

В.А.Дмитрук, Центр математичного моделювання ІППММ НАНУ, м.Львів, НУ “Львівська політехніка”

## МОДЕЛЮВАННЯ СТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ КОНВЕКТИВНОЇ ДИФУЗІЇ У ДВОФАЗНИХ ТІЛАХ ПЕРІОДИЧНОЇ СТРУКТУРИ ЗА ЗМІШАНИХ ГРАНИЧНИХ УМОВ

*Abstract.* This paper generalizes the method for constructing the exact analytic solutions of the contact boundary value problems of admixture diffusion in two-phase regular structures allowing for the convective mass transfer mechanism in one of the phases in the case of mixed boundary conditions. The analytic solution of such diffusion problem for two-phase layer of regular structure with allowance for convective transport in one of the phases is obtained and mass flows through the contact interface are studied under the mixed boundary conditions.

*Key-words:* diffusion, convection, admixture, periodical structure, mixed boundary condition, integral transformation

*Анотація.* В даній роботі метод побудови точних аналітичних розв’язків контактної-крайових задач дифузії домішкової речовини у двофазних регулярних структурах з урахуванням конвективного механізму масопереносу в одній з фаз узагальнено на випадок змішаних граничних умов. Отримано аналітичний розв’язок задачі дифузії для двофазного шару регулярної структури з врахуванням конвективного переносу в одній з фаз та досліджені потоки маси через внутрішню міжфазну поверхню контакту за змішаних умов на границях тіла.

*Ключові слова:* дифузія, конвекція, домішкова речовина, періодична структура, змішана гранична умова, інтегральне перетворення

**Вступ.** В сучасних умовах для вирішення цілої низки прикладних проблем екології, механіки, надійності та довговічності елементів макроконструкцій, тощо, необхідно досліджувати нерівноважні процеси переносу в об’єктах природного середовища складної внутрішньої будови, які моделюються багатофазними і багатокомпонентними структурами. При цьому для якісного та кількісного опису потрібно враховувати як різні механізми переносу речовини, так і наявність суттєво різних фізичних характеристик фаз. Зокрема, представляють інтерес точні розв’язки конкретних контактної-крайових задач процесів масоперенесення для кусково-однорідних систем, у т.ч. просторово регулярних [1-3]. Таке середовище складається з контактуючих однорідних підсистем, між якими відбувається масообмін речовиною. Для кількісного опису процесів дифузійного типу в таких системах застосування класичних методів математичної фізики є неефективним.

Для побудови точних аналітичних розв’язків контактної-крайових задач

дифузії домішкової речовини у двофазних регулярних структурах з урахуванням конвективного механізму масоперенесення в одній з фаз запропоновано та обґрунтовано метод, який базується на використанні інтегральних перетворень за просторовими змінними окремо в контактуючих областях [4]. Оскільки оператори рівнянь у різних фазах різняться між собою, то типи інтегральних перетворень в різних областях також можуть відрізнятися [5].

У даній роботі аналітичний метод побудови точних розв'язків контактнo-крайових задач стаціонарної конвективної дифузії в періодичних структурах узагальнено на випадок змішаних граничних умов. Досліджено потоки маси через внутрішню міжфазну поверхню тіла в залежності від характеристик середовища та граничних умов.

**Контактнo-крайова задача стаціонарної конвективної дифузії в періодичних структурах за змішаних граничних умов.** Розглянемо шар товщини  $x_0$ , який складається з періодично розташованих областей двох типів (рис.1). Области з коефіцієнтом дифузії  $D_1$  мають ширину  $2L$ , а з коефіцієнтом  $D_2$  -  $2l$ , крім цього в областях з коефіцієнтом дифузії  $D_1$  масоперенос відбувається не тільки за дифузійним, а й конвективним механізмом зі швидкістю конвективного перенесення  $v$ , яка приймається відомою і сталою. Така структура має сімейство площин симетрії, які ділять навпіл сусідні контактуючі області. Тому можемо виділити елемент тіла, на вертикальних границях якого потоки в напрямку осі  $Oy$ , дорівнюють нулю (рис.1).

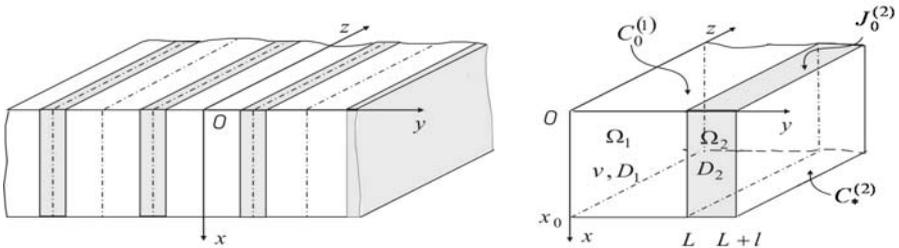


Рис.1. Регулярна структура тіла та виділений елемент такої структури

У стаціонарному випадку концентрація домішкової речовини  $c_1^\infty(x, y)$  в області  $\Omega_1 = ]0; x_0[ \times ]0; L[$  визначається з рівняння конвективної дифузії

$$D_1 \left[ \frac{\partial^2 c_1^\infty}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_1^\infty}{\partial y^2} \right] - v \frac{\partial c_1^\infty}{\partial x} = 0, \quad x, y \in \Omega_1. \quad (1)$$

В області  $\Omega_2 = ]0; x_0[ \times ]L; L+l[$  концентрація частинок домішки  $c_2^\infty(x, y)$  задовольняє рівняння дифузії

$$D_2 \left[ \frac{\partial^2 c_2^\infty}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_2^\infty}{\partial y^2} \right] = 0, \quad x, y \in \Omega_2. \quad (2)$$

