

Академік НАН України **З. Т. Назарчук, А. Т. Синявський**

Розв'язання оберненої задачі дифракції через реконструкцію матриці розсіювання в обмеженому частотному діапазоні

Запропоновано метод визначення проникності та товщини шарів плоскошаруватого діелектрика за відомими значеннями коефіцієнта відбиття плоскої електромагнітної хвилі. В основу методу покладено реконструкцію частотної залежності всіх елементів матриці розсіювання в обмеженому діапазоні частот. Високу точність обчислення досягнуто за рахунок ідентифікації спектральних коефіцієнтів, які виділено з елементів матриці розсіювання та описано скінченним рядом незатухаючих комплексних експонент.

Математичною основою для створення нових методів неруйнівного контролю та дистанційного зондування є теорія обернених задач [1, 2]. Зокрема, визначення електричних і геометричних параметрів об'єктів здійснюють непрямими методами на підставі розв'язку обернених задач розсіювання для системи рівнянь Максвелла за результатами багаточастотних електромагнітних вимірювань. Недоліком відомих методів розв'язання одновимірних обернених задач за допомогою інтегральних рівнянь типу Вольтерра [3–5] або за алгоритмом пошарового зрізання [6] є необхідність оперування з безмежними послідовностями дельта-функцій. Оптимізаційні методи [7] втрачають свою ефективність при великій кількості невідомих параметрів досліджуваної структури. Тому пошук нових математичних підходів та конструктивних алгоритмів для практики неруйнівного контролю та діагностики залишається актуальним і є предметом даної роботи.

Особливості формулювання оберненої задачі. Для плоскошаруватих діелектричних структур задачу розсіювання можна звести до одновимірної, де напруженість поля e у довільній точці z задовольняє хвильове рівняння

$$\frac{d^2 e(z)}{dz^2} + \omega^2 \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon(z) e(z) = 0. \quad (1)$$

Тут ε_0 та μ_0 — діелектрична та магнітна проникність вакууму.

Вважатимемо, що матеріал кожного шару структури є однорідним діелектриком без втрат. Тоді функція $\varepsilon(z)$ є кусково-постійною, а магнітна проникність $\mu = 1$. За таких умов розв'язок рівняння (1) має вигляд

$$e(z) = a_j(\omega) \exp(-ik_j(z - d_j)) + b_j(\omega) \exp(ik_j(z - d_j)), \quad (2)$$

де $k_j = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_j}$ — хвильове число в j -му шарі з діелектричною проникністю ε_j та товщиною d_j ; $j = 0, (N - 1)$ — номер шару в структурі з N таких смуг; $a_j(\omega)$ та $b_j(\omega)$ — коефіцієнти, що визначають співвідношення між хвилями частоти ω , які поширюються у протилежних напрямках.

З граничних умов задачі, які є наслідком вимоги неперервності тангенціальних складових електромагнітного поля на границях розділу діелектрика, можна встановити взаємозв'язок для коефіцієнтів $a_j(\omega)$ та $b_j(\omega)$ у різних шарах структури. Зокрема, для вільного

простору, що оточує багатошарову структуру ($j = 0$ та $j = N + 1$) і характеризується хвильовим числом $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$, такий взаємозв'язок має вигляд:

$$\begin{bmatrix} a_0(\omega) \\ b_0(\omega) \end{bmatrix} = \prod_{j=0}^N \left(\frac{1}{2\rho_{j+1}} \begin{bmatrix} (\rho_{j+1} + \rho_j) \exp(-ik_{j+1}d_{j+1}) & (\rho_{j+1} - \rho_j) \exp(ik_{j+1}d_{j+1}) \\ (\rho_{j+1} - \rho_j) \exp(-ik_{j+1}d_{j+1}) & (\rho_{j+1} + \rho_j) \exp(ik_{j+1}d_{j+1}) \end{bmatrix} \right) \times \\ \times \begin{bmatrix} a_{N+1}(\omega) \\ b_{N+1}(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0(\omega) & B_0(\omega) \\ B_0(-\omega) & A_0(-\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{N+1}(\omega) \\ b_{N+1}(\omega) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

