УДК 517.977

В. І. Коробов, К. В. Скляр, В. О. Скорик

Відображуваність нелінійних систем на системи спеціального вигляду та їх керованість

(Представлено академіком НАН України М. О. Перестюком)

Розглянуто клас систем вигляду $\dot{x} = a(x) + \sum\limits_{i=1}^{m} b_i(x)\beta_i(x,u)$, $x \in \mathbb{R}^n$ $(m \leqslant n)$, де $a(x)$, $b_1(x)$, …, $b_m(x)$ — n-вимірні векторні поля, $\beta_1(x,u)$, …, $\beta_m(x,u)$ — скалярні функції, u — одновимірне керування. Запропоновано метод відображення таких систем на системи більш простого вигляду. На основі цього з використанням методу функції керованості наведено достатні умови їх керованості. Описано побудову керувань, які переводять довільну початкову точку в початок координат за траєкторіями відповідних замкнених систем за деякий скінченний час.

Розглянемо систему $\dot{x} = f(x,u)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, яку, взагалі-то, різними способами можна записати у вигляді

$$\dot{x} = a(x) + \sum_{i=1}^{m} b_i(x)\beta_i(x,u), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad u \in \mathbb{R} \qquad (m \leqslant n). \tag{1}$$

Припустимо, що $a(x)$ — n раз неперервно диференційовна вектор-функція, а $\beta_1(x,u)$, …, $\beta_m(x,u)$ — неперервно диференційовні функції за x і u. Перепишемо систему (1) у вигляді

$$\dot{x} = a(x) + B(x)\beta(x,u), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad u \in \mathbb{R} \qquad (m \leqslant n), \tag{2}$$

де $B(x)$ — $(n{\times}m)$-матриця, стовпцями якої є вектор-функції $b_1(x)$, …, $b_m(x)$, $\beta(x,u)$ — m-вимірна вектор-функція з компонентами $\beta_1(x,u)$, …, $\beta_m(x,u)$. Припустимо, що

$$a(0) = 0, \qquad \beta(0,0) = 0. \tag{3}$$

Розглянемо задачу відображуваності системи (1) на системи простішого вигляду, на цій основі отримаємо достатні умови керованості системи (1) у початок координат.

Через $L_a\varphi(x)$ позначимо похідну скалярної неперервно диференційовної функції $\varphi(x)$ за напрямком векторного поля $a(x)$, тобто $L_a\varphi(x) = \varphi_x(x)a(x)$, де $\varphi_x(x) = (\varphi_{x_1}(x), \ldots, \varphi_{x_n}(x))$, через $[a(x), b(x)]$ — дужку Лі векторних полів $a(x)$ і $b(x)$, $[a,b] = b_x a - a_x b$; $\mathrm{ad}_a^0 b(x) = b(x)$, $\mathrm{ad}_a^k b = [a(x), \mathrm{ad}_a^{k-1} b(x)]$, $k \geqslant 1$.

Припустимо, що для системи (1) виконана умова $\operatorname{rang} Q(x) = n$ для всіх $x \in \mathbb{R}^n$, де $Q(x) = (b_1(x), \ldots, b_m(x), \ldots, \mathrm{ad}_a^{n-1} b_1(x), \ldots, \mathrm{ad}_a^{n-1} b_m(x))$.

Вважатимемо, що ранг матриці $B(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}^n$ дорівнює m, а система (2) така, що при додаванні до стовпців матриці $B(x)$ послідовно стовпців матриці $Q(x)$, починаючи з $\mathrm{ad}_a b_1(x)$, ранг отриманої матриці буде або збільшуватися на одиницю або залишатися тим самим для всіх $x \in \mathbb{R}^n$.

