УДК 621.372.061

Ю.І. Шаповалов, Національний університет “Львівська політехніка”

СИМВОЛЬНІ МОДЕЛІ ЛІНІЙНИХ ПАРАМЕТРИЧНИХ КІЛ У ЧАСТОТНІЙ ОБЛАСТІ

Розглянуто методи побудови символьних моделей лінійних параметричних кіл у частотній області. Моделі представляють собою системи лінійних алгебраїчних рівнянь і формуються на основі методу вузлових напруг. Частотні символьні моделі параметричних елементів представляються незалежним джерелом, двополюсником або керованим джерелом. Наведені приклади.

Вступ

У [1,2] розглянуто частотний символьний метод (ЧС-метод) аналізу лінійних параметричних кіл з періодично змінними параметрами, який основано на диференціальному рівнянні, що повязує вхідний x та вихідний y сигнали:

$$a_n(t)y^{(n)}+a_{n-1}(t)y^{(n-1)}+\ldots+a_0(t)y=b_m(t)x^{(m)}+b_{m-1}(t)x^{(m-1)}+\ldots+b_0(t)x\,, \qquad (1)$$

де $a_i(t)$, $b_j(t)$ – відомі визначені за заданим колом дійсні функції часу t. З рівняння (1) за ЧС-методом визначається апроксимація $\hat{W}(s,t)$ параметричної передавальної функції $W(s,t)$ у вигляді усіченого ряду Фур’є:

$$\hat{W}(s,t)=W_0(s)+\sum_{i=1}^{k}[W_{-i}(s)\exp(-ji\Omega t)+W_{+i}(s)\exp(+ji\Omega t)]\,, \qquad (2)$$

яка містить k гармонічних складових і зв’язує вхідний $x(s)$ та вихідний $y(s,t)$ сигнали заданого кола у частотній області:

$$y(s,t)=\hat{W}(s,t)\cdot x(s)\,, \qquad (3)$$

де $s=j\omega$ - комплексна змінна, Ω - основна частота зміни параметра параметричного елемента, якщо він у колі один, або найбільший спільний дільник основних частот зміни параметрів параметричних елементів, якщо їх у колі декілька. ЧС-метод є символьний, оскільки змінні s, t та деякі параметри кола можуть бути задані символами.

У пропонованій роботі на основі ЧС-методу будується частотна символьна модель параметричного кола в цілому, яка представляє собою систему лінійних алгебраїчних рівнянь, складених за методом вузлових напруг, і дозволяє подальший аналіз кола проводити виключно у частотній області. Таких моделей у роботі представлено три, і вони відрізняються між собою тим, як у моделі кола представляється параметричний елемент: 1) модель кола з додатковим незалежним джерелом сигналу; 2) модель кола з частотною символьною моделлю параметричного елемента; 3) модель кола з керованим джерелом.

Методи формування частотної моделі кола

Як зазначено у всупі, ЧС-метод за виразом (3) дозволяє при відомому вхідному сигналі визначати прийняті за вихідні довільні струми та напруги кола у частотній області. Прийнявши це за основу, можемо пропонувати наступні три шляхи побудови частотної алгебраїчної моделі параметричного кола.

1. Метод додаткового незалежного джерела.

За виразом (3) визначаємо струми, протікаючі через всі параметричні елементи кола:

$$I_{пар1}(s,t) = \mathrm{A}_1(s,t)\cdot I(s),$$
$$I_{пар2}(s,t) = \mathrm{A}_2(s,t)\cdot I(s), \dots , \qquad (4)$$

