ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

10 • 2010

*ЕНЕРГЕТИКА*

УДК 621.3(075.8)



Член-корреспондент НАН Украины **А. Е. Божко**

# Об особенностях в законе Фарадея и энергии электромагнитного поля при полигармонических электродвижущих силах

*Наведено формули закону Фарадея та енергії для електроланок з полігармонічними вхідними напругами.*

Известно [1, 2], что электродвижущая сила (ЭДС) — $U$, индуктированная на контуре $C$, находящемся в электрическом поле с напряженностью $\overline{E}$, может быть выражена в виде

$$\overline{U} = \int\limits_C \overline{Edl}. \tag{1}$$

По теореме Стокса [3],

$$\int\limits_C \overline{Edl} = \int\limits_S \operatorname{rot} \overline{EdS}, \tag{2}$$

где $S$ — поверхность, опирающаяся на контур $C$.

Согласно закону Фарадея, с учетом (2)

$$\int\limits_C \overline{Edl} = \int\limits_S \operatorname{rot} \overline{EdS} = -\int\limits_S \frac{d\overline{B}}{dt} dS, \tag{3}$$

где $\overline{B}$ — вектор магнитной индукции в электромагнитном поле.

Из (3), взяв одни и те же поверхности в левой и правой частях, можно получить

$$\operatorname{rot} \overline{E} = -\frac{d\overline{B}}{dt}. \tag{4}$$

Выражения (2)–(4) относятся к случаю одночастотного характера $\overline{U}$. В электротехнической практике встречаются задачи, когда

$$\overline{U}_\Sigma(t) = \overline{\sum_{\alpha=1}^{n}} U_{a\alpha} \sin(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha). \tag{5}$$

Здесь $U_{a\alpha}$ — амплитуда; $\omega_\alpha$ — круговая частота $\alpha$-й гармонической составляющей; $\phi_\alpha$ — начальная фаза (угол) $\alpha$-й гармоники; $t$ — время.

В (5) под $\overline{\sum\limits_{\alpha=1}^{n}}$ подразумевается векторная сумма, т. е.

$$\overline{U}_\Sigma = \overline{\sum_{\alpha=1}^{n}} \overline{U}_\alpha.$$

Будем считать, что в нашем распоряжении имеется электроцепь, состоящая из активного ($R$) и индуктивного ($x_L$) сопротивлений. На входе этой электроцепи приложена полигармоническая (многочастотная) ЭДС в виде (5)

$$\overline{U}_\Sigma = \overline{\sum_{\alpha=1}^{n}} \overline{U}_\alpha = \int\limits_C \overline{\sum_{\alpha=1}^{n}} \overline{E}_\alpha dl = \overline{\sum_{\alpha=1}^{n}} \int\limits_C \overline{E}_\alpha dl = \overline{\sum_{\alpha=1}^{n}} \int\limits_S \operatorname{rot} \overline{E}_\alpha dS.$$

Каждая гармоника $\int\limits_S \operatorname{rot} \overline{E}_\alpha dS$ пропорциональна изменению $S$ магнитного потока $\Phi = BS$ во времени (см. (3)). Поэтому справедливо соотношение

$$\overline{\sum_{\alpha=1}^{n}} \int\limits_S \operatorname{rot} \overline{E}_\alpha = -\overline{\sum_{\alpha=1}^{n}} \frac{\partial \overline{B}_\alpha}{\partial t}. \tag{6}$$

Выражение (6) отражает закон Фарадея в дифференциальной форме для случая приложения ко входу электроцепи с индуктивностью полигармонической ЭДС вида (1). Выражение (6) представим в виде проекций векторов $\overline{E}_\alpha$ и $\partial \overline{B}_\alpha/\partial t$ на оси координат $x$, $y$, $z$, соответственно.

Известно [3], что

$$\operatorname{rot} \overline{a} = i\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right), \tag{7}$$

где $i$, $j$, $k$ — орты осей $x$, $y$, $z$, а $\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)$, $\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)$ — соответственно, проекции вектора $\operatorname{rot} \overline{a}$ на оси $x$, $y$, $z$. Применим (7) к (6), получим

$$\begin{aligned} i\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial E_{\alpha z}}{\partial y} - \frac{\partial E_{\alpha y}}{\partial z}\right) + j\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial E_{\alpha x}}{\partial z} - \frac{\partial E_{\alpha z}}{\partial x}\right) + k\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial E_{\alpha y}}{\partial x} - \frac{\partial E_{\alpha x}}{\partial y}\right) = \\ = i\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial B_{\alpha z}}{\partial t} + j\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial B_{\alpha y}}{\partial t} + k\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial E_{\alpha x}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{8}$$

Из приведенных выражений ясно, что многочастотная ЭДС $\overline{U}_\Sigma(t)$ обусловливает, в свою очередь, суммарную производную по времени магнитной индукции в электроцепи.

Следует заметить, что в данных выражениях учитывался знак согласованного включения составляющих $\overline{U}_\alpha(t)$, $\alpha = \overline{1,n}$. Закон Фарадея, являясь обобщающим, справедлив и для встречных включений $\overline{U}_\alpha(t)$. В этом случае изменяются знаки в соответствующих левых и правых частях выражений (7), (8).

