УДК 519.217,519.718

І. В. Малик

Характеристичний показник для розв'язку стохастичного диференціально-функціонального рівняння нейтрального типу з інтегралом за пуассоновою мірою

(Представлено академіком НАН України В. С. Королюком)

Одержано критерій для визначення характеристичного показника Ляпунова розв'язку стохастичного диференціально-функціонального рівняння нейтрального типу з інтегралом за пуассоновою мірою.

Нехай на ймовірнісному базисі [1] $(\Omega, F, P, \Im)$, де $\Im \equiv \{F_t, t \geqslant 0\}$ — фільтрація, задано випадковий процес, який задовольняє лінійне стохастичне диференціально-функціональне рівняння нейтрального типу з інтегралом за пуассоновою мірою (НСДФРП)

$$dDx_t = Lx_t dt + Gx_t dw(t) + \int_Z U(z)x_t \widetilde{v}(dz, dt) \tag{1}$$

та початкову умову

$$x_0 = \varphi. \tag{2}$$

Тут випадковий процес $x(t) = x(t, \omega)\colon R_+ \times \Omega \longrightarrow R^1$; $x_t \equiv \{x(t+s), -h \leqslant s \leqslant 0$; $\varphi \in \in C([-h, 0])$; $w(t) = w(t, \omega)$ — одновимірний випадковий вінеровий процес, що узгоджений з $\Im$; $\widetilde{v}(dz, dt) := v(dz, dt) - Ev(dz, dt)$ — центрована пуассонова міра, причому w і $\widetilde{v}$ — незалежні випадкові процеси; D, L, G, $U(z)$ — функціонали, задані на просторі функцій Скорохода $\psi \in S_{[-h,0]}$ співвідношеннями [2, 3]

$$D\psi := \int_{-h}^{\varepsilon} dr_1(s)\psi(s); \qquad L\psi := \int_{-h}^{\varepsilon} dr_2(s)\psi(s);$$

$$G\psi := \int_{-h}^{\varepsilon} dr_3(s)\psi(s); \qquad U(z)\psi := \int_{-h}^{\varepsilon} d_s r_4(s, z)\psi(s),$$

де r_i, $i = 1, 2, 3, 4$, — функції обмеженої варіації на відрізку $[-h, \varepsilon]$ рівномірно по z (для r_4), для яких виконується умова $r_i(t) = c_i$ при $t \in [0, \varepsilon]$; $\varepsilon > 0$, причому

$$r_1(0) - r_1(0-) = 1, \qquad \mathrm{Var}_{[-h,0)} r_1 < 1.$$

Для задачі (1), (2) має місце теорема існування та єдиності з точністю до стохастичної еквівалентності сильного розв'язку $x(t) \in R^1$, для якого існує $Ex^2(t) < \infty$ [4].

Поряд з рівнянням (1) розглянемо відповідне детерміноване диференціально-функціональне рівняння нейтрального типу(НДДФР) [3]

$$dDy_t = Ly_t dt \tag{3}$$

та початкову умову

$$y_0 = \varphi. \tag{4}$$

Нагадаємо [3], що розв'язок задачі (3), (4) є експоненціально стійкісий тоді і тільки тоді, коли всі корені характеристичного квазіполінома

$$V(\lambda) := \lambda\left\{\int\limits_{-h}^{\varepsilon} dr_1(s)e^{\lambda s}\right\} - \int\limits_{-h}^{\varepsilon} dr_2(s)e^{\lambda s} \tag{5}$$

лежать в лівій півплощині комплексної площини $\mathbf{C}$, а точніше

$$\exists\, \rho > 0, \quad \forall\, \lambda \in \mathbf{C}\colon \quad V(\lambda) = 0 \Rightarrow \operatorname{Re}\lambda < -\rho. \tag{6}$$

Розглянемо функцію Коші $X(t)$ [3] як розв'язок (3), що задовольняє початкову умову

$$X(t) := \mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0, & -h \leqslant t < 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Вірне твердження [3] щодо зображення функції Коші $X(t)$ за допомогою характеристичного квазіполінома:

$$X(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re}\lambda = \mu} e^{\lambda t} V^{-1}(\lambda)\, d\lambda, \tag{8}$$

де $\mu > -\rho$.

Лема 1 [5]. *Розв'язок задачі* (1), (2) *задовольняє стохастичне інтегральне рівняння*

$$x(t) = y(t) + \int\limits_0^t X(t-s)Gx_s dw(s) + \int\limits_Z \int\limits_0^t X(t-s)U(z)x_s \widetilde{v}(dz, dt), \tag{9}$$

де $y(t)$ *— розв'язок задачі* (3), (4).