де $I(s)$ - вхідний струм, $I_{пар1}(s,t)$, $I_{пар2}(s,t)$,…- струми, протікаючі через параметричні елементи, $\mathrm{A}_1(s,t)$, $\mathrm{A}_2(s,t)$,… - параметричні передавальні функції сигналу від вхідного джерела струму у струм параметричного елемента, відповідно. Далі, з теореми підстановки [3] витікає, що напруги та струми у колі не зміняться, якщо його гілки з параметричними елементами замінити на відповідні гілки з джерелами струму $I_{пар1}(s,t)$, $I_{пар2}(s,t)$, …, що визначені за виразами (4). Після такої заміни задане параметричне коло перетворюється у коло з постійними параметрами та декількома джерелами струму – вхідним джерелом $I(s)$ та джерелами $I_{пар1}(s,t)$, $I_{пар2}(s,t)$,... , відповідно. Таке трактування параметричного кола безпосередньо дає можливість побудувати його частотну модель у вигляді СЛАР, складеної за правилами методу вузлових напруг, як для кола з постійними параметрами:

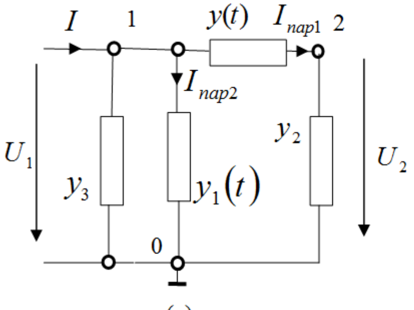
$$Y(s_i)\cdot U(s_i,t) = I(s,t), \qquad (5)$$

де матриця провідності $Y(s_i)$ містить параметри елементів заданого параметричного кола, крім параметричних; вектор джерел струмів $I(s,t)$ має ненульові значення тільки у тих елементах, які відповідають вузлам під'єднання джерел $I(s)$ та $I_{пар1}(s,t)$, $I_{пар2}(s,t)$, … , відповідно; $U(s_i,t)$- вектор невідомих вузлових напруг; s - комплексна змінна вхідного сигналу та параметричних передавальних функцій з вектору $I(s,t)$; s_i - комплексна змінна, яка свідчить про те, що сигнали $I_{пар1}(s,t)$, $I_{пар2}(s,t)$, … містять гармонічні складові з частотами $(\omega \pm i\Omega)$, $i = 0,1,2,\dots,k$, тому СЛАР (5) за принципом суперпозиції потрібно розв'язати $(2k+1)$ разів, кожного разу підставляючи у неї інше значення комплексної частоти $s_i = j(\omega \pm i\Omega)$, та результати додати. Але ЧС-метод символьний, тому СЛАР (5) достатньо розв'язати один раз з символьною частотою s_i, у отриманий розв'язок по черзі підставити різні, але теж символьні, позначення $s_i = j(\omega \pm i\Omega)$ та сформувати вузлові напруги, як суми напруг $U(s_i,t)$. Таким чином, схемні функції (вхідний опір кола, передача напруги і т.д.), сформовані за моделлю (5), міститимуть дві символьні комплексні змінні s та s_i, а напруги, визначені за моделлю (5) – у остаточних розрахунках міститимуть символьні комплексні змінні з ряду $s_{-k},\dots,s_{-1},s,s_{+1},\dots,s_{+k}$.

Оскільки модель (5) параметричного кола алгебраїчна, то вона може бути аналізована програмами аналізу лінійних кіл з постійними параметрами. Також є зрозумілим, що зміна параметрів вхідного сигналу $I(s)$ повинна бути врахована відповідною зміною значень струмів $I_{пар1}(s,t)$, $I_{пар2}(s,t)$,… .

ПРИКЛАД 1. За методом додаткового незалежного джерела скласти частотну символьну модель параметричного кола з рис.1,а з двома параметричними елементами та визначити за нею вузлові напруги U_1 і U_2. Коло свідомо вибране резистивним, оскільки у цьому випадку особливо просто «вручну» формуються параметричні передавальні функції, а повністю символьні вирази наочно ілюструють особливості кожного з розглянутих у роботі методів.

Нехай для заданого кола за ЧС методом визначені параметричні передавальні функції $\mathrm{A}_1(s,t)$ та $\mathrm{A}_2(s,t)$, які зв'язують поданий на коло вхідний струм $I(s)$ з струмами, протікаючими через параметричні елементи $I_{пар1}(s,t)$, $I_{пар2}(s,t)$, виразами (4). Будуємо еквівалентну схему (рис.1,б) кола, у якій на місці параметричних елементів $y(t)$, $y_1(t)$ розташовані джерела струмів $I_{пар1}(s,t)$, $I_{пар2}(s,t)$.



