УДК 512.64

В. П. Щедрик

Про інваріантні множники блочно-трикутних матриць та їх діагональних блоків

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Б. Й. Пташником)

За певних обмежень на канонічну діагональну форму блочно-трикутної матриці встановлено взаємозв'язок між інваріантними множниками її діагональних блоків.

У 1952 р. була опублікована стаття У. Рота [1], яка вирізнялась серед інших не лише тим, що в ній була повністю розв'язана поставлена задача — вражала елегантність формулювання основного результату. А саме: було показано, що матричне рівняння над полем

$$AX + YB = C \tag{1}$$

($AX + XB = C$) має розв'язок тоді і тільки тоді, коли матриці $\begin{Vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{Vmatrix}$ та $\begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{Vmatrix}$ еквівалентні (подібні) між собою. Є зрозумілим бажання інших дослідників узагальнити цей результат. Серед багатьох робіт, присвячених цій тематиці виділимо лише декілька. Так, у [2] показано, що результат Рота, який стосується розв'язності рівняння (1) (надалі властивість Рота), залишається правильним у випадку комутативних областей головних ідеалів. В [3] цей результат було узагальнено на випадок довільних комутативних кілець. У роботі [4] було підкреслено важливість отриманих результатів і введено поняття кілець з властивістю Рота, як таких кілець, над якими є правильною властивість Рота. Зокрема, прикладом таких кілець є комутативні області елементарних дільників [5]. Над такими кільцями еквівалентність матриць рівносильна рівності (з точністю до асоційовності) відповідних інваріантних множників цих матриць. Тобто в цьому випадку задача розв'язності матричного рівняння (1) зводиться до встановлення взаємозв'язку між інваріантними множниками блочно-трикутної матриці з її діагональними блоками. Перший результат у цьому напрямку був отриманий М. Ньюменом [6]. Він показав, що над комутативними областями головних ідеалів у випадку, коли $(\det A, \det B) = 1$, множина елементарних дільників матриці $\begin{Vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{Vmatrix}$ є об'єднанням елементарних дільників матриць A і B. Дана робота присвячена дослідженню взаємозв'язку між інваріантними множниками матриць $\begin{Vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{Vmatrix}$, A, B.

Нехай R — комутативна область елементарних дільників і A — $m \times n$ матриця над R. Викреслимо i-й рядок та j-й стовпець матриці A. Н. с. д. мінорів максимального порядку отриманої матриці позначимо через b_{ij}. Позначимо також через A^* — матрицю $\|b_{ij}\|$, через $\langle A \rangle$ — н. с. д. мінорів максимального порядку матриці A.

Лема. *Нехай* $A = \|a_{ij}\|$ — $m \times n$ *матриця. Тоді н. с. д. елементів кожної* $t \times k$, $t + k > \min(m, n)$, *підматриці матриці* A^* *є дільником* $\langle A \rangle$.

Наслідок 1. *Нехай* A — $n \times n$ *матриця. Тоді н. с. д. елементів кожної* $t \times k$, $t + k > n$, *підматриці матриці* A_* *є дільником* $\det A$.

Наслідок 2. *Якщо A — оборотна $n \times n$ матриця, то н. с. д. елементів кожної з $t \times k$, $t + k > n$, підматриці матриць A_*, A^{-1} дорівнює одиниці.*

Теорема. *Нехай*

$$D = \left\|\begin{matrix} D_1 & 0 \\ D_2 & D_3 \end{matrix}\right\| \sim \operatorname{diag}(\overbrace{1, \ldots, 1, \underbrace{\varphi, \ldots, \varphi}_{s}}^{p+q}), \qquad \varphi \neq 0,$$

де D_1 та D_3 — квадратні матриці з канонічними діагональними формами

$$\Delta_1 = \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q), \qquad \Delta_3 = \operatorname{diag}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p)$$

відповідно. Тоді інваріантні множники α_i та β_j можна підібрати так, що матимемо

I) у випадку $p \leqslant s \leqslant q$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{q-s} = 1,$$
$$\alpha_{q-s+1}\beta_p = \alpha_{q-s+2}\beta_{p-1} = \cdots = \alpha_{q-s+p}\beta_1 = \varphi,$$
$$\alpha_{q-s+p+1} = \alpha_{q-s+p+2} = \cdots = \alpha_q = \varphi;$$