де $\rho_j = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0\varepsilon_j}$ — характеристичний імпеданс; $A_0(\omega)$ та $B_0(\omega)$ — спектральні коефіцієнти всієї структури, які можна виразити через правосторонній $R(\omega)$ і лівосторонній $L(\omega)$ коефіцієнти відбиття, а також через коефіцієнт проходження $T(\omega)$, що складають матрицю розсіювання:

$$\mathbf{S}(\omega) := \begin{bmatrix} R(\omega) & T(\omega) \\ T(\omega) & L(\omega) \end{bmatrix} = \frac{1}{A_0(\omega)} \begin{bmatrix} -B_0(\omega) & 1 \\ 1 & B_0(-\omega) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Добуток матриць у виразі (4) свідчить, що спектральні коефіцієнти $A_0(\omega) = 1/T(\omega)$ та $B_0(\omega) = \overline{L(\omega)}/T(\omega)$ (символ $\mathbf{S}(\omega) = \mathbf{S}(-\omega)$ означає комплексно спряжену величину до $\mathbf{S}(\omega)$) є скінченними сумами комплексних експонент, або скінченними тригонометричними рядами.

В загальному випадку спектральні коефіцієнти $A_j(\omega)$ та $B_j(\omega)$ для плоскошаруватої діелектричної структури без урахування впливу її перших j шарів матимуть вигляд:

$$A_j(\omega) := \sum_{p=1}^{M_j} \alpha_j(p) \exp(i\nu_j(p)\omega); \quad (5)$$

$$B_j(\omega) := \sum_{p=1}^{M_j} \beta_j(p) \exp(i\nu_j(p)\omega), \quad (6)$$

де $\alpha_j(p)$ та $\beta_j(p)$ — дійсні коефіцієнти скінченних сум; $\nu_j(p)$ — дійсні коефіцієнти при аргументах комплексних експонент; M_j — деякий параметр, що залежить від кількості шарів у структурі та наявності у ній шарів із однаковою оптичною довжиною $l_j = d_j\sqrt{\varepsilon_j}$.

У даній роботі обернену задачу дифракції сформульовано як задачу реконструкції кусково-постійної функції $\varepsilon(z)$ для багатошарового плоского діелектрика без втрат за коефіцієнтом відбиття $L(\omega)$ нормально падаючої плоскої електромагнітної хвилі, комплексні значення якого задано дискретно на обмеженому діапазоні частот із певною випадковою похибкою, що властива результатам експериментальних вимірювань. Тому метою роботи є встановлення всіх елементів матриці розсіювання за коефіцієнтом відбиття $L(\omega)$, що отримують із експерименту, та розв'язання оберненої задачі дифракції на основі параметризованого подання спектральних коефіцієнтів (5), (6), які виділено з матриці розсіювання.

Розв'язання оберненої задачі. Ідентифікація параметрів M_0 , $\alpha_0(p)$, $\beta_0(p)$ та $\nu_0(p)$, $p = \overline{1, M_0}$, у скінченних рядах (5), (6) за значеннями спектральних коефіцієнтів $A_0(\omega) = 1/T(\omega)$ та $B_0(\omega) = \overline{L(\omega)}/T(\omega)$, заданих на обмеженому діапазоні частот для дискретної множини точок $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{N_m}$ із кроком $\Delta\omega$, є типовою задачею спектрального аналізу [8, 9]. Її розв'язок можна одержати або детермінованим підходом за методом пучка

матриці [8], або статистичним підходом [9], беручи до уваги наявність випадкової складової у вимірних даних елементів матриці розсіювання. Зауважимо, що перетворення Фур'є має меншу точність порівняно з методами високороздільного спектрального аналізу для оцінки параметрів моделі (5) та (6).