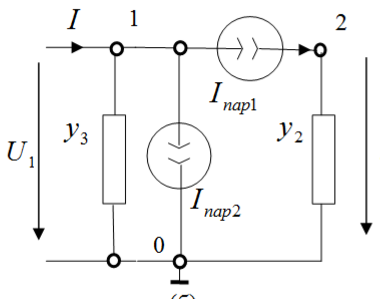


Рис.1. Тестове параметричне коло – (а), еквівалентна схема паметричного кола, складена за методом додаткових незалежних джерел, – (б).

За схемою з рис.1,б будуємо методом вузлових напруг шукану частотну символьну модель кола з додатковими незалежними джерелами у алгебраїчному виді:

$$\begin{bmatrix} y_3 & 0 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I - \mathrm{A}_1(t)I - \mathrm{A}_2(t)I \\ \mathrm{A}_1(t)I \end{bmatrix}. \qquad (6)$$

Моделі виду (6), хоча й містять параметри незалежних джерел, що змінюються у часі, описують параметричне коло у частотній області і можуть бути основою для подальшого аналізу, статистичних досліджень та оптимізації кола виключно у цій частотній області без допомоги диференціальних рівнянь.

Модель (6) визначає шукані вузлові напруги кола у вигляді:

$$U_1 = \frac{1 - \mathrm{A}_1(t) - \mathrm{A}_2(t)}{y_3} \cdot I\,, \qquad U_2 = \frac{\mathrm{A}_1(t)}{y_2} \cdot I\,, \qquad (7)$$

адекватність яких може бути перевірена тим, що для заданого резистивного кола параметричні функції передавання $\mathrm{A}_1(s,t)$ та $\mathrm{A}_2(s,t)$ легко визначаються зі схеми заданого кола (рис.1,а):

$$\mathrm{A}_1(s,t) = \frac{y(t)y_2}{y(t)y_2 + y_1(t)y_2 + y_1(t)y(t) + y_3 y(t) + y_3 y_2}\,,$$

$$\mathrm{A}_2(s,t) = \frac{y_1(t)y_2 + y_1(t)y(t)}{y(t)y_2 + y_1(t)y_2 + y_1(t)y(t) + y_3 y(t) + y_3 y_2}\,. \qquad (8)$$

Тепер зрозуміло, чому для ілюстрації методу коло обране резистивним.

Підстановка виразів (8) у вирази (7) дають очевидні і правильні значення вузлових напруг кола:

$$U_1 = \frac{y(t) + y_2}{y(t)y_2 + y_1(t)y_2 + y_1(t)y(t) + y_3 y(t) + y_3 y_2} \cdot I\,,$$

$$U_2 = \frac{y(t)}{y(t)y_2 + y_1(t)y_2 + y_1(t)y(t) + y_3 y(t) + y_3 y_2} \cdot I\,. \qquad (9)$$

Таким чином, модель (6), складену за методом додаткового незалежного джерела сигналу при наявності у колі декількох параметричних елементів, вважаємо адекватною.

2. Метод частотної символьної моделі параметричного елемента.

За виразом (3) визначаємо струми, що протікають через параметричні елементи, та напруги на них. При цьому для кожного параметричного елемента (наприклад, для m-го) відношення його струму до напруги на ньому

$$\frac{I_{пар,m}(s,t)}{U_{пар,m}(s,t)} = \frac{\mathrm{A}_m(s,t) \cdot I(s)}{Z_m(s,t) \cdot I(s)} = \frac{\mathrm{A}_m(s,t)}{Z_m(s,t)} = S_m(s,t) \qquad (10)$$

в силу лінійності кола не залежить від напруги та струму, тому визначає деякий параметр (провідність) $S_m(s,t)$, який і будемо називати частотною символьною моделлю цього (m-го) параметричного елемента. На відміну від лінійних кіл з постійними параметрами частотна модель параметричного елемента, що міститься у колі, не може бути визначена окремо від самого кола. Більше того, окремо від кола частотна модель параметричного елемента, швидше за все, не існує. У цьому й проявляється особливість частотного аналізу параметричних кіл та неможливість застосування до них перетворення Лапласа в загальному.