II) у випадку p, $q \geqslant s$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{q-s} = 1,$$
$$\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_{p-s} = 1,$$
$$\alpha_{q-s+1}\beta_p = \alpha_{q-s+2}\beta_{p-1} = \cdots = \alpha_q\beta_{p-s+1} = \varphi;$$

III) у випадку p, $q \leqslant s$

$$\alpha_1\beta_{q+p-s} = \alpha_2\beta_{q+p-s-1} = \cdots = \alpha_{q+p-s}\beta_1 = \varphi,$$
$$\alpha_{q+p-s+1} = \alpha_{q+p-s+2} = \cdots = \alpha_q = \beta_{q+p-s+1} = \beta_{q+p-s+2} = \cdots = \beta_p = \varphi.$$

Зауваження. Випадок $q \leqslant s \leqslant p$ є симетричним випадку $p \leqslant s \leqslant q$ і тому не розглядається.

Якщо R — комутативна область головних ідеалів, то отримані результати можна використати для встановлення взаємозв'язку між інваріантними множниками неособливої блочно-трикутної матриці

$$D = \left\|\begin{matrix} D_1 & 0 \\ D_2 & D_3 \end{matrix}\right\| \sim \Phi = \operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n),$$

з її діагональними блоками, у випадку, коли φ_2/φ_1, $\varphi_3/\varphi_2, \ldots, \varphi_n/\varphi_{n-1}$ є попарно взаємно простими. Для цього застосуємо локально-глобальний метод, який був запропонований Л. Герстейном у [7].

Нехай p — нерозкладний елемент кільця R. Через $R_{(p)}$ позначимо локалізацію кільця R по простому ідеалу (p). Тобто $R_{(p)}$ — кільце, яке складається з елементів вигляду $x = p^\nu a/b$, де a, b — елементи кільця R, взаємно прості з p, $\nu \in N \bigcup \{0\}$. Оскільки

$$\Phi = E\varphi_1 \operatorname{diag}\left(1, \frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \ldots, \frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right) \operatorname{diag}\left(1, 1, \frac{\varphi_3}{\varphi_2}, \ldots, \frac{\varphi_3}{\varphi_2}\right) \ldots \operatorname{diag}\left(1, \ldots, 1, \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}\right),$$

то матрицю Φ можна записати як добуток матриць вигляду $\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, p^{\mu}, \ldots, p^{\mu})$. На підставі теореми 1 з [7] матриця D в кільці $R_{(p)}$ буде мати канонічну діагональну форму $\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, p^{\mu}, \ldots, p^{\mu})$. Отже, інваріантні множники матриць D_1 і D_3 у кільці $R_{(p)}$ пов'язані між собою рівностями, які були виписані в нашій теоремі. Тоді для того щоб знайти канонічні діагональні форми матриць D_1 і D_3 у кільці R, потрібно знайти канонічні діагональні форми матриць D_1 і D_3 у всіх локалізаціях кільця R по нерозкладних дільниках елемента φ_n та перемножити відповідні інваріантні множники цих матриць.

1. *Roth W. E.* The equation $AX + YB = C$ and $AX + XB = C$ in matrices // Proc. Amer. Math. Soc. – 1952. – **3**, No 3. – P. 392–396.
2. *Feinberg R. B.* Equivalence of partitioned matrices // J. Res. Nat. Bur. Stand. – 1976. – **B80**, No 1. – P. 89–97.
3. *Gustafson W. H.* Roth's theorem over commutative rings // Linear Algebra and its Appl. – 1979. – **23**. – P. 245–251.
4. *Hartwig R., Patricio P.* On Roth's pseudo equivalence over rings // Electron. J. Linear Algebra. – 2007. – **16**. – P. 111–124.
5. *Kaplansky I.* Elementary divisor ring and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – **66**. – P. 464–491.
6. *Newman M.* The Smith normal form of a partitioned matrix // J. Res. Nat. Bur. Stand. – 1976. – **B75**, No 1. – P. 3–6.
7. *Gerstein L.* A local approach to matrix equivalence // Linear Algebra and its Appl. – 1977. – **16**. – P. 221–232.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Надійшло до редакції 27.10.2009

V. P. Shchedryk

On invariant factors of block-triangular matrices and their diagonal blocks

Under some restrictions on the canonical diagonal form of a block-triangular matrix, the relation between invariant factors of its diagonal blocks has been established.