Розв'язок оберненої задачі полягає у визначенні діелектричної проникності ε_j та товщини d_j кожного з шарів структури за оцінками коефіцієнтами \widehat{M}_0 , $\widehat{\alpha}_0(p)$, $\widehat{\beta}_0(p)$ та $\widehat{\nu}_0(p)$. Враховуючи рекурентний характер (3) у взаємозв'язку коефіцієнтів розв'язку прямої задачі, параметри шарів можна також знайти рекурентно. Для цього у кожному циклі процедури визначаємо діелектричну проникність та товщину зовнішнього шару, а також реконструюємо параметри спектральних коефіцієнтів (5) та (6) без врахування цього шару з метою подальшого аналізу усіченої структури. Процес обчислення рекурентно повторюємо, поки $M_j > 1$. При цьому розв'язок задачі базується на двох твердженнях.

Твердження 1. *Значення дійсних коефіцієнтів при експонентах з мінімальним $\nu_0(1)$ та максимальним $\nu_0(M_j)$ значеннями аргументів в сумах (5), (6) співвідносяться як*

$$\frac{\beta_j(1)}{\alpha_j(1)} = \frac{\alpha_j(M_j)}{\beta_j(M_j)} = \frac{(\rho_{j+1} - \rho_j)}{(\rho_{j+1} + \rho_j)}. \quad (7)$$

Обґрунтувати це твердження можна безпосередньо на основі виразу (3). Як наслідок, діелектричну проникність зовнішнього шару $\widehat{\varepsilon}_{j+1} = \mu_0/(\varepsilon_0 \widehat{\rho}_{j+1}^2)$ для усіченої структури з $(N - j)$ шарів можна знайти за імпедансом ρ_{j+1} , усереднюючи його оцінку за двома значеннями, які отримано згідно з тотожностями (7):

$$\widehat{\rho}_{j+1} = \left(\frac{\widehat{\alpha}_j(1) + \widehat{\beta}_j(1)}{\widehat{\alpha}_j(1) - \widehat{\beta}_j(1)} + \frac{\widehat{\beta}_j(M_j) + \widehat{\alpha}_j(M_j)}{\widehat{\beta}_j(M_j) - \widehat{\alpha}_j(M_j)} \right) \frac{\widehat{\rho}_j}{2}. \quad (8)$$

Твердження 2 . *Якщо для впорядкованих відносно $\nu_j(1) < \dots < \nu_j(p) < \dots < \nu_j(M_j)$, $p = \overline{1, M_j}$, значень коефіцієнтів $\alpha_j(p)$ і $\beta_j(p)$, елементи векторів $\alpha'_j = [\alpha'_j(1), \alpha'_j(2), \dots, \alpha'_j(M_j)]^T$ та $\beta'_j = [\beta'_j(1), \beta'_j(2), \dots, \beta'_j(M_j)]^T$ ($[]^T$ – транспонування матриці) при $q = \overline{1, M_j}$ та $j = \overline{0, (N - 1)}$ визначено формулою*

$$\begin{bmatrix} \alpha'_{j+1}(q) \\ \beta'_{j+1}(q) \end{bmatrix} = \frac{1}{2\rho_j} \begin{bmatrix} (\rho_{j+1} + \rho_j) & -(\rho_{j+1} - \rho_j) \\ -(\rho_{j+1} - \rho_j) & (\rho_{j+1} + \rho_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_j(q) \\ \beta_j(q) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

то в кожному з векторів α'_{j+1} та β'_{j+1} буде однакова кількість M_{j+1} ненульових елементів, і ця кількість на загал є меншою, ніж M_j : $M_j > M_{j+1}$.

Нехай $F := \{f_1, f_2, \dots, f_{M_{j+1}}\}$ є множиною індексів ненульових коефіцієнтів $\alpha'_{j+1}(q) \neq 0$, $q \in F$ у векторі α'_{j+1} , а $G := \{g_1, g_2, \dots, g_{M_{j+1}}\}$ – множина, для якої $\beta'_{j+1}(q) \neq 0$, $q \in G$, у векторі β'_{j+1} . Тоді оптична товщина зовнішнього шару в усіченій структурі, що складається з $(N - j)$ шарів, дорівнює

$$\widehat{l}_{j+1} = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} |\widehat{\nu}_j(f_q) - \widehat{\nu}_j(g_q)|, \quad \forall q, q \in [1, M_j]. \quad (10)$$