Параметри частотних символьних моделей виду (10), як і постійні параметри інших елементві кола, за методом вузлових напруг можуть бути вписані у Y-матрицю, чим і буде сформована у вигляді СЛАР частотна символьна модель параметричного кола в цілому:

$$Y(s, s_i) \cdot U(s_i, t) = I(s)\,, \tag{11}$$

у якій змінні s, s_i мають той же зміст, що й у моделі (5).

ПРИКЛАД 2. За методом частотної символьної моделі параметричного елемента скласти частотну символьну модель параметричного кола з рис.1,а з двома параметричними елементами та визначити за нею вузлові напруги U_1 і U_2.

Нехай за ЧС методом визначені параметричні передавальні функції $\mathrm{A}_1(s,t)$, $\mathrm{A}_2(s,t)$ та $Z_1(s,t)$, $Z_2(s,t)$, які визначають частотні символьні моделі параметричних елементів $y(t), y_1(t)$ у вигляді:

$$S_1(s,t) = \frac{\mathrm{A}_1(s,t)}{Z_1(s,t)} \text{ та } S_2(s,t) = \frac{\mathrm{A}_2(s,t)}{Z_2(s,t)}\,, \tag{12}$$

відповідно. Для заданого параметричного кола з рис.1,а будуємо еквівалентну схему (рис.2,а), у якій на місці параметричних елементів $y(t)$, $y_1(t)$ розташовані їх частотні символьні моделі $S_1(s,t)$ та $S_2(s,t)$, відповідно.

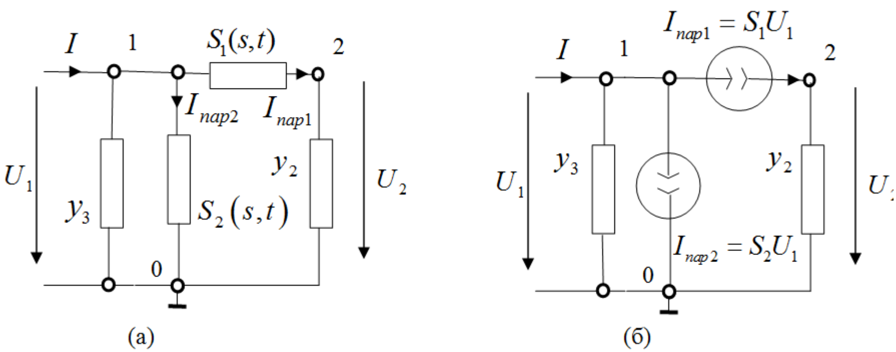


Рис. 2. Еквівалентні схеми кола з рис.1,а з частотними моделями параметричних елементів $y(t)$ та $y_1(t)$ у вигляді: а) провідностей $S_1(s,t)$ та $S_2(s,t)$; б) керованих джерел $I_{пар1}(s,t) = S_1(s,t)U_1$ та $I_{пар2}(s,t) = S_2(s,t)U_1$.

За еквівалентною схемою з рис.2,а методом вузлових напруг у вигляді СЛАР будуємо шукану частотну символьну модель кола з частотними моделями параметричних елементів:

$$\begin{bmatrix} y_3+S_1+S_2 & -S_1 \\ -S_1 & y_2+S_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (13)$$

Модель (13), як і модель (6), хоча й містить параметри, що змінюються у часі, описує параметричне коло у частотній області і може бути основою для подальшого аналізу, статистичних досліджень та оптимізації кола виключно у цій частотній області без допомоги диференціальних рівнянь.

