

Член-корреспондент НАН Украины Ю. Г. Стоян, Е. С. Сосюрка

## Покрывание компактной многогранной области конечным семейством прямых параллелепипедов

*Розглядається задача покриття компактної багатогранної області з не пустою внутрішністю скінченною кількістю прямих паралелепіпедів. На базі техніки  $\Gamma$ -функцій побудована математична модель задачі та досліджені її основні властивості. На основі цих властивостей запропоновано стратегію розв'язку задачі. Наведено результати чисельних експериментів.*

Пусть задано конечное семейство параллелепипедов

$$\Lambda = \{P_i = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -a_i \leq x \leq a_i, -b_i \leq y \leq b_i, -c_i \leq z \leq c_i\}, i \in I = \{1, 2, \dots, n\}\},$$

где  $\mathbb{R}^3$  — трехмерное арифметическое евклидово пространство, и многогранное множество  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  такое, что  $\Omega = \bigcup_{j=1}^m \Omega_j$ ,

$$\Omega_j = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : A_{jk}x + B_{jk}y + C_{jk}z + D_{jk} \leq 0, k \in I_{\varpi} = \{1, 2, \dots, \varpi_j\}\},$$

$\text{int}(\Omega_j) \neq \emptyset$ ,  $j \in J = \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $\text{int}(\cdot)$  — внутренность множества  $(\cdot)$  [1]. Полагаем, что местоположение  $\Omega$  в  $\mathbb{R}^3$  фиксировано. Параллелепипед  $P_i$ , транслированный на вектор  $u_i = (x_i, y_i, z_i)$ , обозначим  $P_i(u_i)$ , а семейство транслированных параллелепипедов — через  $\Lambda(u)$ , где  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ .

**Определение [2].** Семейство  $\Lambda(u)$  называется покрытием области  $\Omega$ , если существует вектор  $u^0 \in \mathbb{R}^{3n}$ , такой, что

$$\Omega \cap \left( \bigcup_{i=1}^n P_i(u_i^0) \right) = \Omega. \quad (1)$$

**Задача.** Необходимо определить, существует ли вектор  $u \in \mathbb{R}^{3n}$  такой, что выполняется (1).

Пусть  $u^0 \in \mathbb{R}^{3n}$  — некоторый фиксированный вектор. Тогда множество  $P(u^0) = \bigcup_{i=1}^n P_i(u_i^0) \subset \mathbb{R}^3$ . Построим  $H(u^0) = \mathbb{R}^3 \setminus \text{int} P(u^0)$ . На основании двойственности теоретико-множественных операций [3]:  $H(u^0) = \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{i=1}^n \text{int} P_i(u_i^0) = \bigcap_{i=1}^n (\mathbb{R}^3 \setminus \text{int} P_i(u_i^0))$ . Тогда условие (1) может быть записано в эквивалентном виде:

$$\Omega \cap H(u^0) = \emptyset. \quad (2)$$

Рассмотрим параллелепипеды  $P_i(u_i)$  и  $P_j(u_j)$ . Пусть параллелепипеду  $P_k(u_k)$ ,  $k = i, j$  соответствует набор вершин  $\{v_p^k, p = 1, 2, \dots, 8\}$ , набор ребер  $\{e_p^k, p = 1, 2, \dots, 12\}$ , набор