Довести справедливість цього твердження можна на основі властивостей обернених матриць у виразі (2). Варто відзначити, що наявні похибки в оцінках $\widehat{\rho}_{j+1}$ та $\widehat{\rho}_j$, а також $\widehat{\alpha}_j(p)$ та $\widehat{\beta}_j(q)$ спричиняють відмінність від нуля коефіцієнтів $\alpha'_{j+1}(q)$ та $\beta'_{j+1}(q)$, які насправді

є нульовими. Тому ідентифікацію множин ненульових індексів F та G необхідно здійснювати, виходячи з умови перевищення коефіцієнтами певного порогу Σ_j : $|\alpha'_{j+1}(q)| > \Sigma_j$ та $|\beta'_{j+1}(q)| > \Sigma_j$. Значення порогу Σ_j можна вибрати у відповідності до значення середньоквадратичного відхилення σ_{j+1} випадкової складової у коефіцієнтах α'_{j+1} та β'_{j+1} на кожному з циклів рекурентної процедури. Статистичний аналіз вказує на прийнятність значення порогу $\Sigma_j \approx 1,5\sigma_{j+1}$, де

$$\sigma_{j+1}^2 = \frac{\sigma_j^2(\rho_{j+1}^2 + \rho_j^2)}{2\rho_j^2}. \quad (11)$$

Початкове значення наближено можна оцінити як $\sigma_0^2 \approx \sigma_S^2/N_m$, де σ_S^2 – дисперсія випадкової складової у вимірних дискретних значеннях коефіцієнтів матриці розсіювання.

Як наслідок, оцінку товщини шару з номером $(j+1)$ отримано усередненням результату обчислення для всіх пар $\hat{\nu}_j(f_q)$ та $\hat{\nu}_j(g_q)$, $q = \overline{1, M_{j+1}}$:

$$\hat{d}_{j+1} = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\hat{\varepsilon}_{j+1}M_{j+1}}} \sum_{q=1}^{M_{j+1}} |\hat{\nu}_j(f_q) - \hat{\nu}_j(g_q)|. \quad (12)$$

Для повторення рекурентної процедури встановлюємо параметри моделі спектральних коефіцієнтів для усіченої структури $\alpha_{j+1}(p) = \alpha'_{j+1}(f_p)$, $\beta_{j+1}(p) = \beta'_{j+1}(f_p)$, а також $\nu_{j+1}(p) = \nu_j(f_p) + \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}l_{j+1}$ або $\nu_{j+1}(p) = \nu_j(g_p) - \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}l_{j+1}$.

Реконструкція елементів матриці розсіювання. На практиці одночасне визначення комплексних значень коефіцієнтів відбиття та пропускання потребує залучення складного вимірювального обладнання і прецизійних методів його калібрування. У деяких випадках вимірювання коефіцієнта пропускання є принципово неможливим. Тому важливим є визначення елементів всієї матриці розсіювання (коефіцієнтів відбиття та пропускання) на основі вимірних значень розсіяного поля лише з однієї сторони від досліджуваної структури.

Використовуючи властивість $A_0(\omega)\overline{A_0(\omega)} - B_0(\omega)\overline{B_0(\omega)} = 1$ спектральних коефіцієнтів, матрицю розсіювання з точністю до знака можна визначити через коефіцієнт відбиття $L(\omega)$ та деяку чисто уявну функцію $\delta(\omega)$:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} R(\omega) & T(\omega) \\ T(\omega) & L(\omega) \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} -\overline{L(\omega)} \exp(-\delta(\omega)) & \sqrt{1 - |L(\omega)|^2} \exp\left(\frac{-\delta(\omega)}{2}\right) \\ \sqrt{1 - |L(\omega)|^2} \exp\left(\frac{-\delta(\omega)}{2}\right) & L(\omega) \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Отже, сформульовану задачу реконструкції елементів матриці розсіювання можна звести до визначення невідомої функції $\delta(\omega)$, яка встановлюється відношенням $\exp(\delta(\omega)) := \overline{T(\omega)}/T(\omega)$. Пропонуються два підходи до обчислення цієї функції $\delta(\omega)$ за дискретно визначеними даними про коефіцієнт відбиття $L(\omega)$, вимірний в обмеженому діапазоні частот. У першому з них запропоновано вносити надлишкову інформацію в задачу шляхом проведення додаткового вимірювання. При цьому коефіцієнт відбиття $L(\omega)$ визначаємо для шаруватої структури, яка знаходиться у вільному просторі. Друге вимірювання спрямоване на визначення коефіцієнта відбиття $\tilde{L}(\omega)$ цієї ж структури за умови повного відбиття у півпросторі, розташованому справа від структури. Це забезпечується встановленням підкладки з безмежною провідністю. Задовольняючи граничну умову на ідеально провідній