Наведемо алгоритм побудови послідовності вектор-функцій із стовпців матриці $Q(x)$, який подібний до алгоритму для лінійних керованих систем з багатовимірним керуванням, описаного в роботах [1, 2], та аналогічний алгоритмам відображення афінних систем з багатовимірним керуванням на лінійні системи, застосованим у роботах [3–5]. Важливою відмінністю цього алгоритму від алгоритмів вказаних робіт є те, що в системах даної роботи керування є одновимірним. Застосований нами алгоритм полягає в нижчевикладеному. Першими вектор-функціями цієї послідовності є $b_1(x), \ldots, b_m(x)$. Далі, беручи по черзі вектор-функції з матриці $Q(x)$, перевіряємо, починаючи з $\mathrm{ad}_a b_1(x)$, чи збільшується ранг матриці $(b_1(x), \ldots, b_m(x), \mathrm{ad}_a b_1(x))$ на одиницю чи залишається тим самим для всіх $x \in \mathbb{R}^n$. Якщо ранг збільшився на одиницю, то $\mathrm{ad}_a b_1(x)$ додаємо до $b_1(x), \ldots, b_m(x)$ і отримуємо послідовність $b_1(x), \ldots, b_m(x), \mathrm{ad}_a b_1(x)$. Якщо ранг виявився таким самим, то вектор-функція $\mathrm{ad}_a b_1(x)$ і всі вектор-функції вигляду $\mathrm{ad}_a^j b_1(x)$ для $j \geqslant 1$ не включаються в утворювану згідно з алгоритмом послідовність і тому надалі не розглядаються. Нехай шукана послідовність уже містить k вектор-функцій $(m+1 < k < n)$. Далі розглядаємо наступний стовпець матриці $Q(x)$, який не був вилучений із розгляду на попередньому кроці, і перевіряємо, чи збільшується з ним ранг матриці чи ні. Якщо ранг збільшується на одиницю, то його додаємо $(k{+}1)$-ю вектор-функцією в послідовність. Якщо ж ранг не збільшується, то цю вектор-функцію $\omega(x)$ і всі вектор-функції вигляду $\mathrm{ad}_a^j \omega(x)$ для $j \geqslant 1$ вилучаємо і далі не роглядаємо. У результаті шляхом перестановки та, можливо, перенумерації вектор-функцій в отриманій послідовності отримуємо вектор-функції, які є стовпцями матриці $K(x){=}(b_1(x), \ldots, \mathrm{ad}_a^{n_1-1} b_1(x), \ldots, b_m(x), \ldots, \mathrm{ad}_a^{n_m-1} b_m(x))$, де $n_1 + \cdots + n_m = n$, і $\operatorname{rang} K = n$ для всіх $x \in \mathbb{R}^n$.

Розглянемо скалярні функції $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$, які є не менш ніж двічі неперервно диференційовними і такими, що для кожної з них вектор-рядок $(\varphi_i(x))_x$ $(i = 1, \ldots, m)$ для всіх $x \in \mathbb{R}^n$ є ортогональним вектор-стовпцям $\mathrm{ad}_a^k b_j(x)$ для $k = 0, \ldots, n_i - 2$, $j = 1, \ldots, m$ матриці K, а для вектор-стовпців матриці K, що залишилися, потрібно лише те, щоб він не був ортогональним вектор-стовпцю $\mathrm{ad}_a^{n_i-1} b_i(x)$, тобто для кожного $i = 1, \ldots, m$ виконані умови

$$\begin{cases} (\varphi_i(x))_x \mathrm{ad}_a^k b_j(x) = 0 \qquad \text{для} \qquad k = 0, \ldots, n_i - 2, \quad j = 1, \ldots, m, \\ (\varphi_i(x))_x \mathrm{ad}_a^{n_i-1} b_i(x) \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{4}$$

Зробимо заміну змінних $z = L(x)$, яка в покомпонентній формі має вигляд

$$z_{s_{i-1}+j} = L_a^{j-1} \varphi_i(x), \qquad j = 1, \ldots, n_i, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{5}$$