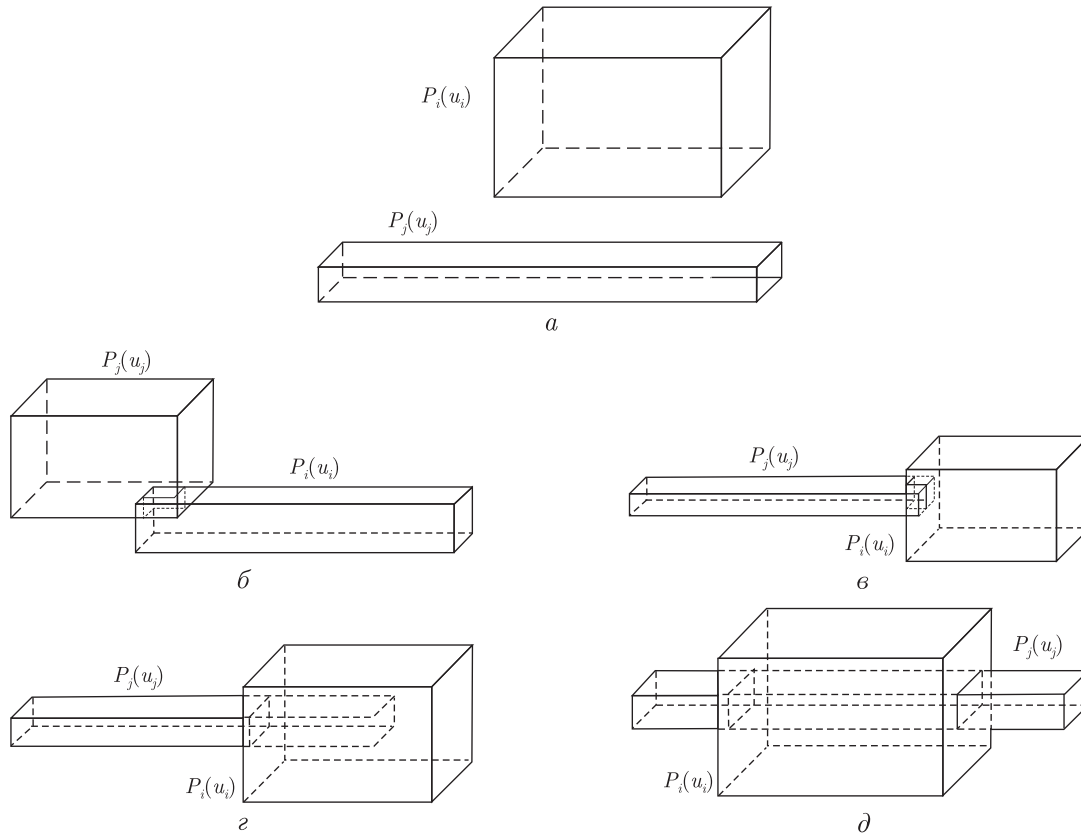


Рис. 1

граней  $\{f_p^k, p = 1, 2, \dots, 6\}$ . Тогда взаимное размещение параллелепипедов  $P_i(u_i)$  и  $P_j(u_j)$  может быть одним из видов, представленных на рис. 1.

Возможны следующие типы взаимного размещения  $P_i(u_i)$  и  $P_j(u_j)$ :

- 1)  $P_i(u_i) \cap P_j(u_j) = \emptyset$  (рис. 1, а);
- 2) существует  $v_p^j \in P_i(u_i)$  и  $v_h^i \in P_j(u_j)$ , и для любого  $g$  верно, что  $e_g^j \notin P_i(u_i)$  (в зависимости от номеров вершин, возможно восемь типов) (рис. 1, б);
- 3) существует  $e_p^j \subset P_i(u_i)$  и для любого  $h$  верно, что  $f_h^j \not\subset P_i(u_i)$  (в зависимости от номера ребра, возможно двенадцать типов) (рис. 1, в);
- 4) существует  $f_p^j \subset P_i(u_i)$  и  $P_j(u_j) \not\subset P_i(u_i)$  (в зависимости от номера грани, возможно шесть типов) (рис. 1, з);
- 5) для любых  $h, p, g$  верно, что  $v_h^j, e_p^j, f_g^j \notin P_i(u_i)$ , а  $\text{int } P_i(u_i) \cap \text{int } P_j(u_j) \neq \emptyset$  или  $P_j(u_j) \subset P_i(u_i)$  (возможно четыре типа) (рис. 1, д).