поверхні $\tilde{a}_{N+1}(\omega) = -\tilde{b}_{N+1}(\omega)$, бачимо, що відношення амплітуд хвиль $\tilde{a}_0(\omega)$ та $\tilde{b}_0(\omega)$, які поширюються у протилежних напрямках, визначає коефіцієнт відбиття $\tilde{L}(\omega)$:

$$\tilde{L}(\omega) := \frac{\tilde{b}_0(\omega)}{\tilde{a}_0(\omega)} = \frac{B_0(-\omega) - A_0(-\omega)}{-B_0(\omega) + A_0(\omega)}. \quad (14)$$

Тоді шукану функцію $\delta(\omega)$ отримуємо розгортанням фази аргументу функції комплексної змінної з областю значень на колі одиничного радіуса:

$$\delta(\omega) = i \cdot \text{unwgr} \left[\arg \left(\frac{\overline{L(\omega)} \tilde{L}(\omega) - 1}{\tilde{L}(\omega) - L(\omega)} \right) \right], \quad (15)$$

де $\text{unwgr}[f]: [-\pi, \pi] \rightarrow C$ є функцією розгортання фази [10].

Другий підхід до знаходження матриці розсіювання зводиться до задачі реконструкції фази за модулем аналітичної функції [11]. З тотожності (5) видно, що $A_0(\omega) \exp(i\omega v_0(M_0))$ є аналітичною функцією без нулів у верхній півплощині. Таку функцію можна реконструювати за її модулем $|A_0(\omega)| = 1/\sqrt{1 - |L(\omega)|^2}$ згідно з виразом:

$$A_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 - |L(\omega)|^2}} \exp \left(\frac{i}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log |A_0(\omega')|}{\omega - \omega'} d\omega' + i\omega v_0(M_0) \right), \quad (16)$$

де $P \int d\omega$ — головне значення інтеграла. Звідси шукану функцію можна виразити як

$$\delta(\omega) = \frac{i}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\vartheta_n \omega) + i\omega v_0(M_0), \quad (17)$$

де коефіцієнти c_n та ϑ_n є коефіцієнтами безмежного збіжного тригонометричного ряду, яким записано логарифм у підінтегральній функції (16) $\log(A_0(\omega')A_0(-\omega')) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(\vartheta_n \omega)$.

При цьому шукану функцію $\delta(\omega)$ можна обчислити з контрольованою точністю, беручи до уваги те, що добуток $A_0(\omega)A_0(-\omega)$ є скінченним рядом комплексних експонент і його коефіцієнти визначають значення всіх коефіцієнтів c_n та ϑ_n .

Результати чисельного експерименту. Результати моделювання розсіювання плоскої хвилі на діелектричних шаруватих структурах та розв'язання відповідної оберненої задачі підтверджують справедливість розроблених теоретичних положень та свідчать про дієвість підходу до непрямого визначення характеристик таких структур. Як видно з рис. 1, де подано порівняння результатів реконструкції чотиришарової структури запропонованим методом (штрихова лінія) та методом пошарового зрізання [6] (суцільна лінія), точність нового методу є істотно вищою. Реконструкцію матриці розсіювання та розв'язання оберненої задачі здійснено за коефіцієнтами відбиття $L(\omega)$ та $\tilde{L}(\omega)$, заданими у смузі частот від 20 до 70 ГГц з кроком 50 МГц, а у вихідні дані введено випадкову складову з дисперсією $\sigma^2 = 0,013^2$.