Далее рассмотрим энергию электроцепи при ЭДС, описываемой выражением (5).

Известно [2], что удельная энергия электромагнитного поля

$$W_{\text{ЭМ}} = W_{\text{Э}} + W_{\text{М}} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}, \tag{9}$$

удельная мощность тепловых потерь

$$P = \frac{\delta^2}{\gamma}, \tag{10}$$

удельная мощность сторонних источников

$$P_{\text{ист}} = \overline{\delta} E_{\text{стор}}. \tag{11}$$

Формулы (9)–(11) справедливы как для стационарных полей, так и для мгновенных значений векторов электромагнитного поля. Эти формулы соответствуют одной ЭДС $\overline{U}_\alpha$ на входе электроцепи. Для полигармонической ЭДС формулы удельных энергий будут следующими:

$$W_{\text{ЭМ}\Sigma} = W_{\text{Э}\Sigma} + W_{\text{М}\Sigma} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\left(\sum_{\alpha=1}^{n} E_\alpha\right)^2 + \frac{\mu\mu_0}{2}\left(\sum_{\alpha=1}^{n} H_\alpha\right)^2, \tag{12}$$

$$P_\Sigma = \frac{1}{\gamma}\sum_{\alpha=1}^{n}\delta_\alpha^2 + \Delta P. \tag{13}$$

Формулу (11) можно оставить прежней или будем считать, что сторонние источники отсутствуют. Тогда $P_{\text{и. стор}} = 0$. В выражении (13) поставлено слагаемое $\Delta P$. Это связано с тем, что в (12) при возведении в квадрат сумм $\left(\sum\limits_{\alpha=1}^{n} E_\alpha\right)^2$, $\left(\sum\limits_{\alpha=1}^{n} H_\alpha\right)^2$, кроме собственных энергий, будут энергии взаимодействия между гармоническими составляющими $E_\alpha$, $H_\alpha$, $\alpha = \overline{1,n}$, и $E_m$, $H_m$, $m = \overline{1,n}$, $\alpha \neq m$, которые создадут дополнительные токи в электроцепи и соответственно дополнительные плотности токов $\delta_{\alpha m}$. Чтобы убедится в этом, раскроем (12), возведя в квадрат составляющие левой части (12). В результате получим

$$W_{\text{ЭМ}\Sigma} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\left[\left(\sum_{\alpha=1}^{n} E_\alpha\right)^2 + 2\sum_{\substack{\alpha=1\\ m=1\\ \alpha\neq m}}^{C_n^2} E_\alpha E_m\right] + \frac{\mu\mu_0}{2}\left[\left(\sum_{\alpha=1}^{n} H_\alpha\right)^2 + 2\sum_{\substack{\alpha=1\\ m=1\\ \alpha\neq m}}^{C_n^2} H_\alpha H_m\right], \tag{14}$$

откуда видно, что выражения $2\sum\limits_{\substack{\alpha=1\\ m=1\\ \alpha\neq m}}^{C_n^2} E_\alpha E_m$, $2\sum\limits_{\substack{\alpha=1\\ m=1\\ \alpha\neq m}}^{C_n^2} H_\alpha H_m$ определяют в (13) величину $\Delta P$. Заметим, что $2\sum\limits_{\substack{\alpha=1\\ m=1\\ \alpha\neq m}}^{C_n^2} H_\alpha H_m$ может фигурировать в законе полного тока [1] и тогда понятно, что напряженности магнитного поля $H_\alpha$, $H_m$, $\alpha \neq m$ обусловливают в электроцепи дополнительные токи.

Таким образом, в результате данного исследования показано, что при полигармоническом напряжении на входе электроцепи закон Фарадея содержит в себе векторные суммы $\operatorname{rot} \overline{E}_\alpha$ и $\partial \overline{B}_\alpha / \partial t$, $\alpha = \overline{1, n}$. Здесь представлен закон Фарадея с учетом векторных сумм в проекциях на координатные оси $x$, $y$, $z$. Также показано, что удельная энергия электромагнитного поля электроцепи с полигармоническим входным напряжением равна не только собственным электрической и магнитной энергиям $H_0$, но и взаимным энергиям $\varepsilon\varepsilon_0 E_\alpha E_m$, $\mu\mu_0 H_\alpha H_m$, $\alpha = 1, \overline{m}$, которые обусловливают появление дополнительных токов в электроцепи.


1. *Бессонов Л. А.* Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. – Москва: Высш. шк., 1978. – 232 с.
2. *Даревский А. И., Кухаркин Е. С.* Теоретические основы электротехники. Ч. II. Основы электромагнитного поля / Под ред. проф. П. А. Ионкина. – Москва: Высш. шк., 1965. – 284 с.
3. *Андре Анго.* Математика для электро- и радиоинженеров. – Москва: Наука, 1965. – 780 с.



*Институт проблем машиностроения*
*им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков*



*Поступило в редакцию 25.05.2009*



Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. E. Bozhko**


**On specific features in the Faraday law and the electromagnetic field energy in the presence of polyharmonic electromotive forces**


*The formulas for the Faraday law and the energy of electrocircuits in the presence of polyharmonic input voltages are given.*