Таким образом, существует не более чем 31 тип взаимного расположения параллелепипедов  $P_i(u_i)$  и  $P_j(u_j)$ . Тогда

$$H_{ij}(u_i, u_j) = (\mathbb{R}^3 \setminus \text{int } P_i(u_i)) \cup (\mathbb{R}^3 \setminus \text{int } P_j(u_j))$$

можно представить в виде объединения подсемейств  $H_{ij}^k(u_i, u_j)$ ,  $k \in L = \{1, 2, \dots, 31\}$  [4], каждое из которых состоит из множеств одного типа. Это значит, пространство параметров размещения параллелепипедов  $P_i$  и  $P_j$  можно разбить на такие подмножества  $R_{ij}^k$ , что если

$(u_i, u_j) \in R_{ij}^k$ , то множество  $h(u_i, u_j) \in H_{ij}^k$ . Следовательно,  $R^6 = \bigcup_{k=1}^{31} R_{ij}^k$ , где каждому множеству  $R_{ij}^k$  соответствует  $H_{ij}^k$ ,  $k \in L$ .

**Определение [2, 4].** Если  $h(u_i^1, u_j^1), h(u_i^2, u_j^2) \in H_{ij}^k(u_i, u_j)$ , то говорим, что  $h(u_i^1, u_j^1)$  и  $h(u_i^2, u_j^2)$  имеют пространственную форму  $k$ -го типа.

Пусть теперь  $H(u) = \bigcup_{i=1}^n (\mathbb{R}^3 \setminus \text{int } P_i(u_i))$ ,  $u \in \mathbb{R}^{3n}$ . По аналогии со случаем двух параллелепипедов, рассматриваем взаимное расположение каждой пары параллелепипедов семейства  $\Lambda(u)$ , т. е. каждому множеству  $h \in H(u)$  может быть поставлена во взаимнооднозначное соответствие следующая матрица:

$$M_q = \begin{pmatrix} m_{12}^{k_1} & m_{13}^{k_2} & \dots & m_{1n}^{k_{n-1}} \\ 0 & m_{23}^{k_n} & \dots & m_{2n}^{k_{2n-2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_{n-1,n}^{k_{n(n-1)/2}} \end{pmatrix},$$

где  $m_{ij}^{k_t} \in \{R_{ij}^{k_t}, k_t \in L\}$ ,  $t = 1, 2, \dots, n(n-1)/2$ ,  $q = 1, 2, \dots, 31$ , если,  $k_2 = k_3 = \dots = k_{n(n-1)/2} \in L$ ;  $q = 1, 2, \dots, 31^2$ , если  $k_1, k_2 \in L, k_3 = \dots = k_{n(n-1)/2} \in L$ ;  $\dots$ ;  $q = 1, 2, \dots, 31^{n(n-1)/2}$ , если  $k_1, k_2, \dots, k_{n(n-1)/2} \in L$ .

**Определение [2, 4].** Множества  $h(u^1)$  и  $h(u^2)$  имеют одинаковую пространственную форму, если они определяются одинаковыми матрицами  $M_q$ .

**Теорема 1** [4, 5]. Для семейства прямых параллелепипедов  $\Lambda(u)$  разбиение пространства  $\mathbb{R}^{3n}$  имеет вид:

$$\mathbb{R}^{3n} = \bigcup_{q=1}^{\eta} R_q^{3n}, \quad R_q^{3n} = \bigcup_{j>i=1}^n \bigcup_{t=1}^{n(n-1)/2} S_{ij}^{k_t}, \quad (3)$$

где  $\eta = 28^{\sigma_1} \cdot 19^{\sigma_2} \cdot 13^{\sigma_3} \cdot 9^{\sigma_4}$ ,  $\sigma_l \in \{0, 1, 2, \dots, n(n-1)/2\}$ ,  $l = 1, 2, 3, 4$ ,  $\sum_{l=1}^4 \sigma_l = n(n-1)/2$ ,

$S_{ij}^{k_t}$  — прямая призма с основанием  $R_{ij}^{k_t}$ .