Означення 1. Тривіальний розв'язок задачі (1), (2) назвемо експоненціально стійким в середньому квадратичному, якщо існують сталі $M > 0$ і $c > 0$ такі, що $\forall\, t \geqslant 0$ і $\forall\, \varphi \in$ $\in C([-h, 0])$

$$Ex^2(t) \leqslant Me^{-ct}\|\varphi\|^2. \tag{10}$$

Тут $\|\varphi\| := \sup\limits_{-h \leqslant t \leqslant 0} |\varphi(t)|$, $E\{\cdot\}$ — операція математичного сподівання.

Теорема 1 [5]. *Нехай тривіальний розв'язок задачі* (3), (4) *асимптотично стійкий.*

Тоді необхідною і достатньою умовою експоненціальної стійкості в середньому квадратичному розв'язку (1), (2) *є виконання нерівності*

$$B := \int_0^\infty RX_t dt < 1, \tag{11}$$

де

$$R\psi_t := (G\psi_t)^2 + \int_Z (U(z)\psi_t)^2 \Pi(dz).$$

Задача даної роботи полягає у знаходженні числа

$$k\colon = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln E|x(t)|^2}{t}, \tag{12}$$

яке називають характеристичним показником Ляпунова для НСДФРП [6].

Теорема 2. *Характеристичний показник* k *задачі* (1), (2) *визначається з умови*

$$B_k = \int_0^\infty R^{(k)} X_t^{(k)} dt,$$

де

$$\begin{gathered} R^{(k)}\psi_t := (G_k\psi_t)^2 + \int_Z (U_k(z)\psi_t)^2 \Pi(dz), \\ G_k\psi := \int_{-h}^{\varepsilon} \psi(s) e^{ks} dr_3(s); \qquad U_k(z)\psi := \int_{-h}^{\varepsilon} d_s r_4(s,z) e^{ks} \psi(s), \end{gathered} \tag{13}$$

$X^{(p)}(t)$ *задовольняє НДДФР*

$$dD_k X_t^{(k)} = L_k X_t^{(k)} dt \tag{14}$$

та початкову умову (4), *де*

$$D_k\psi := \int_{-h}^{\varepsilon} \psi(s) e^{ks} dr_1(s); \qquad L_k\psi := \int_{-h}^{\varepsilon} \psi(s) e^{ks} d(r_2(s) - kr_1(s)).$$

Доведення. Розглянемо допоміжну задачу для випадкового процесу $u(t) := u(t;p)$, який визначається з рівності

$$x(t) = e^{pt} u(t;p), \qquad p \in R^1.$$

Тоді

$$dx(t) = d(e^{pt} u(t;p)) = px(t)dt + e^{pt} du(t) = e^{pt}(pu(t)dt + du(t)).$$

Підставимо $x(t)$ в рівняння (1) і отримаємо НСДФРП відносно $u(t)$, так зване збурене НСДФРП

$$dD_p u_t = L_p u_t dt + G_p u_t dw(t) + \int\limits_Z U_p(z) x_t \widetilde{v}(dz, dt). \tag{15}$$

Для стійкості розв'язку задачі (15), (2) необхідно та достатньо виконання умов теореми 1.

Лема 2. *Мають місце такі співвідношення:*

$$\lim_{p\to 0} D_p\psi = D_0\psi \colon = D\psi, \qquad \lim_{p\to 0} L_p\psi = L_0\psi \colon = L\psi,$$

$$\lim_{p\to 0} G_p\psi = G_0\psi \colon = G\psi, \qquad \lim_{p\to 0} U_p(z)\psi = U_0(z)\psi \colon = U(z)\psi,$$

$$\lim_{p\to 0} V_p(z) = V_0(\lambda) := V(\lambda)$$

для $\forall\,\psi \in C([-h, 0])$, $\lambda \in \mathrm{C}$.

Доведення. Доведемо даний факт, наприклад, для функціонала L:

$$\|L\psi - L_p\psi\| = \left\| \int\limits_{-h}^{\varepsilon} \psi(s) dr_2(s) - \int\limits_{-h}^{\varepsilon} \psi(s) e^{ps} d(r_2(s) - pr_1(s)) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{-h\leqslant s\leqslant 0} |\psi(s)| \left(\int\limits_{-h}^{\varepsilon} |1 - e^{ps}| dr_2(s) + p \int\limits_{-h}^{\varepsilon} dpr_1(s) \right) \xrightarrow{p\to 0} 0.$$

Інші твердження даної леми доводяться аналогічно.

Лема 3. *При* $\rho < p$*:*

1) B_p *— неперервна функція;*

2) $B_p \to 0$ *при* $p \to \infty$.

Доведення.

