УДК 519.8

Н. В. Семенова, Л. М. Колєчкіна, А. М. Нагірна

Багатокритеріальні задачі лексикографічної оптимізації на нечіткій множині альтернатив

(Представлено академіком НАН України І. В. Сергієнком)

Досліджені багатокритеріальні задачі лексикографічної оптимізації на нечіткій комбінаторній множині перестановок. На основі побудованої опуклої оболонки нечіткої множини перестановок, яка є опуклим многогранником, вивченні її структурних властивостей розроблені та обґрунтовані модифікації методів багатокритеріального вибору на випадок нечітко заданої допустимої комбінаторної множини.

Досить часто в прикладних задачах вхідні дані не можуть бути точно задані. Такі ситуації відображають недостатність інформації для постановки задачі, отже при нечітких умовах і критеріях прийняття рішення стає проблемним. При моделюванні реальних задач нечіткість виявляється у формі опису функцій і параметрів, від яких вони залежать. Зручним математичним інструментарієм, за допомогою якого описується і враховується подібного роду інформація, є теорія нечітких множин, запропонована в [1].

Нечіткі множини широко використовуються в різного роду застосуваннях штучного інтелекту, теорії розпізнавання образів, прийняття рішень тощо.

У багатьох практичних задачах дослідження операцій, проектування складних систем, виникає необхідність прийняття рішення з урахуванням декількох критеріїв оптимальності. Водночас досить поширеними на практиці є задачі багатокритеріального вибору, в яких задана скінченна множина альтернатив і альтернативи можуть оцінюватися як кількісно, так і якісно. Особливість багатокритеріальних задач як способу моделювання полягає в тому, що в умовах багатокритеріальності вибір найбільш доцільного рішення здійснюється з множини непокращуваних альтернатив. Проблема знаходження цієї множини має велике практичне і теоретичне значення. Крім того, у реальних задачах потужність множини альтернатив дуже велика, що робить задачу прийняття рішення досить складною. У роботі [2] дано математичне формулювання і наведено аксіоматичне обґрунтування відомого ще з XIX ст. принципу Еджворта–Парето для випадку чіткого відношення переваги особи, що приймає рішення. Цей принцип є основним при виборі найкращих рішень в економіці, техніці та інших областях людської діяльності в тих випадках, коли необхідно враховувати відразу кілька цільових функцій (критеріїв). З'ясувалося, що він не універсальний, а справедливий лише при розв'язанні певного (хоча і досить широкого) класу задач багатокритеріального вибору. За межами цього класу його застосування або ризиковане, або взагалі неприпустиме.

У даній роботі принцип Еджворта–Парето поширюється на більш широкий клас задач багатокритеріального вибору, в яких множина можливих розв'язків є нечіткою.

Значний внесок у розробку методів багатокритеріальної оптимізації, а також їх застосування в задачах керування складними системами, їх проектування зробили Р. Кіні, Х. Райфа, В. Л. Волкович, О. С. Венцель, Ю. Б. Гермейєр, І. В. Сергієнко, В. О. Перепелиця, Ю. Ю. Червак та ін. Різним аспектам теорії задач векторної оптимізації присвячені роботи багатьох учених, зокрема [2–8]. Важлива роль у розробці нових методів дослідження та розв'язання комбінаторних задач дискретної оптимізації належить українським ученим І. В. Сергієнку, В. С. Михалевичу, Н. З. Шору та ін. Створені ними методи широко застосовуються при розв'язанні задач теорії розкладів, розміщення нових виробництв, проектування мереж різного призначення, магістральних газопроводів.

В наш час досить актуальні задачі з урахуванням нечітких границь як у цільових функціях, так і в обмеженнях, заданих на комбінаторних множинах. Задача нечіткого вибору — пряме узагальнення задачі звичайного (чіткого) вибору, її дослідження становить безсумнівний теоретичний і практичний інтерес. Що стосується практичної сторони, то розв'язки задачі (нечітка множина обраних рішень) цілком можуть скласти основу для наступного остаточного вибору.

У роботах [9–11] розглянуто багатокритеріальні задачі за умов нечітко заданої інформації про цільові функції та допустиму область задачі, а в [12–15] — задачі на комбінаторних множинах. Очевидно, доцільно розглянути задачу, що поєднує вищезазначені.