В [6] показано, что  $h(u) \in H(u)$  представимо в виде конечного объединения базовых множеств, а именно: полупространств  $C_\delta^0$ ,  $\delta = 1, 2, \dots, 6$ , двугранных углов  $C_\delta^2$ ,  $\delta = 7, 8, \dots, 18$ , трехгранных углов  $C_\delta^3$ ,  $\delta = 19, 20, \dots, 26$ , полубесконечных цилиндров с прямоугольным основанием  $C_\delta^4$ ,  $\delta = 27, 28, \dots, 32$ , цилиндров с прямоугольным основанием  $C_\delta^5$ ,  $\delta = 32, 33, 34$

и прямых параллелепипедов  $C^1$ . То есть,  $h(u) = \bigcup_{j=1}^{\lambda} C_j(w_{ij})$ , где

$$C_j \in \tilde{C} = \{C_\delta^0, C_\delta^2, C_\delta^3, C_\delta^4, C_\delta^5, C^1, \delta = 1, 2, \dots, 35\},$$

$w_{ij}$  состоит из не более чем 6 соответствующих компонент вектора  $u$ .

Заметим, если  $u \in R_q^{3n} \subset \mathbb{R}^{3n}$ , то  $H_q(u)$ ,  $q \in Q = \{1, 2, \dots, \eta\}$  состоят из множеств одной и той же пространственной формы и отличаются только метрическими характеристиками.

В терминах  $\Phi$ -функции [7, 8] соотношение (2) может быть описано неравенством:

$$\Phi(u^0, v) \geq 0, \quad (4)$$

где  $\Phi(u^0, v)$  —  $\Phi$ -функция множеств  $H(u^0)$  и  $\Omega(v)$  [9, 10],  $v = (x_v, y_v, z_v)$ .

Поскольку  $\Phi$ -функция для  $h(u^0) \in H_q^{3n}(u)$  и  $\Omega$  имеет вид:  $\Phi_q(u^0, v) = \min\{\Phi_{qj}(u^0, v), j \in I_\lambda\}$ , где  $\Phi_{qj}$  —  $\Phi$ -функция множеств  $C_j$  и  $\Omega$ , то  $\Phi$ -функции для любого  $u \in \text{int } R_q^{3n}$  имеют один и тот же вид [2, 8] и отличаются только значениями коэффициентов. Следовательно, взяв  $u \in \text{int } R_q^{3n}$  в качестве переменной в  $\Phi_q$ , получим следующую функцию:  $F_q(u, v) = \min\{F_{qj}(u, v), j \in I_\lambda\}$ ,  $F_q(u, v)|_{u=u^0} = \Phi_q(u^0, v)$ . Легко видеть, что если  $F_q(u^*, v^*) \geq 0$ , то  $\Omega \cup h(u^*) = \emptyset$ . Принимая во внимание (3), положив  $v = 0$ , построим  $\Gamma$ -функцию (функцию покрытия) [2, 9]: для множеств  $\Omega$  и  $H(u)$

$$\Gamma(u) = \begin{cases} \Gamma_1(u), & u \in R_1^{3n}, \\ \Gamma_2(u), & u \in R_2^{3n}, \\ \dots \\ \Gamma_\eta(u), & u \in R_\eta^{3n}. \end{cases} \quad (5)$$

Таким образом, если найдется вектор  $u^* \in \mathbb{R}^{3n}$  такой, что  $\Gamma(u^*) \geq 0$ , то  $\Omega \cup \text{int } H(u^*) = \emptyset$ .

**Теорема 2** [6, 10].  $\Gamma(u)$  — кусочно-линейная функция, претерпевающая разрыв I рода при  $u \in \bigcup_{q=2}^{31} \bigcup_{i>j=1}^n (\text{fr } R_{ij}^1 \cup \text{fr } R_{ij}^q)$ .