де $s_0 = 0$, $s_k = n_1 + \cdots + n_k$ для $k = 1, \ldots, m$. Припускається, що рівності (5) є однозначно розв'язними відносно $x_1, \ldots, x_n$ для будь-яких $z_1, \ldots, z_n$. Тоді з (5) отримуємо

$$\begin{cases} \dot{z}_{s_{i-1}+j} = z_{s_{i-1}+j+1} + \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \beta_k(x,u) L_{b_k} L_a^{j-1} \varphi_i(x), \quad j = 1, \ldots, n_i - 1, \\ \dot{z}_{s_i} = L_a^{n_i} \varphi_i(x) + \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \beta_k(x,u) L_{b_k} L_a^{n_i-1} \varphi_i(x), \qquad i = 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{6}$$

Оскільки, зважаючи на умови (4), маємо, що $L_{b_k} L_a^{j-1} \varphi_i(x) = 0$, $j = 1, \ldots, n_i - 1$, $k = 1, \ldots, m$, $i = 1, \ldots, m$ для всіх $x \in \mathbb{R}^n$, то з (6), враховуючи рівності

$$L_{b_k} L_a^{n_i-1} \varphi_i(x) = (\varphi_i(x))_x \mathrm{ad}_a^{n_i-1} b_k(x), \qquad k, i = 1, \ldots, m,$$

отримуємо, що система (1) внаслідок (5) у нових змінних набуває вигляду

$$\begin{cases} \dot z_{s_{i-1}+j} = z_{s_{i-1}+j+1}, \qquad j = 1,\ldots,n_i-1, \\ \dot z_{s_i} = L_a^{n_i}\varphi_i(x) + \sum\limits_{k=1}^{m}\beta_k(x,u)(\varphi_i(x))_x \mathrm{ad}_a^{n_i-1}b_k(x), \end{cases} \qquad i = 1,\ldots,m. \tag{7}$$

Введемо позначення в нових змінних $\gamma_k(z,u) = \beta_k(x,u)$, $F_i(z) = L_a^{n_i}\varphi_i(x)$, $g_{ik}(z) = (\varphi_i(x))_x \mathrm{ad}_a^{n_i-1}b_k(x)$ при $x = L^{-1}(z)$, $H_i(z,u) = F_i(z) + \sum\limits_{k=1}^{m}\gamma_k(z,u)g_{ik}(z)$, $i,k = 1,\ldots,m$. Позначимо для $i = 1,\ldots,m$ через $z^i = (z_{s_{i-1}+1},\ldots,z_{s_i})^*$, 0^i — n_i-вимірні вектори, тоді $z = (z^1,\ldots,z^m)^*$ ($*$ — знак транспонування) і система (7) набуває вигляду

$$\dot z^i = A_i z^i + b_{0i}H_i(z^1,\ldots,z^m,u), \qquad i = 1,\ldots,m, \tag{8}$$

де A_i — $(n_i{\times}n_i)$-матриця, елементи головної наддіагоналі якої дорівнюють одиниці, а ті елементи, що залишились, дорівнюють нулю, $b_{0i} = (0,\ldots,0,1)^*$ — n_i-вимірний вектор, яку перепишемо у вигляді

$$\dot z = Az + B_0H(z,u), \qquad z \in \mathbb{R}^n, \qquad u \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

де $A = \mathrm{diag}(A_1,\ldots,A_m)$ — $(n{\times}n)$-матриця, $B_0 = (e_{s_1},\ldots,e_{s_m})$ — $(n{\times}m)$-матриця, e_{s_i} — s_i-й орт простору $\mathbb{R}^n$, $i = 1,\ldots,m$, $H(x,u)$ — m-вимірна неперервно диференційовна за x і u вектор-функція. Розв'язок $z(t)$ системи (9) будемо розуміти в сенсі диференціального включення

$$\dot z \in F(z) = Az + B_0H(z,U(z)), \qquad z(0) = z_0, \tag{10}$$

де $U(z)$ — опукла множина (відрізок або точка). Докладне дослідження умов існування розв'язку включення (10) наведено, наприклад, у роботі [6]. Зокрема, достатньою умовою його існування є припущення про те, що $F(z)$ — непорожня, обмежена, замкнена, опукла множина і відображення $F(z)$ є напівнеперервним зверху за включенням.