У цій статті задача векторної оптимізації визначена на комбінаторній множині перестановок, отже варто враховувати, що опуклою оболонкою такої множини є загальний переставний многогранник, множиною вершин якого є розглянута комбінаторна множина [13–14]. Вивчені властивості указаної комбінаторної множини дають можливість розглядати розв'язання задачі, визначеної на дискретній комбінаторній множині, як задачі на неперервній допустимій множині. Нижче досліджена багатокритеріальна задача з урахуванням комбінаторних властивостей нечітко заданої області допустимих альтернатив, запропоновані підходи до її розв'язання.

1. Основні поняття та означення. Нечіткі підмножини відрізняються від звичайних, чітких підмножин тим, що в нечіткій підмножині ступінь належності елемента множині може бути будь-яким числом одиничного інтервалу $[0, 1]$, а не тільки одним із двох значень $\{0, 1\}$, як у випадку індикаторів звичайних підмножин. Ця властивість нечітких підмножин забезпечує можливість теоретико-множинного подання реальних неточних понять, що дуже корисно, зокрема при розробці принципів штучного інтелекту ЕОМ, які моделюють процеси мислення людини.

Незалежно від того, що використовувати — нечіткі або чіткі підмножини, визначення ступенів належності спирається на деякі суб'єктивні критерії особи, що приймає рішення. Однак, якщо при визначенні чітких підмножин відбувається вибір одного з двох чисел — нуля чи одиниці, то для визначення нечітких підмножин можливості вибору ступенів належності набагато різноманітніші. В ряді випадків визначення часткових значень ступенів належності елементів нечітких множин приводить до значних труднощів у роботі з нечіткими поняттями.

Формально загальна задача нечіткого математичного програмування описується у такий спосіб [10]. Нехай X — універсальна множина альтернатив і $\mu_A\colon X \to [0, 1]$ — задана нечітка підмножина допустимих альтернатив; Y — універсальна множина оцінок результатів виборів альтернатив з множини X і $\mu_R\colon Y \times Y \to [0, 1]$ — задане на множині Y нечітке відношення переваги. Вибори альтернатив оцінюються нечіткими значеннями заданої нечіткої функції мети $\varphi\colon X \times Y \to [0, 1]$. Задача полягає в раціональному виборі альтернатив на основі інформації, заданої в описаній вище формі.

Наступним кроком на шляху уточнення розглянутої тут моделі є опис параметрів задачі у формі нечітких множин. При цьому, крім задання множини можливих значень параметрів, у модель вводиться додаткова інформація у вигляді функцій належності цих нечітких множин. Ці функції можна розглядати як спосіб наближеного відображення експертом в агрегованому вигляді наявного в нього неформалізованого уявлення про реальну величину даного параметра. Значення функції належності можна розуміти як вагові коефіцієнти, які експерт приписує різним можливим значенням цього параметра.

Безсумнівно, що врахування подібної додаткової інформації ускладнює вхідну математичну модель, проте вона може виявитися простішою (і разом з тим прийнятно точною) моделлю, що враховує різноманіття додаткових факторів, про які говорилося вище.

Визначимо для подальшого викладу узагальнення понять мультимножини, n-вибірки і комбінаторної множини перстановок на випадок нечітко заданої інформації.

Означення 1. Нечіткою мультимножиною $\widetilde{X}$, заданою на універсальній мультимножині X, називається сукупність пар $(x, \mu_{\widetilde{X}}(x))$, де $x \in X$, а $\mu_{\widetilde{X}}(x)$ — функція $x \to [0,1]$, що має назву функції належності мультимножині $\widetilde{X}$. Значення $\mu_{\widetilde{X}}(x)$ для конкретного x називається ступенем належності цього елемента нечіткій мультимножині $\widetilde{X}$.

Нагадаємо, що мультимножини, згідно з означенням, утворюють підклас нечітких мультимножин. Над мультимножинами, так само як і над звичайними множинами, виконується ряд операцій, таких як об'єднання, перетин, декартовий добуток, різниця та ін. Такі ж операції мають місце і для нечітких мультимножин [15].