1. Використовуючи подання (8), отримаємо

$$\|X^{(p_0)} - X^{(p)}\| = \frac{1}{2\pi} \left\| \int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=\mu} e^{\lambda t} V_{p_0}^{-1}(\lambda) d\lambda - \int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=\mu} e^{\lambda t} V_p^{-1}(\lambda) d\lambda \right\| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\| \int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=\mu} (e^{\lambda t} V_{p_0}^{-1}(\lambda) - e^{\lambda t} V_p^{-1}(\lambda)) d\lambda \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=\mu} |e^{\lambda t} V_{p_0}^{-1}(\lambda) - e^{\lambda t} V_p^{-1}(\lambda)| d\lambda \xrightarrow{p\to p_0} 0.$$

Враховуючи неперервність та обмеженість функціоналів G_p та $U_p(z)$, отримаємо

$$\|B_p - B_{p_0}\| \leqslant K_1 \|X^{(p_0)} - X^{(p)}\| + K_2 \|G_{(p_0)} - G_{(p)}\| + K_3 \|U_{(p_0)}(z) - U_{(p)}(z)\|,$$

де K_1, K_2, K_3 — обмежені константи.

Другий і третій доданки останньої нерівності прямують до 0 за лемою 2. Неперервність доведена.

2. Для доведення п. 2 леми скористаємося таким представленням B_p:

$$B_p = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{|Ge_p(is)|^2}{|V_p(is)|^2}ds + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{|Ue_p(is)|^2}{|V_p(is)|^2}ds,$$

де

$$Ge_p(\lambda) := \int\limits_{-h}^{\epsilon} dr_3(s)e^{(\lambda+p)s}, \qquad Ue_p(\lambda) := \int\limits_Z \int\limits_{-h}^{\epsilon} d_s r_4(s,z)e^{(\lambda+p)s}\Pi(dz),$$

$i = \sqrt{-1}$ — уявна одиниця. Даний факт є наслідком тереми Планшереля–Парсеваля.

Врахувавши те, що $|G_p(is)|^2 + |Ue_p(is)|^2 = O(\text{const})$ і $|V_p(is)|^2 = O(p^2)$ при $p \to \infty$, де $O(p)$ — функція, яка задовольняє співвідношення

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}\frac{O(p)}{p} = C \equiv \text{const},$$

приходимо до висновку, що

$$B_p \to 0 \qquad \text{при} \qquad p \to \infty.$$

Лема 3 доведена.

Для остаточного доведення теореми 2 зауважимо, що при $B_p > 1$ розв'язок НСД-ФРП (15) є нестійким в $l.i.m.$, при $B_p < 1$ — експоненційно стійким в $l.\,i.\,m.$ [5]. При $B_p = 1$ виконується умова теореми 2. В цьому випадку розв'язок $u(t;p)$ поводить себе на ∞ не більше, ніж $Kt^n, n \in N$, тобто

$$\lim_{t\to\infty}\frac{Eu^2(t;p)}{Kt^n} = 0.$$

А це в свою чергу означає, що

$$k = \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln Eu^2(t;p)}{t} \leqslant \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{2n\ln(t)}{t} = 0,$$

що, з урахуванням означення випадкового процесу $u(t;p)$ і доводить теорему 2.

Автор висловлює щиру вдячність акад. АН ВШ В. К. Ясинському та акад. НАН України В. С. Королюку за увагу до даної роботи та цінні поради.

1. *Жакод Ж., Ширяев А. Н.* Предельные теоремы для случайных процессов. В 2-х т. – Москва: Физматизд, 1994. – Т. 2. – 473 с.
2. *Беллман Р., Кук К. Л.* Дифференциально-разностные уравнения. – Москва: Мир, 1967. – 545 с.
3. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – Москва: Мир, 1984. – 420 с.
4. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 612 с.
5. *Царков Є. Ф., Малик І. В.* Поведінка в середньому квадратичному розв'язку лінійних стохастичних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. праць. Вип. 374. Математика. – Чернівці: Рута, 2008. – 156 с.

6. *Xuerong Mao, Yi Shen, Chenggui Yuan.* Almost surely asymptotic of neutral stochastic differential delay equations with Markovian switching // Stochastic Processes and their Applications. – 2008. – **118**. – P. 1385–1406.

Чернівецький національний університет
ім. Юрія Федьковича

Надійшло до редакції 13.10.2009

I. V. Malyk

Characteristic exponent of a solution of the stochastic functional differential equation of the neutral type with an integral on Poisson's measure

The criterion for the determination of the characteristic Lyapunov's exponent of a solution of the stochastic functional differential equation of the neutral type with an integral on Poisson's measure is obtained.