Позначимо $\phi_i(z^i) = b_{0i}^*N^{-1}(\Theta(z^i))z^i$, де $N^{-1}(\Theta)$ — $(n_i{\times}n_i)$-матриця, обернена до матриці $N(\Theta) = \int\limits_0^{\Theta}(1-t/\Theta)e^{-A_it}b_{0i}b_{0i}^*e^{-A_i^*t}dt$, а функція керованості $\Theta(z^i)$ при $z^i \neq 0^i$ є єдиним додатним розв'язком рівняння $2a_0\Theta = (N^{-1}(\Theta)z^i, z^i)$ з числом a_0, що задовольняє умову $0 < a_0 \leqslant 2d^2/N_{n_in_i}(1)$, та $\Theta(0^i) = 0$, а $S_i = \{z \in \mathbb{R}^n \colon \phi_i(z^i) = 0\}$, $S_i^+ = \{z \in \mathbb{R}^n \colon \phi_i(z^i) > 0\}$, $S_i^- = \{z \in \mathbb{R}^n \colon \phi_i(z^i) < 0\}$.

Теорема 1. *Розглянемо систему* (9). *Припустимо, що існують функції* $u_i^+(z)$, $u_i^-(z)$, *які задовольняють умову Ліпшиця в кожній множині* $K(\rho_1,\rho_2) = \{z : 0 < \rho_1 \leqslant \|z\| \leqslant \rho_2\}$ *зі сталими Ліпшиця* $L^{\pm}(\rho_1,\rho_2)$ *і для деякого числа* $d > 0$ *задовольняють нерівність* $H_i(z,u_i^+(z)) \geqslant d$, $H_i(z,u_i^-(z)) \leqslant -d$. *Тоді керування* $u(z)$ *вигляду*

$$u_i(z) = \begin{cases} u_i^-(z), & \textit{якщо} \quad z \in S_i^+, \\ u_i^+(z), & \textit{якщо} \quad z \in S_i^-, \\ u_i^0(z) \in [u_i^-(z), u_i^+(z)], & \textit{якщо} \quad z \in S_i, \end{cases}$$

переводить довільну точку $z = (z^1,\ldots,z^{i-1},z^i,z^{i+1},\ldots,z^m)^*$ *у точку* $z_T = (z_T^1,\ldots,z_T^{i-1},0^i, z_T^{i+1},\ldots,z_T^m)^*$ *за траєкторією системи* (9) *за деякий скінченний час* $T(z^i) \leqslant \Theta(z^i)$.

Доведення. Виберемо для $z^i \neq 0$ керування $v(z^i) = -(1/2)b_{0i}^* N^{-1}(\Theta(z^i))z^i$, яке задовольняє обмеження $|v(z^i)| \leqslant d$ для будь-якого $z^i \in \mathbb{R}^{n_i}$ [2, 7]. Перепишемо i-ту підсистему (8) системи (9) з керуванням $u = u_i(z)$ у вигляді

$$\dot{z}^i = A_i z^i + b_{0i} v(z^i) + b_{0i}(H_i(z^1, \ldots, z^m, u_i(z)) - v(z^i)), \qquad z^i \in \mathbb{R}^{n_i}. \tag{11}$$

Похідна на підставі системи (11) функції $\Theta(z^i)$ має вигляд

$$\dot{\Theta}(z^i) = -1 + \frac{2b_{0i}^* N^{-1}(\Theta)(H_i(z, u_i(z)) - v(z^i))}{\frac{1}{\Theta}(N^{-1}(\Theta)z^i, z^i) + (N^{-1}(\Theta)\widetilde{N}(\Theta)N^{-1}(\Theta)z^i, z^i)}, \tag{12}$$