Нехай задана нечітка мультимножина

$$\widetilde{A} = \{a_1, \mu_{\widetilde{A}}(a_1), a_2, \mu_{\widetilde{A}}(a_2) \ldots, a_q, \mu_{\widetilde{A}}(a_q)\},$$

її основа

$$S(\widetilde{A}) = \{e_1, \mu_{\widetilde{A}}(e_1), e_2, \mu_{\widetilde{A}}(e_2), \ldots, e_k, \mu_{\widetilde{A}}(e_k)\},$$

де

$$\mu_{\widetilde{A}}(e_i) = \min\{\mu_{\widetilde{A}}(a_{i_j}) \,\big|\, a_{i_j} = a_{i_t}, j \neq t, \forall\, i, j, t \in N_q\}, \qquad e_j \in R \qquad \forall\, j \in N_k = \{1, \ldots, k\}$$

і кратність елементів

$$k(e_j) = r_j, \qquad j \in N_k, \qquad r_1 + r_2 + \cdots + r_k = q.$$

Упорядкованою нечіткою n-вибіркою з нечіткої мультимножини A називається набір

$$a = (a_{i_1}, \mu_{\widetilde{A}}(a_{i_1}), a_{i_2}, \mu_{\widetilde{A}}(a_{i_2}), \ldots, a_{i_n}, \mu_{\widetilde{A}}(a_{i_n})), \tag{1}$$

де

$$(a_{i_j}, \mu_{\widetilde{A}}(a_{i_j})) \in \widetilde{A} \quad \forall\, i_j \in N_k, \quad \forall\, j \in N_k, \quad i_s \neq i_t, \quad \text{якщо} \quad s \neq t \quad \forall\, s \in N_k, \quad \forall\, t \in N_k.$$

Означення 2. Нечітка множина $P(\widetilde{A})$, елементами якої є нечіткі n-вибірки вигляду (1) з нечіткої мультимножини $\widetilde{A}$, називається нечіткою евклідовою комбінаторною множиною, якщо для довільної пари її елементів $a' = (a'_1, \mu_{\widetilde{A}}(a'_1), a'_2, \mu_{\widetilde{A}}(a'_2), \ldots, a'_n, \mu_{\widetilde{A}}(a'_n))$, $a'' = (a''_1, \mu_{\widetilde{A}}(a''_1), a''_2, \mu_{\widetilde{A}}(a''_2), \ldots, a''_n, \mu_{\widetilde{A}}(a''_n))$ виконуються умови:

$$(a' \neq a'') \Leftrightarrow (\exists\, j \in N_n \colon (a'_j, \mu_{\widetilde{A}}(a'_j)) \neq (a''_j, \mu_{\widetilde{A}}(a''_j)),$$

тобто множина $P(\widetilde{A})$ має таку властивість: два елементи множини $P(\widetilde{A})$ відмінні один від одного, якщо вони незалежно від інших відмінностей розрізняються порядком розміщення символів, що їх утворюють, і ступенем належності нечіткій множині $P(\widetilde{A})$.

Нечітка множина перестановок з повтореннями з n дійсних чисел, серед яких k різних, називається загальною нечіткою множиною перестановок і позначається $P_{nk}(\widetilde{A})$.

Означення 3. Опуклою комбінацією нечітких множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$ в $\mathbb{R}^n$ називається нечітка множина A з функцією належності вигляду

$$\mu_A(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i(x), \qquad \text{де} \qquad \lambda_i \geqslant 0, \qquad i \in N_n, \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Будемо розглядати елементи нечіткої множини перестановок з повтореннями як точки арифметичного евклідового простору $\mathbb{R}^n$.

Відомо, що кожен елемент множини $P_{nk}(\widetilde{A})$ є упорядкованим набором n дійсних чисел, з яких k — різні. Не втрачаючи загальності, упорядкуємо елементи мультимножини $\widetilde{A}$ в такий спосіб:

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n. \tag{2}$$

Разом з класичним переставним многогранником, введеним Радо [13], опишемо загальний переставний многогранник $\Pi_{nk}(A)$, який є опуклою оболонкою загальної множини перестановок $P_{nk}(A)$ [14]:

$$\left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_j, \qquad \sum_{j=1}^{i} x_{\alpha_j} \geqslant \sum_{j=1}^{i} a_j \right. , \tag{3}$$

$$\alpha_j \in N_n, \quad \alpha_j \neq \alpha_t, \quad \forall\, j \neq t, \quad \forall\, j,t \in N_i, \quad \forall\, i \in N_n, \quad \text{а} \quad P_{nk}(A) = \operatorname{vert} \Pi_{nk}(A).$$