Запропоноване тут трактування вихідних даних спростило розв'язання оберненої задачі, дозволивши уникнути необхідності знаходження розв'язку інтегральних рівнянь типу Вольтерра, які прийнято використовувати у відомих методах [2–5]. Досягнення високої точності значною мірою зумовлено використанням методів високороздільного оцінювання

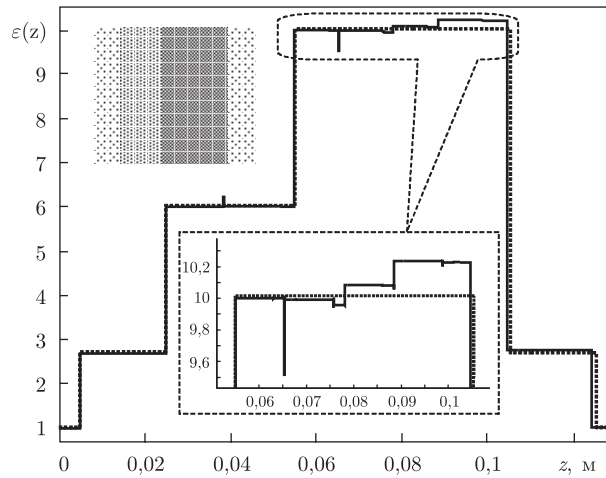


Рис. 1. Порівняння результатів розв'язання оберненої задачі запропонованим методом (штрихова лінія) та методом пошарового зрізання (суцільна лінія)

параметрів скінченного ряду як моделі спектральних коефіцієнтів та вибором порогу для виявлення значущих коефіцієнтів цього ряду. Розвиток ідеї використання скінченних рядів для розв'язання оберненої задачі дозволив уникнути ідентифікації хибних поверхонь розділу середовищ (штрихова лінія на рис. 1), що характерно для методу пошарового зрізання [6] (суцільна лінія), який базується на представленні імпульсної характеристики структури на регулярній сітці. Тому запропонований підхід можна ефективно використати для обробки результатів вимірювання у засобах неруйнівного контролю діелектричних матеріалів та конструкцій.

1. Pike R., Sabatier P. Scattering and inverse scattering in pure and applied science. – San Diego: Academic Press, 2002. – 1831 p.
2. Khruslov E. Ya., Shepelsky D. G. Review article: Inverse scattering method in electromagnetic sounding theory // Inverse problems. – 1994. – **10**, No 1. – P. 1–37.
3. Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1977. – 332 с.
4. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1951. – **15**, No 4. – С. 309–360.
5. Захаров В. Е., Шабат А. Б. Точная теория двумерной самофокусировки в одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // Журн. эксперим. и теор. физики. – 1971. – **61**, вып. 1(7). – С. 118–134.
6. Gladwell G. M. L. Inverse problems in scattering: an introduction. – Dordrecht: Kluwer, 1993. – 380 p.
7. Джала В. Р., Капко Л. І. Радіохвильова діагностика плоскошарових діелектриків на підставі розв'язку оберненої задачі // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2009. – **45**, № 3. – С. 117–122.
8. Stoica P., Moses R. Spectral analysis of signals. – Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 2005. – 480 p.
9. Hua Y., Sarkar T. K. Matrix pencil method for estimating parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise // IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing. – 1990. – **38**. – P. 814–824.
10. Tribolet J. M. A new phase unwrapping algorithm // Ibid. – 1977. – **25**. – P. 170–177.
11. Klivanov M. V., Sacks P. E., Tikhonravov A. V. The phase retrieval problem // Inverse Problems. – 1995. – **11**, No 1. – P. 1–28.

A solution of the inverse diffraction problem by reconstruction of the scattering matrix in a limited frequency interval

A new method for the determination of both layers' permittivity and thickness of a plane multilayer structure is proposed. The reflection coefficient of a plane electromagnetic wave is considered as initial data in the problem. The developed method is based on the reconstruction of all scattering matrix elements in a limited frequency interval. A high accuracy of the determination of both permittivity and thickness is achieved due to the identification of spectral coefficients which are separated from elements of the scattering matrix. The proposed method gains advantages from the possibility of represent these spectral coefficients by finite series of undamped complex exponents.