де $\Theta = \Theta(z^i)$, $\widetilde{N}(\Theta) = \dfrac{1}{\Theta}\int\limits_0^\Theta te^{-A_i t}BB^* e^{-A_i^* t}dt$. Враховуючи нерівність $|v(z^i)| \leqslant d$, маємо $H_i(z, u_i^+(z)) - v(z^i) \geqslant 0$, $H_i(z, u_i^-(z)) - v(z^i) \leqslant 0$. Тоді, враховуючи нерівності $(N^{-1}(\Theta)z^i, z^i) > 0$ та $(N^{-1}(\Theta)\widetilde{N}(\Theta)N^{-1}(\Theta)z^i, z^i) > 0$ для $z^i \neq 0^i$, з (12) отримуємо, що $\dot{\Theta}(z^i)\big|_{(8)_i} \leqslant -1$ для всіх $z = (z^1, \ldots, z^i, \ldots, z^m)^* \in \mathbb{R}^n$, де $z^i \neq 0^i$. Звідси маємо твердження теореми.

Теорема 2. *Нехай існують функції $u_1^-(z^1, \ldots, z^m)$, $u_1^+(z^1, \ldots, z^m)$, $u_2^-(z^2, \ldots, z^m)$, $u_2^+(z^2, \ldots, z^m)$, $\ldots$, $u_m^-(z^m)$, $u_m^+(z^m)$, що задовольняють умови теореми 1, такі, що для деяких $\varepsilon_1^\pm > 0$*

$$H_1(z^1, \ldots, z^m, u_1^-(z^1, \ldots, z^m)) \leqslant -\varepsilon_1^-, \qquad H_1(z^1, \ldots, z^m, u_1^+(z^1, \ldots, z^m)) \geqslant \varepsilon_1^+,$$

і для кожного $i = 2, \ldots, m$ для функцій $u_i^-(z^i, \ldots, z^m)$, $u_i^+(z^i, \ldots, z^m)$, $u_i^0(z^i, \ldots, z^m)$ та деяких $\varepsilon_i^\pm > 0$ виконані такі умови:

1) $H_k(0^1, \ldots, 0^{i-1}, z^i, \ldots, z^m, u_i^\pm(z^i, \ldots, z^m)) = 0$ для $k = 1, \ldots, i-1$;

2) $H_i(0^1, \ldots, 0^{i-1}, z^i, \ldots, z^m, u_i^-(z^i, \ldots, z^m)) \leqslant -\varepsilon_i^-$, $H_i(0^1, \ldots, 0^{i-1}, z^i, \ldots, z^m, u_i^+(z^i, \ldots, z^m)) \geqslant \varepsilon_i^+$;

3) поверхня S_i або є поверхнею перемикання керування $u_i^\pm(z^i, \ldots, z^m)$, або на ній рух проходить з керуванням $u_i^0(z^i, \ldots, z^m)$ таким, що

$$H_k(0^1, \ldots, 0^{i-1}, z^i, \ldots, z^m, u_i^0(z^i, \ldots, z^m)) = 0 \qquad \text{для} \qquad k = 1, \ldots, i-1. \tag{13}$$

Тоді система (1) є керованою з довільної точки x_0 у початок координат за деякий скінченний час.

Доведення. Початкова точка x_0 переходить при відображенні (5) у точку $z_0 = (\varphi_1(x_0), \ldots, L_a^{n_1-1}\varphi_1(x_0), \ldots, \varphi_m(x_0), \ldots, L_a^{n_m-1}\varphi_m(x_0))^*$, а кінцева точка $x = 0$ внаслідок (3) переходить у точку $z = 0$. За теоремою 1 при $i = 1$ та $d = \min\{\varepsilon_1^-, \varepsilon_1^+\}$ для системи (9) керування $u_1(z)$, що дорівнює u_1^+ або u_1^- та u_1^0 на S_1 у випадку, коли поверхня S_1 не є поверхнею перемикання керувань $u_1^\pm$, переводить за час T_1 точку z_0 у точку $z_{T_1} = (0^1, z_{T_1}^2, \ldots, z_{T_1}^m)$ за траєкторією цієї системи. За припущенням теореми існують керування u_2^- та u_2^+, що задовольняють рівність $H_1(0^1, z^2, \ldots, z^m, u_2^\pm) = 0$, такі, що для $\varepsilon_2^\pm > 0$ будуть виконані нерівності $H_2(0^1, z^2, \ldots, z^m, u_2^-) \leqslant -\varepsilon_2^-$, $H_2(0^1, z^2, \ldots, z^m, u_2^+) \geqslant \varepsilon_2^+$, а згідно з умовою *3*, якщо поверхня S_2 не є поверхнею перемикання керування $u_2^\pm$, то керування $u_2^0(z^2, \ldots, z^m)$, яке задовольняє рівність $H_1(0^1, z^2, \ldots, z^m, u_2^0) = 0$ на поверхні S_2. Тому для підсистеми