Нечіткий опуклий многогранник $\Pi_{nk}(\widetilde{A})$ також можна подати як опуклу оболонку нечіткої комбінаторної множини перестановок

$$\Pi_{nk}(\widetilde{A}) = \operatorname{conv} P_{nk}(\widetilde{A}).$$

2. Постановка задачі. Як правило, під задачею багатокритеріальної оптимізації розуміють задачу знаходження мінімуму або максимуму векторного критерія на допустимій множині альтернатив. За допомогою векторної цільової функції формально представляються основні властивості альтернатив: цінність, корисність, вартість та ін. Нечіткість у постановці задачі багатокритеріальної оптимізації може міститися як в описі множини альтернатив, так і в описі функцій критеріїв. Різні форми опису вхідної інформації зумовлюють існування різних формулювань нечітких задач оптимізації: а) задача досягнення нечітко поставленої мети при нечітких обмеженнях; б) задача нечіткої оптимізації при нечіткій множині допустимих альтернатив; в) нечіткий варіант стандартної задачі оптимізації зі “зм’якшенням” критеріїв і/або обмежень, де замість задачі оптимізації розв’язується задача задоволення мети і відповідні нерівності для критеріїв та обмежень можуть порушуватися; г) задача векторної оптимізації з нечіткими коефіцієнтами та ін.

У даній роботі задача полягає в максимізації векторної функції F на нечіткій евклідовій комбінаторній множині $\widetilde{X}$.

Розглядається багатокритеріальна задача комбінаторної оптимізації

$$Z(F,X)\colon\ \max\{F(x)\mid x\in X\subset\mathbb{R}^n\},\quad F(x)=(f_1(x),\ldots,f_l(x)),\quad f_i\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\quad i\in N_l,$$
$$X=\operatorname{vert}\Pi_{nk}(A)\bigcap D\neq\varnothing,\qquad \Pi_{nk}(A)=\operatorname{conv}P_{nk}(A),$$

$P_{nk}(A)$ — комбінаторна множина перестановок; $D\subset\mathbb{R}^n$ — опуклий многогранник.

На множині X задана нечітка підмножина $\widetilde{X}=\{x,\mu_{\widetilde{X}}(x)\}$, де $x\in X$, а $\mu_{\widetilde{X}}(x)\colon X\to\to[0,1]$ — функція належності множині $\widetilde{X}$, що називається нечіткою множиною альтернатив. Під максимізацією будемо розуміти вибір нечіткої підмножини R з нечіткої множини $\widetilde{X}$, якій відповідає найбільше значення, як векторної функції F, так і функції належності $\mu_{\widetilde{X}}(x)$ нечіткої множини альтернатив. Ці альтернативи в задачах багатокритеріальної оптимізації залежно від способу їх порівняння називаються ефективними (оптимальними за Парето), слабко ефективними (за Слейтером), строго ефективними (за Смейлом) і відповідно позначаються: $P(F,\widetilde{X})$, $Sl(F,\widetilde{X})$, $Sm(F,\widetilde{X})$.

Нагадаємо [2], що альтернатива $x*\in\widetilde{X}$ називається ефективною, якщо не існує іншої алтернативи $x\in\widetilde{X}$, такої що: $F(x)\geqslant F(x*)$, $\mu_D(x)\geqslant\mu_D(x*)$ і хоча б одна нерівність строга; слабко ефективною, якщо $\overline{\exists}\,x\in\widetilde{X}$: $F(x)>F(x*)$, $\mu_D(x)>\mu_D(x*)$, і строго ефективною, якщо $\overline{\exists}\,x\in\widetilde{X}$: $x\neq x*$, $F(x)\geqslant F(x*)$, $\mu_D(x)\geqslant\mu_D(x*)$.

З означень маємо $Sm(F,\widetilde{X})\subset P(F,\widetilde{X})\subset Sl(F,\widetilde{X})$.

Вхідну задачу $Z(F,X)$ наведемо у вигляді $(l+1)$-критеріальної задачі:

$$F(x)\to\max,\qquad \mu_{\widetilde{X}}(x)\to\max,\qquad x\in\widetilde{X}.$$

Під розв'язком задачі з нечіткою множиною альтернатив розуміємо нечітку множину з функцією належності:

$$\mu(x)=\{\mu_{\widetilde{X}}(x)\mid x\in P(F,\widetilde{X})\vee 0\mid x\notin P(F,\widetilde{X})\}.$$

Таким чином, нечітка множина розв'язків буде включати ті і тільки ті альтернативи універсальної множини X, які дають значення векторної функції $F(x)$ і функції належності $\mu_{\widetilde{X}}(x)$, $x\in\widetilde{X}$, непокращувані одночасно.