Частотна модель (13) визначає шукані вузлові напруги кола як:

$$U_1 = \frac{y_2+S_1}{y_3y_2+y_3S_1+S_1y_2+S_2y_2+S_2S_1}\cdot I\,, U_2 = \frac{S_1}{y_3y_2+y_3S_1+S_1y_2+S_2y_2+S_2S}\cdot I\,, (14)$$

адекватність яких може бути перевірена за аналогією з виразами (7). Так, для заданого резистивного кола параметричні функції передавання $\mathrm{A}_1(s,t)$ та $\mathrm{A}_2(s,t)$, визначені вище виразами (8), а параметричні передавальні функції $Z_1(s,t)$ та $Z_2(s,t)$ легко визначаються зі схеми заданого кола (рис.1,а), як:

$$Z_1(s,t) = \frac{y_2}{y(t)y_2+y_1(t)y_2+y_1(t)y(t)+y_3y(t)+y_3y_2},$$

$$Z_2(s,t) = \frac{y(t)+y_2}{y(t)y_2+y_1(t)y_2+y_1(t)y(t)+y_3y(t)+y_3y_2}. \qquad (15)$$

За виразами (8), (15) та (10) визначаємо $S_1(s,t)$ та $S_2(s,t)$:

$$S_1(s,t) = y(t)\,, \qquad S_2(s,t) = y_1(t)\,. \qquad (16)$$

Підстановка виразів (16) у вирази (14) дає очевидні і правильні значення вузлових напруг кола у вигляді (9).

Таким чином, модель (13), складену на основі частотної моделі всіх присутніх у колі параметричних елементів, за аналогією з моделлю (6), вважаємо адекватною.

3. Метод керованого джерела.

Метод керованого джерела, по суті, є розвитком методу частотної символьної моделі параметричного елемента. Останній має таку особливість, що частотна символьна модель елемента є дробовим виразом. А дробові вирази, при значній кількості параметричних елементів у колі, можуть приводити до незручностей виконання алгебраїчних дій з ними. Тому метод керованих джерел усуває таку незручність шляхом спрощення або повного усунення знаменників у виразах, аналогічних виразу (10). І це відбувається наступним чином. Параметр параметричного елемента визначається не як відношення його струму до напруги на ньому, а як відношення його струму до довільної іншої напруги кола. У цьому випадку вказане відношення визначає кероване джерело, у якому керуюча гілка – це обрана напруга, керована – струм параметричного елемента. Зазвичай, керуюча напруга обирається однією для струмів усіх параметричних елементів. У цьому випадку знаменники параметричних елементів будуть однаковими. А при вдалому виборі керуючої напруги (наприклад, напруги на одиничному опорі, увімкненому послідовно з джерелом вхідного струму) знаменники у параметрах керованих джерел можуть, взагалі, зникати. Параметри $S_m(s,t)$ таких керованих джерел

$$S_m(s,t) = \frac{I_{пар,m}(s,t)}{U_i(s,t)} = \frac{\mathrm{A}_m(s,t)}{Z_i(s,t)} \tag{17}$$

за традиційними правилами разом з провідностями інших елементів вписуються (як для кіл з постійними параметрами) у матрицю провідності кола в цілому, чим і формується алгебраїчна модель усього параметричного кола у вигляді (11).

ПРИКЛАД 3. За методом керованого джерела скласти частотну символьну модель параметричного кола з рис.1,а з двома параметричними елементами та визначити за нею вузлові напруги U_1 і U_2.

Нехай за ЧС методом визначені параметричні передавальні функції $\mathrm{A}_1(s,t)$, $\mathrm{A}_2(s,t)$ з (8), та $Z_2(s,t) = U_1(s,t)/I(s)$, які визначають параметри обох залежних джерел струму у вигляді $S_1(s,t) = \mathrm{A}_1(s,t)/Z_2(s,t)$ та $S_2(s,t) = \mathrm{A}_2(s,t)/Z_2(s,t)$ параметричних елементів $y(t)$ та $y_1(t)$, відповідно. Для заданого параметричного кола з рис.1,а будуємо еквівалентну схему (рис.2,б), у якій на місці параметричних елементів $y(t)$, $y_1(t)$ розташовані залежні джерела струму $I_{пар1}(s,t)$ та $I_{пар2}(s,t)$, відповідно. За еквівалентною схемою методом вузлових напруг у вигляді СЛАР будуємо шукану частотну модель кола з частотними символьними моделями керованих джерел:

$$\begin{bmatrix} y_3 + S_1 + S_2 & 0 \\ -S_1 & y_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Модель (18), як і моделі (6) та (13), хоча й містить параметри, що змінюються у часі, описує параметричне коло у частотній області і може бути основою для подальшого аналізу, статистичних досліджень та оптимізації кола виключно у цій частотній області без допомоги диференціальних рівнянь.

Частотна символьна модель (18) визначає шукані вузлові напруги кола у вигляді:

$$U_1 = \frac{y_2}{y_3 y_2 + S_1 y_2 + S_2 y_2} \cdot I\,, \quad U_2 = \frac{S_1}{y_3 y_2 + S_1 y_2 + S_2 y_2} \cdot I\,, \tag{19}$$

адекватність яких перевіряємо за аналогією з попередніми випадками. Так, для заданого резистивного кола параметричні функції $\mathrm{A}_1(s,t)$, $\mathrm{A}_2(s,t)$ та $Z_2(s,t)$ визначені виразами (8) та (15), відповідно. Тому:

$$S_1(s,t) = \frac{y(t)y_2}{y(t)+y_2} \quad \text{та} \quad S_2(s,t) = \frac{y_1(t)y_2 + y_1(t)y(t)}{y(t)+y_2}. \tag{20}$$

Підстановка виразів (20) у вирази (19) дає очевидні і правильні значення вузлових напруг кола у вигляді (9).

Таким чином, модель (18), складену на основі частотних моделей параметричних елементів у вигляді керованих джерел присутніх у колі параметричних елементів, вважаємо адекватною.

Висновки

Розроблені у роботі частотні символьні моделі лінійних параметричних кіл та методи їх побудови дозволяють зробити наступні висновки.

1. Розроблені частотні моделі, за аналогією з частотними моделями лінійних кіл з постійними параметрами, повністю описують параметричне коло у частотній області.
2. Частотні моделі параметричних елементів визначаються колом, у якому ці параметричні елементи присутні. Поза колом частотні моделі параметричних елементів, швидше за все, не існують.
3. Параметри елементів, які у процесі дослідження кола планується змінювати, повинні бути залишені у символі як у частотній моделі, так і у параметричних передавальних функціях, що присутні у цих частотних моделях. При цьому необхідна зміна таких параметрів відбувається достатньо швидко підстановкою нових значень у частотну модель кола та параметричні функції без зайвих повторних обчислень.
4. Розроблені частотні моделі кіл містять дві комплексні змінні, оскільки описують коло на частоті вхідного сигналу та частотах виникаючих у колі гармонічних складових сигналів.
5. Розроблені частотні моделі дозволяють проводити аналіз, статистичні дослідження, оптимізацію та, взагалі, проектування параметричних кіл у частотній області за аналогією кіл з постійними параметрами.
6. Розроблені частотні моделі є системами лінійних алгебраїчних рівнянь, тому при їх аналізі може бути широко використане програмне забезпечення, призначене для символьного аналізу лінійних кіл з постійними параметрами. І цей факт є найбільшим практичним значенням виконаної роботи.

1. *Шаповалов Ю., Мандзій Б.* Символьний аналіз лінійних параметричних кіл: стан питань, зміст і напрямки застосування. // Теоретична електротехніка. 2007. Вип. 59 с.3-9.
2. *Shapovalov Yu., Mandziy B., Mankovsky S.* The peculiarities of analysis of linear parametric circuit performed by frequency-symbolic method // Przegląd Elektrotechniczny (Electrical Review), R.86 NR 1/2010, pp. 158-160.
3. Основы теории цепей / *Ч. А. Дезоер, Э. С. Ку ; пер. с англ.* - М. : Связь, 1976. - 286 с.

Поступила 24.01.2011р.