Оценка числа функций, описывающих  $\Gamma(u)$ , имеет вид:

$$\theta = \sum_{q=1}^{\eta} \varphi_q N_q,$$

где

$$\varphi_q = \sum_{\delta=1}^{12} \mu_{q2\delta} + \sum_{\delta=1}^8 \mu_{q3\delta} + \sum_{\delta=1}^6 \mu_{q4\delta} + \sum_{\delta=1}^3 \mu_{q5\delta} + \mu_{q1},$$

$$N_q \leq N = \vartheta_1^{\mu_{q1}} \prod_{\delta=1}^{12} \vartheta_{2\delta}^{\mu_{q2\delta}} \prod_{\delta=1}^8 \vartheta_{3\delta}^{\mu_{q3\delta}} \prod_{\delta=1}^6 \vartheta_{4\delta}^{\mu_{q4\delta}} \prod_{\delta=1}^3 \vartheta_{5\delta}^{\mu_{q5\delta}},$$

$\mu_{q2\delta}, \mu_{q3\delta}, \mu_{q4\delta}, \mu_{q5\delta}, \mu_{q1}$  — число базовых множеств  $C_\delta^0, C_\delta^2, C_\delta^3, C_\delta^4, C_\delta^5, C^1$ , участвующих в формировании множества  $H(u^0)$  [6],  $\vartheta_{j\delta}$  — число функций, участвующих в формировании  $\Phi$ -функций для  $C_\delta^j$  и  $\Omega$ ,  $j = 1, 2, 3, 4, 5$ .

Как следует из построения функции  $\Gamma(u)$ , решение поставленной задачи может быть сведено к

$$\Gamma(u^*) = \max_{u \in \mathbb{R}^{3n}} \Gamma(u). \quad (6)$$

Тогда, если  $\Gamma(u^*) < 0$ , то (2) не выполняется, если  $\Gamma(u^*) \geq 0$ , то (2) выполнено и  $u^*$  — искомый вектор параметров размещения.

Решение задачи (6) сводится к решению последовательности задач линейного программирования:  $\max_{q \in Q} \Gamma_q(u^*)$ , где  $\Gamma_q(u^*) = \max_{u \in R_q^{3n}} \Gamma_q(u)$ .

Таблица 1

$v_{1t}$	1	2	3	4	5	6
$x_{1t}$	-120	-110	-80	-10	-80	-80
$y_{1t}$	0	100	120	-110	0	0
$z_{1t}$	0	0	0	0	-40	40
$v_{2t}$	1	2	3	4	5	6
$x_{1t}$	-110	-60	120	-40	-20	—
$y_{1t}$	30	120	100	90	90	—
$z_{1t}$	0	0	0	50	-40	—
$v_{3t}$	1	2	3	4	5	6
$x_{1t}$	100	60	140	110	110	—
$y_{1t}$	-100	120	40	30	-20	—
$z_{1t}$	0	0	0	-50	50	—
$v_{4t}$	1	2	3	4	5	6
$x_{1t}$	-50	30	120	40	40	—
$y_{1t}$	-100	-50	-70	-70	-70	—
$z_{1t}$	0	0	0	-40	40	—

Таблица 2

Размер параллелепипеда	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$
$a$	50	40	60	50	60	50	40	30	30	50
$b$	50	40	40	50	50	50	40	40	50	50
$c$	60	50	50	30	60	50	60	60	50	40

Для решения задачи  $\max_{u \in R_q^{3n}} \Gamma_q(u)$  строится дерево решений. Каждой  $p$ -й концевой вершине этого дерева соответствует функция  $\Gamma_{qp}(u)$ ,  $u \in R_q^{3n}$ ,  $p \in \{1, 2, \dots, N_q\}$ .

Поскольку задача (6) является многоэкстремальной, NP-полной и NP-трудной [11], то, в общем случае, в настоящее время глобального максимума можно достичь только теоретически.

Для поиска приближения к глобальному максимуму используется стратегия, изложенная в [12, 13].