Слід відзначити, що нечіткий варіант цієї задачі означає, що обмеження пом'якшуються, тобто допускається можливість їх порушення з тим чи іншим ступенем.

Нехай $\widetilde{Y}=\{y\in R^l\mid y=F(x),\ x\in\widetilde{X}\}$ — множина досяжних векторних оцінок, що задаються нечіткими значеннями векторів оцінок $y=(y_1,\ldots,y_l)$ і $P(\alpha)$ — множина всіх ефективних альтернатив $(l+1)$-критеріальної задачі:

$$y_i\to\max,\qquad i\in N_l,\qquad \mu_D(x)\to\max,$$
$$F(x)\geqslant\alpha,\qquad x\in X,\qquad y=(y_1,\ldots,y_l)\in Y.$$

Тоді розв'язком векторної задачі нечіткої оптимізації з нечіткою множиною альтернатив і зі ступенем недомінованості альтернатив, не меншим за α, називається нечітка множина з функцією належності вигляду:

$$\mu_\alpha(x)=\begin{cases}\mu_{\widetilde{X}}(x), & x\in P_\alpha(F,\widetilde{X}),\\ 0, & x\notin P_\alpha(F,\widetilde{X}).\end{cases}$$

Таким чином, нечітка множина розв'язків вхідної задачі буде містити в собі ті і тільки ті альтернативи зі ступенем недомінованості, не меншим за α, що будуть ефективними як за оцінками альтернатив y_i, $i \in N_l$, так і за функцією належності $\mu_{\widetilde{X}}(x)$ нечіткій множині альтернатив. Вибір з них деякої конкретної альтернативи здійснюється за допомогою методів багатокритеріальної оптимізації.

Більш того, замість задачі максимізації можна поставити задачу досягнення деякого наперед заданого значення цільової функції, що відповідає задоволенню вхідної мети.

3. Підходи до розв'язання задачі. Існує багато методів розв'язання багатокритеріальних задач, але значна їх частина створена для розв'язання задач вибору альтернатив у чіткому середовищі. Деяка модифікація робить їх застосовними і в умовах нечіткості.

Розробка методів розв'язання поставленої задачі $Z(F, X)$ в умовах нечіткої визначеності вимагає знання і використання результатів операцій знаходження суми, добутку, мінімуму і максимуму нечітких величин.

Під нечітким числом будемо розуміти нечітку множину з областю визначення у вигляді інтервалу дійсної осі $\mathbb{R}$. Множину усіх нечітких чисел, визначених на $\mathbb{R}^1$, позначимо $\widetilde{\mathbb{R}}^1$. Нехай x і y — два нечітких числа з носіями $S_x = (a_1, a_2)$ і $S_y = (b_1, b_2)$ відповідно; $a_2 > a_1$, $b_2 > b_1$; $g\colon R^1 \times R^1 \to R^1$ — деяка функція. Тоді відповідно до принципу узагальнення нечітке число $D = g(x, y)$ визначається функцією належності

$$\mu_D(z) = \sup_{\substack{g(a,b)=z \\ a\in S_x,\ b\in S_y}} \min\{\mu_x(a), \mu_y(b)\}. \tag{4}$$

Нехай $\otimes$ — одна з чотирьох арифметичних операцій: $+$, $-$, $\cdot$, $/$; $g(a,b) = a \otimes b$. Тепер формула (4) визначає результат арифметичної операції $\otimes$ над нечіткими числами x і y. Якщо $g(\cdot)$ — функція не двох, а n аргументів, то принцип узагальнення формулюється аналогічно (4).

При порівнянні двох нечітких величин необхідно дати визначення рівності цих величин.

Означення 4. Дві нечіткі величини (два числа) $(x_1, \mu_1(x_1))$ і $(x_2, \mu_2(x_2))$ будемо вважати рівними, якщо $x_1 = x_2$ і $\mu_1(x_1) = \mu_2(x_2)$.

Означення 5. Якщо виконуються умови $x_1 \geqslant x_2$, $\mu_1(x_1) \geqslant \mu_2(x_2)$ і одна з цих нерівностей строга, то нечітка величина $(x_1, \mu_1(x_1))$ більше нечіткої величини $(x_2, \mu_2(x_2))$.