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_1, \ \ldots, \ \dot{z}_{n_1-1} = z_{n_1}, \ \dot{z}_{n_1} = H_1(z^1, z^2, \ldots, z^m, u_2(z^2, \ldots, z^m)), \\ z_1(T_1) = 0, \ \ldots, \ z_{n_1-1}(T_1) = 0, \ z_{n_1}(T_1) = 0, \end{cases}$$

системи (9) з керуванням u_2, що дорівнює u_2^- або u_2^+, а у випадку, коли поверхня S_2 не є поверхнею перемикання керувань $u_2^{\pm}$, то на ній з керуванням u_2, що дорівнює u_2^0, буде виконана тотожність $z^1(t) \equiv 0$ для $t \geqslant T_1$. Тоді за теоремою 1 для $i = 2$ та $d = \min\{\varepsilon_2^-, \varepsilon_2^+\}$ для системи (9) за деякий скінченний час $(T_2 - T_1)$ керування $u_2(z^2, \ldots, z^m)$ переводить точку $z_{T_1} = (0^1, z^2_{T_1}, \ldots, z^m_{T_1})$ за траєкторією системи (9) у точку $z_{T_2} = (0^1, 0^2, z^3_{T_2}, \ldots, z^m_{T_2})^*$. Нехай зроблено $(i-1)$ таких кроків $(2 \leqslant i \leqslant m)$, в результаті яких керування

$$u(z) = u_k(z^k, \ldots, z^m) \qquad \text{для} \qquad T_{k-1} \leqslant t < T_k \qquad (T_0 = 0), \qquad k = 1, \ldots, i-1,$$

за час T_{i-1} переводить точку z_0 у точку $z_{T_{i-1}} = (0^1, \ldots, 0^{i-1}, z^i_{T_{i-1}}, \ldots, z^m_{T_{i-1}})^*$. На i-му кроці за припущеннями теореми існують керування u_i^- та u_i^+, що задовольняють рівність з *1*, і такі, що для $\varepsilon_i^{\pm} > 0$ будуть виконані нерівності з *2*. Оскільки виконані рівності з *1* та з (13), то для підсистеми

$$\begin{cases} \dot{z}_{s_{k-1}+1} = z_{s_{k-1}+j+2}, \ \ldots, \ \dot{z}_{s_k-1} = z_{s_k}, \\ \dot{z}_{s_k} = H_k(z^1(t), \ldots, z^{k-1}(t), z^k, \ldots, z^m, u_i(z^i, \ldots, z^m)), \end{cases} \qquad k = 1, \ldots, i-1,$$

системи (9) з керуванням u_i, що дорівнює u_i^- або u_i^+, а у випадку, коли поверхня S_i не є поверхнею перемикання керувань $u_i^{\pm}$, то на ній з керуванням u_i, що дорівнює u_i^0, будуть виконані тотожності $z^1(t) \equiv 0^1$, $\ldots$, $z^{i-1}(t) \equiv 0^{i-1}$ для $t \geqslant T_{i-1}$. За теоремою 1 для $d = \min\{\varepsilon_i^-, \varepsilon_i^+\}$ за деякий скінченний час $T_i - T_{i-1}$ керування $u_i(z^i, \ldots, z^m)$ переводить точку $z_{T_{i-1}}$ згідно із системою (9) у точку $z_{T_i} = (0^1, \ldots, 0^i, z^{i+1}_{T_i}, \ldots, z^m_{T_i})^*$.

