независимо от действия $L_2(x_*)$ вне $\mathbf{R}[x]^{\leqslant\Delta_2}$. Поскольку $L_1(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x^{\leqslant\Delta_1}$, то в силу *3* леммы 2 $L_1(x_*)\cdot S(x)$ аннулирует $\mathbf{R}[x]^{\leqslant\Delta_1-(\delta_f-\Delta_2-1)} = \mathbf{R}[x]^{\leqslant\Delta_1+\Delta_2-(\delta_f-1)}$. Тогда $L_1(x_*)\cdot(L_2(y_*).B(x,y))$ определяется однозначно с точностью до слагаемого $L_1(x_*)\cdot S(x)$, аннулирующего $\mathbf{R}[x]^{\leqslant\Delta_1+\Delta_2-(\delta_f-1)}$, следовательно, функционал $L_1(x_*)\cdot(L_2(y_*).B(x,y))$ определяется однозначно на $\mathbf{R}[x]^{\leqslant\Delta_1+\Delta_2-(\delta_f-1)}$ независимо от действия $L_2(x_*)$ вне $\mathbf{R}[x]^{\leqslant\Delta_2}$.

Так как $L_2(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x^{\leqslant\Delta_2}$, то в силу *1* теоремы 2 $L_2(y_*).B(x,y) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant\delta_f-\Delta_2-1}$. Тогда в силу *2* леммы 2 функционал $L_1(x_*)\cdot(L_2(y_*).B(x,y))$ определяется однозначно на $\mathbf{R}[x]^{\leqslant\Delta_1-(\delta_f-\Delta_2-1)} = \mathbf{R}[x]^{\leqslant\Delta_1+\Delta_2-(\delta_f-1)}$ независимо от действия $L_1(x_*)$ вне $\mathbf{R}[x]^{\leqslant\Delta_1}$.

Доказательство 4. Пусть $F_2(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant\Delta_1+\Delta_2-(\delta_f-1)}$. Так как $L_1(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x^{\leqslant\Delta_1}$, то в силу *5* теоремы 3

$$L_1(y_*).B(x,y)\cdot F_2(x) - L_1(y_*).B(x,y)\cdot F_2(y) \in (f(x))_x^{\leqslant\delta_f+d_2-\Delta_1-1} = (f(x))_x^{\leqslant\Delta_2},$$

где $d_2 = \Delta_1+\Delta_2-(\delta_f-1)$. Так как $L_2(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x^{\leqslant\Delta_2}$, то

$$L_2(x_*).L_1(y_*).B(x,y)\cdot F_2(x) = L_2(x_*).L_1(y_*).B(x,y)\cdot F_2(y).$$

Тогда

$$\begin{aligned}L_2(x_*)\cdot(L_1(y_*).B(x,y)).F_2(x) &= L_2(x_*).L_1(y_*).B(x,y)\cdot F_2(x) = \\ &= L_2(x_*).L_1(y_*).B(x,y)\cdot F_2(y) = L_1(y_*).L_2(x_*).B(x,y)\cdot F_2(y) = \\ &= L_1(x_*).L_2(y_*).B(y,x)\cdot F_2(x) = L_1(x_*)\cdot(L_2(y_*).B(y,x)).F_2(x).\end{aligned}$$

Тогда в силу произвольности $F_2(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant\Delta_1+\Delta_2-(\delta_f-1)}$ имеет место

$$L_2(x_*)\cdot(L_1(y_*).B(x,y)) \equiv L_1(x_*)\cdot(L_2(y_*).B(y,x)) \qquad \text{на} \qquad \mathbf{R}[x]^{\leqslant\Delta_1+\Delta_2-(\delta_f-1)}.$$

В силу *4* теоремы 1 $B'(x,y) = B(y,x)$ является безутианом полиномов $f(x)$ для матрицы их разностных производных $\nabla' f(x,y) = \nabla f(y,x)$. Тогда в силу *2* теоремы

$$L_1(x_*)\cdot(L_2(y_*).B(y,x)) \equiv L_1(x_*)\cdot(L_2(y_*).B(x,y)) \qquad \text{на} \qquad \mathbf{R}[x]^{\leqslant \Delta_1+\Delta_2-(\delta_f-1)}.$$

Следовательно,

$$L_2(x_*)\cdot(L_1(y_*).B(x,y)) \equiv L_1(x_*)\cdot(L_2(y_*).B(x,y)) \qquad \text{на} \qquad \mathbf{R}[x]^{\leqslant \Delta_1+\Delta_2-(\delta_f-1)}.$$

1. *Seifullin T. R.* Extension of bounded root functionals of a system of polynomial equations // Доп. НАН України. – 2002. – No 7. – С. 35–42.
2. *Сейфуллин Т. Р.* Продолжение корневых функционалов системы полиномиальных уравнений и редукция полиномов по модулю ее идеала // Там само. – 2003. – № 7. – С. 19–27.

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 14.01.2010

T. R. Seifullin

A Bezoutian and bounded root functionals of a system of polynomials

A root functional (element of Macaulay's inverse system) is a linear functional that is defined on a polynomial ring and annuls the ideal of polynomials. A bounded root functional is a functional that annuls a d-th component of the ideal in its some semigrading. We study the action of bounded root functionals on a multivariate Bezoutian.