Запропоновано підхід, що грунтується на методі послідовних поступок. При розв'язанні багатокритеріальної задачі методом послідовних поступок спочатку визначається якісний аналіз відносної важливості часткових критеріїв. Особливістю даного методу є те, що критерії задачі повинні бути попередньо пронумеровані за спаданням їх важливості, таким чином, що головним є критерій $f_1(x)$, менш важливий — критерій $f_2(x)$, потім слідують інші часткові критерії $f_3(x)$, $f_4(x)$, $\ldots$, $f_l(x)$. Максимізується перший за важливістю критерій $f_1(x)$ і визначається його найбільше значення f_1^*. Потім встановлюється величина допустимого зниження (поступки) $\Delta_1 \geqslant 0$ критерію $f_1(x)$ і шукається найбільше значення f_2^* другого критерію $f_2(x)$ за умови, що значення першого критерію повинне бути не менше, ніж $f_1^* - \Delta_1$. Знову встановлюється величина поступки $\Delta_2 \geqslant 0$, але вже за другим критерієм, що разом з першою поступкою використовується при знаходженні умовного максимуму третього критерію і т. д. Нарешті, максимізується останній за важливістю критерій $f_l(x)$ за умови, що значення кожного критерію $f_r(x)$ з $l-1$ попередніх повинно бути не менше відповідної величини $f_r^* - \Delta_r$, тоді одержані альтернативи вважаються оптимальними.

Таким чином, метод розв'язання задачі здійснюється шляхом виконання багатокрокової процедури і полягає в послідовному включенні обмежень задачі $Z(F, X)$ та врахуванні структурних особливостей її допустимої області. Оптимальним вважається той розв'язок, що є розв'язком останньої задачі з такої послідовності задач:

$$f_1^* = \max\{f_1(x) \mid x \in X\}, \qquad f_2^* = \max\{f_2(x) \mid x \in X, f_1(x) \geqslant f_1^* - \Delta_1\}, \qquad \ldots,$$
$$f_l^* = \max\{f_l(x) \mid x \in X, f_{r-1}(x) \geqslant f_{r-1}^* - \Delta_{r-1}, r \in N_l \setminus \{1\}\}.$$

Слід відзначити, що у випадку, коли всі Δ_r — нулі, метод послідовних поступок виділяє тільки лексикографічно оптимальні стратегії; ці стратегії доставляють найбільший на множині допустимих значень розв'язок першому за важливістю критерію $f_1(x)$. Тому величини поступок, встановлені для багатокритеріальної задачі, можна розглядати як своєрідну міру відхилення пріоритету (ступеня відносної важливості) часткових критеріїв від жорсткого, лексикографічного.

Якщо відсутня інформація як про переваги на множині альтернатив, так і про переваги на множині критеріїв, то як правило, використовуються найпростіші методи: мінімаксний, максимаксний та ін. При наявності інформації тільки про порівняльну важливість оцінок за кожним з критеріїв користуються методами послідовного розгляду альтернатив за окремими критеріями (лексикографічний метод, метод перестановок, метод послідовного скорочення тощо), якщо переваги особи, що приймає рішення (ОПР), на множині критеріальних оцінок виражені в порядкових шкалах і задані стосовно ваги критеріїв, то використовуються методи голосування, найбільш відомим з яких у прийнятті рішень є метод Б. Руа.

Якщо можуть бути отримані відносні ваги критеріїв і відносні цінності критерільних оцінок за окремими критеріями, то застосовується багато різних методів. Це прості прямі методи оцінювання альтернатив з використанням заздалегідь заданих оцінюючих функцій (наприклад, адитивної зваженої згортки оцінок за всіма критеріями), і методи теорії корисності, що вимагають тривалого діалогу з ОПР, і підпорядкування останнього відомій аксіоматиці.

Якщо поряд з інформацією про важливість критеріїв відомі ідеальні критеріальні оцінки, можливе застосування методів оцінки досяжності цілей.

Більш докладно згадані методи викладені в [9]. Розглянемо деякі прості методи вибору альтернатив [11] і покажемо, яким чином при необхідності може бути розширена область їх застосування.

Нехай задані або обчислені нечіткі оцінки $f_{ij} = f_i(x_j)$ альтернатив x_j, $j \in N_n$, за критеріями f_i, $i \in N_l$.