Пример. Пусть задана двухсвязная многогранная область  $\Omega$ , представленная объединением выпуклых многогранников  $\Omega_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ . Полагаем, что  $\Omega_j$  задается последовательностью вершин  $v_{jt}$ ,  $t = 1, 2, \dots, \varpi_j$ , координаты которых приведены в табл. 1.

Информация о метрических характеристиках параллелепипедов  $P_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$ , приведена в табл. 2.

Вектор  $u^0 = ((59, 100, 91), (43, 43, 86), (81, 69, 67), (45, 95, 69), (33, 99, 73), (94, 37, 95), (38, 90, 75), (17, 85, 45), (40, 24, 32), (81, 35, 48))$  соответствует начальному размещению параллелепипедов  $P_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$ .

Искомый вектор параметров размещения, удовлетворяющий условию покрытия (2) —  $u^* = ((-83, 88, 0), (-70, 91, 2), (75, 107, 0), (112, 30, 20), (-72, 20, 17), (-67, -71, -3), (0, -83, -10), (60, -72, 0), (111, -59, 2), (109, 30, -15))$ .

1. Александрян Г. А., Мирзаханян Э. А. Общая топология. — Москва: Высш. шк., 1979. — 336 с.
2. Stoyan Yu. Covering a polygonal region by a collection of various size rectangles // Пробл. машиностроения. — 2007. — **10**, № 2. — С. 67–82.
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа: — Москва: Наука, 1981. — 544 с.

4. *Сосюрка Е. С.* Аналитическое описание взаимного расположения прямых параллелепипедов в задаче покрытия компактного многогранного множества // Вестн. Харьк. нац. ун-та. – 2008. – № 833. – С. 247–257.
5. *Романова Т. Е., Кривуля А. В.* Средства математического моделирования задач покрытия // Доп. НАН України. – 2008. – № 9. – С. 48–52.
6. *Сосюрка Е. С.* Построение гамма-функции и ее использование для решения задачи покрытия компактного многогранного множества семейством прямых параллелепипедов // Вестн. Харьк. нац. ун-та. – 2009. – № 847. – С. 314–323.
7. *Stoyan Yu., Scheithauer G., Pridatko D., Romanova T.*  $\Phi$ -function for primary 3D objects // Technische Universitat Dresden. – 2002. – P. 27.
8. *Стоян Ю. Г., Придатко Д. И., Романова Т. Е., Шайтхауэр Г.*  $\Phi$ -функции объектов, имеющих пространственную форму границы, – конус, цилиндр, параллелепипед // Доп. НАН України. – 2004. – № 5. – С. 28–33.
9. *Stoyan Yu., Scheithauer G., Gil N., Romanova T.*  $\Phi$ -function for complex 2D objects // 4QR Quarterly J. of the Belgian, French and Italian Operations Research Societies. – 2004. – 2, No 1. – P. 69–84.
10. *Stoyan Yu. G.*  $\Phi$ -function and its basic properties // Доп. НАН України. – 2001. – No 8. – С. 112–117.
11. *Пападимитриу Х., Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. – Москва: Мир, 1985. – 512 с.
12. *Романова Т. Е., Кривуля А. В., Злотник М. В.* Трансляционное прямоугольное покрытие // Доп. НАН України. – 2008. – № 7. – С. 48–53.
13. *Романова Т. Е., Кривуля А. В., Злотник М. В.* Математическая модель и метод решения задачи покрытия многоугольной области прямоугольными объектами // Пробл. машиностроения. – 2008. – 11, № 3. – С. 58–67.

*Институт проблем машиностроения  
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков*

*Поступило в редакцию 22.02.2010*

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **Yu. G. Stoyan, O. S. Sosuyrka**

### **The covering of a non-convex polytope by a finite family of right parallelepipeds**

*The covering problem of a non-convex polytope with non-empty interior by a finite number of parallelepipeds is discussed. On the ground of the  $\Gamma$ -function technique, a mathematical model of the problem is constructed, and its basic characteristics are analyzed. On the basis of these characteristics, the solution strategy is offered. Numerical examples are given.*