Таким чином, через m кроків отримуємо, що керування $u(z)$ вигляду

$$u(z) = u_i(z^i, \ldots, z^m) \qquad \text{для} \qquad T_{i-1} \leqslant t < T_i \qquad (T_0 = 0), \qquad i = 1, \ldots, m,$$

де $u_i(z^i, \ldots, z^m)$ дорівнює u_i^- або u_i^+, а якщо S_i не є поверхнею перемикання керувань $u_i^{\pm}$, то на ній $u_i(z^i, \ldots, z^m)$ дорівнює u_i^0, переводить за час $T = T_m$ точку z_0 у точку $z_T = 0$ за траєкторією системи (9), що має вигляд $z(t) = (z^1(t), \ldots, z^m(t))^*$, де $z^i(t) \equiv 0^i$ для $T_i \leqslant t \leqslant T$, $i = 1, \ldots, m-1$. Траєкторія $x(t)$ системи (1), що з'єднує точки x_0 і $x_T = 0$, знаходиться з рівняння $L(x(t)) = z(t)$ або шляхом інтегрування системи (1) з керуванням $u(t) = u(z(t))$ на $[0, T]$ з початковою умовою $x(0) = x_0$.

Зауважимо, що для дослідження переводу деяких наперед заданих компонент z_{k_1}, $\ldots$, z_{k_l} $(l \leqslant n)$ вектора z у нулі, серед яких тільки одна з них збігається з z_{s_i} для деякого $i \in \{1, \ldots, m\}$ або таких компонент декілька, потрібно зробити лише їх перенумерацію і застосувати теорему 1 або теорему 2 відповідно.

Відзначимо, що важливість запропонованого підходу полягає в тому, що він дозволяє вивчати керованість нелінійних систем, для яких перші наближення не є повністю керованими. Прикладом такої системи є система $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = u^3$, $\ldots$, $\dot{x}_n = u^{2n-1}$. До того ж він дає алгоритм побудови керування, що переводять довільну точку в точку спокою системи.

1. *Коробов В. И.* Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости // Мат. сб. – 1979. – **109 (151)**, № 4 (8). – С. 582–606.
2. *Коробов В. И.* Метод функции управляемости. – Москва; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2007. – 576 с.
3. *Уонем М.* Линейные многомерные системы управления: Геометрический подход. – Москва: Наука, 1980. – 376 с.

4. *Jakubchyk B., Respondek W.* On Linearization of Control Systems // Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. sci. math. – 1980. – **28**, No 9–10. – P. 517–522.
5. *Hunt L. R., Su R., Meyer G.* Design for multi-input nonlinear systems // Differential Geometric Control Theory. – New York: Birkhäuser, 1983. – P. 268–298.
6. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – Москва: Наука, 1985. – 223 с.
7. *Коробов В. И., Скляр Г. М.* Методы построения позиционных управлений и допустимый принцип максимума // Дифференц. уравнения. – 1990. – **26**, № 11. – С. 1914–1924.

Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна
Інститут математики Щецинського університету, Польща
Надійшло до редакції 17.12.2009

V. I. Korobov, K. V. Sklyar, V. O. Skoryk

Mappability of non-linear systems onto systems of a special form and their controllability

We consider a class of systems in the form $\dot{x} = a(x) + \sum\limits_{i=1}^{m} b_i(x)\beta_i(x,u)$, $x \in \mathbb{R}^n$ $(m \leqslant n)$, *where* $a(x)$, $b_1(x)$, $\ldots$, $b_m(x)$ *are* n*-dimensional vector fields,* $\beta_1(x,u)$, $\ldots$, $\beta_m(x,u)$ *are scalar functions, and* u *is a one-dimensional control. We propose a method of mapping onto systems of a simpler form. Then, we use the controllability function method to give sufficient conditions of controllability of such systems. Construction of controls which transfer an arbitrary initial point to the origin along trajectories of the corresponding closed systems at a certain finite time is described.*