4. Метод знаходження лексикографічно оптимальних розв'язків на нечітко заданій допустимій комбінаторній множині перестановок. Застосування методу при нечіткій вхідній інформації зводиться до таких дій:

1) критерії упорядковуються за важливістю: $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_l(x)$;

2) за згодою ОПР призначити рівень $\alpha \in [0, 1]$, для якого визначається множина кращих альтернатив відповідно до кроків 3–5;

3) визначити нижню (l) і верхню (u) межі α-рівневих підмножин для оцінки альтернатив за розглянутим критерієм:

$$l(f_{ij}) = \inf_{\mu_{f_{ij}}(x) \geqslant \alpha} x, \qquad u(f_{ij}) = \sup_{\mu_{f_{ij}}(x) \geqslant \alpha} x;$$

4) для кожної пари альтернатив z, $y \in X$ обчислити показники взаємного перевищення критеріальних оцінок $\zeta_{zy}(z < y)$ і $\zeta_{yz}(y < z)$:

а) якщо оцінки такі, що $f^{\alpha}_{iy} \subset f^{\alpha}_{iz}$, то

$$\zeta_{zy} = \frac{u(f_{iz}) - u(f_{iy})}{u(f_{iz}) - l(f_{iz})}, \qquad \zeta_{yz} = \frac{l(f_{iy}) - l(f_{iz})}{u(f_{iz}) - l(f_{iz})}, \tag{5}$$

де z, $y \in A$;

б) якщо оцінки перетинаються і $\exists\, x_0 \in S_{f_{iz}} : \forall\, y \in S_{f_{iy}}$, виконується $x_0 > y$, то

$$\zeta_{zy} = 1 - \frac{u(f_{iy}) - l(f_{iz})}{\max\{r(z), r(y)\}}, \qquad \zeta_{yz} = 0, \tag{6}$$

де $r(z) = u(f_{iz}) - l(f_{iz})$, $r(y) = u(f_{iy}) - l(f_{iy})$;

в) якщо оцінки не перетинаються і $\forall\, x_0 \in S_{f_{iz}}$, $\forall\, y \in S_{f_{iy}}$ виконується $x > y$, то

$$\zeta_{zy} = 1, \qquad \zeta_{yz} = 0; \tag{7}$$

5) обчислити показники $\mu_{D_{ij}}$ належності j-ї альтернативи множині кращих (D-множині) за i-м критерієм $\mu_{D_{ij}} = \max\{0, (\max\limits_{j \in X,\ y \neq j} \zeta_{jy} - \max\limits_{y \in X,\ y \neq j} \zeta_{yj})\}$, де ζ_{jy}, ζ_{yj} обчислені за формулами (5), (6) для i-го критерію;

6) якщо D-множина за розглянутим критерієм містить рівно одну альтернативу з $\mu_{D_{ij}} \geqslant \alpha$, то вона вважається кращою. Якщо D-множина містить більше ніж одну альтернативу з $\mu_{D_{ij}} \geqslant \alpha$, то вибирається наступний по важливості критерій і повторюються кроки 3–5. Якщо всі критерії переглянуті, D-множина містить більш однієї альтернативи і $\alpha < 1$, то можна збільшити α і перейти до кроку 3. Якщо $\alpha = 1$, то остаточний вибір кращої альтернативи надається ОПР.

Розглянемо ще один простий метод вибору альтернатив при відсутності інформації про переваги на множині критеріїв за узагальненим критерієм песимізму (максиміну), який є розвитком методу Вальда на випадок нечітко заданих альтернатив.

5. Метод вибору альтернатив за узагальненим критерієм песимізму (максиміну).

1. Для кожного критерію обчислити нечітку максимальну критеріальну оцінку $f_{i\,\max} = \widetilde{\max}\{f_i(x_j) \,|\, x_j \in \widetilde{X},\ j \in N_n\}$, $i \in N_l$, по кожному з критеріїв.

2. Обчислити приведені нормалізовані оцінки альтернатив за критеріями $f_{ij^*} = f_i(x_j)/f_{i\,\max}$, $x_j \in \widetilde{X}$, $j \in N_n$.

3. Обчислити мінімальну критеріальну оцінку для кожної альтернативи $f_{j\,\min}$, визначену як $f_{j\,\min} = \widetilde{\min}\{f_{ij^*} \mid f_{ij^*} \in N_l\}$, $j \in N_n$.

4. Знайти узагальнений максимум отриманих мінімальних оцінок $f_{0\,\max} = \widetilde{\max}\{f_{j\,\min} \mid j \in N_n\}$.

5. Оцінити ступінь подібності $f_{0\,\max}$ кожної з оцінок $f_{j\,\min}$. Як показник подібності нечітких чисел може бути використана величина $\xi_j = \sum\limits_{z \in [0,1]} |\mu_{f_{0\,\max}}(z) - \mu_{f_{j\,\min}}(z)|$.

6. Вибрати альтернативу з максимальним індексом ξ_j.

Якщо альтернатива вибирається за максимаксним принципом, то у п. 3 слід замість $f_{j\,\min}$ обчислити $f_{j\,\max} = \widetilde{\max}\{f_{ij^*} \mid i \in N_l\}$, $j \in N_n$, та в інших пунктах замість $f_{j\,\min}$ використовувати значення $f_{j\,\max}$, $j \in N_n$.

Таким чином, розроблено методи розв'язання багатокритеріальних задач при нечіткій вхідній інформації. Залежно від специфіки задачі можливі застосування й інших модифікованих на випадок нечітко заданої інформації методів багатокритеріального вибору. Узагальнення чіткого методу, як правило, не становить труднощів, якщо адекватно умовам розв'язуваної задачі обрані способи подання нечітких понять, реалізації нечітких обчислень, порівняння нечітких чисел, формування нечіткої множини кращих альтернатив.

У даній роботі в результаті проведеного дослідження векторної комбінаторної задачі, що грунтується на використанні інформації про опуклу оболонку допустимої області, вивченні властивостей многогранника, вершини якого визначає нечітко задана комбінаторна множина перестановок, розроблений і обгрунтований метод розв'язання складних багатокритеріальних задач на зазначеній комбінаторній множині. Використання структурних властивостей комбінаторних многогранників дає можливість розробляти ефективні алгоритми розв'язання нових класів векторних задач комбінаторної оптимізації за умов нечітко заданих даних.

1. *Zadeh L. A.* Fuzzy sets // Inform. and Control. – 1965. – **8**. – P. 338–353.
2. *Подиновский В. В., Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – Москва: Наука, 1982. – 256 с.
3. *Сергиенко И. В., Шило В. П.* Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования. – Киев: Наук. думка, 2003. – 264 с.
4. *Лебєдева Т. Т., Семенова Н. В., Сергієнко Т. І.* Умови оптимальності та розв'язуваності в задачах лінійної векторної оптимізації з опуклою допустимою множиною // Доп. НАН України. – 2003. – № 10. – С. 80–85.
5. *Семенова Н. В., Колечкина Л. Н., Нагорная А. Н.* Подход к решению векторных задач дискретной оптимизации на комбинаторном множестве перестановок // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 3. – С. 158–172.
6. *Семенова Н. В., Колечкина Л. Н., Нагорная А. Н.* Решение и исследование векторных задач комбинаторной оптимизации на множестве полиперестановок // Пробл. управления и информатики. – 2008. – № 6. – С. 26–41.
7. *Семенова Н. В.* Условия оптимальности в векторных задачах комбинаторной оптимизации // Теорія оптимальних рішень. – 2008. – № 7. – С. 153–160.
8. *Семенова Н. В., Колєчкіна Л. М., Нагірна* А. М. Розв'язання багатокритеріальних задач оптимізації на множині поліперестановок // Доп. НАН України. – 2009. – № 2. – С. 41–48.
9. *Аверкин А. Н., Батыршин И. З., Блишун А. Ф. и др.* Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д. А. Поспелова. – Москва: Наука, 1986. – 312 с.
10. *Орловский С. А.* Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. – Москва: Наука, 1981. – 208 с.
11. *Борисов А. Н., Алексеев А. В., Меркурьева Г. В. и др.* Обработка нечеткой информации в системах принятия решений. – Москва: Радио и связь, 1989. – 304 с.
12. *Сергиенко И. В., Каспшицкая М. Ф.* Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. – Киев: Наук. думка, 1981. – 287 с.
13. *Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К.* Многогранники, графы, оптимизация. – Москва: Наука, 1981. – 344 с.
14. *Стоян Ю. Г., Яковлев С. В.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – Киев: Наук. думка, 1986. – 265 с.
15. *Ємець О. О., Ємець О. О.* Деякі операції та відношення над нечіткими числами // Наук. вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 5. – С. 39–46.

Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 10.11.2009

N. V. Semenova, L. M. Kolechkina, A. M. Nagirna

Multicriterial problems of lexicographic optimization on a fuzzy set of alternatives

The multicriterial problems of lexicographic optimization on a fuzzy combinatorial set of permutations are explored. On the basis of the built convex hull of a fuzzy set of permutations, which is a convex polyhedron, and the study of its structural properties, modifications of methods of multicriterial choice in case of a fuzzy feasible combinatorial set are developed and grounded.