Приймаємо, що на поверхні шару  $x=0$  в області  $\Omega_1$  підтримується постійне значення концентрації  $c_0^{(1)}$ , а в області  $\Omega_2$  - постійний потік домішкової речовини  $J_0^{(2)}$ .

$$c_1^\infty(x, y) \Big|_{x=0} = c_0^{(1)} \equiv \text{const}, \quad \frac{\partial c_2^\infty}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\bar{J}_0^{(2)}}{D_2} = J_0^{(2)} \equiv \text{const}. \quad (3)$$

На нижній поверхні  $x = x_0$  в області  $\Omega_1$  концентрація  $c_1^\infty$  дорівнює нулю, а в області  $\Omega_2$  - приймає сталі значення:

$$c_1^\infty(x, y) \Big|_{x=x_0} = 0, \quad c_2^\infty(x, y) \Big|_{x=x_0} = c_*^{(2)} \equiv \text{const}. \quad (4)$$

На бічних поверхнях виділеного елемента  $y = 0$ ,  $y = L + l$  нулю дорівнюють горизонтальні складові потоку, тобто

$$\frac{\partial c_1^\infty(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial c_2^\infty(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=L+l} = 0. \quad (5)$$

На границях контакту фаз на функцію концентрації накладено неідеальні умови [5]:

$$\eta_1 c_1^\infty(x, y) \Big|_{y=L} = \eta_2 c_2^\infty(x, y) \Big|_{y=L}, \quad D_1 \frac{\partial c_1^\infty(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=L} = D_2 \frac{\partial c_2^\infty(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=L}, \quad (6)$$

де  $\eta_1$  і  $\eta_2$  ( $\eta_1 \neq \eta_2$ ) - коефіцієнти концентраційної залежності хімічного потенціалу частинок в областях  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$  відповідно.

Розв'язок контактної-крайової задачі дифузії (1)-(6) будемо шукати з допомогою інтегральних перетворень в контактуючих областях.

Виконаємо інтегральні перетворення за змінною  $y$  окремо в областях  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$ . Для того, щоб застосувати перетворення Фур'є необхідно знати величину відповідних функцій або їхніх похідних на границях області перетворення [6]. При  $y = 0$  і  $y = L + l$  граничні умови (5) дають значення функцій  $\partial c_1^\infty / \partial y$  на границі області  $\Omega_1$  і  $\partial c_2^\infty / \partial y$  на границі  $\Omega_2$ . На інших границях областей  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$  (поверхні контакту) величини  $\partial c_i^\infty / \partial y$  є невідомими. Доозначимо їх, враховуючи другу контактну умову (6). Вона означає, що на границі контакту  $y = L$  масові потоки рівні між собою і, в свою чергу, дорівнюють деякій функції  $g^\infty(x)$ , тобто

$$D_1 \frac{\partial c_1^\infty}{\partial y} \Big|_{y=L} = D_2 \frac{\partial c_2^\infty}{\partial y} \Big|_{y=L} = g^\infty(x). \quad (7)$$

Звідси отримаємо значення функцій  $\partial c_i^\infty / \partial y$  на поверхні  $y = L$  :

$$\left. \frac{\partial c_1^\infty}{\partial y} \right|_{y=L} = \frac{1}{D_1} g^\infty(x), \quad \left. \frac{\partial c_2^\infty}{\partial y} \right|_{y=L} = \frac{1}{D_2} g^\infty(x). \quad (8)$$

Тоді можемо виконати скінченні інтегральні cos-перетворення [6] в області  $\Omega_1$ :  $y \rightarrow y_k = k\pi/L$ ,  $c_1^\infty(x, y) \rightarrow \bar{c}_1^\infty(x, k)$ , і в області  $\Omega_2$ :  $y \rightarrow y_j = j\pi/l$ ,  $c_2^\infty(x, y) \rightarrow \bar{c}_2^\infty(x, j)$ . В зображеннях контактної-крайова задача (1)-(5), (8) набуде вигляду

$$D_1 \frac{d^2 \bar{c}_1^\infty(x)}{dx^2} - \nu \frac{d \bar{c}_1^\infty(x)}{dx} - D_1 y_k^2 \bar{c}_1^\infty(x) + (-1)^k g^\infty(x) = 0, \quad (9)$$

$$D_2 \frac{d^2 \bar{c}_2^\infty(x)}{dx^2} - D_2 y_j^2 \bar{c}_2^\infty(x) - g^\infty(x) = 0, \quad x \in ]0; x_0[; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \bar{c}_1^\infty(x) \Big|_{x=0} &= a_k c_0^{(1)}, & \bar{c}_2^\infty(x) \Big|_{x=0} &= a_j c_0^{(2)}, \\ \bar{c}_1^\infty(x) \Big|_{x=x_0} &= \bar{c}_2^\infty(x) \Big|_{x=x_0} = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{де } a_k = \begin{cases} L, & k = 0 \\ 0, & k = 1, 2, \dots \end{cases}, \quad a_j = \begin{cases} l, & j = 0 \\ 0, & j = 1, 2, \dots \end{cases}.$$

За змінною  $x$  в області  $\Omega_1$  застосуємо наступне перетворення [7]

$$\bar{c}_1^\infty(n, k) = \int_0^{x_0} \tilde{c}_1^\infty(x, k) e^{-\frac{\nu x}{2D_1}} \sin(x_n x) dx, \quad (12a)$$

$$\tilde{c}_1^\infty(x, k) = \frac{2}{x_0} e^{\frac{\nu x}{2D_1}} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(x_n x) \bar{c}_1^\infty(n, k), \quad (12b)$$

де  $x_n = n\pi/x_0$ , а в області  $\Omega_2$  - таке скінченне cos-перетворення [7]:

$$\bar{c}_2^\infty(m, j) = \int_0^{x_0} \tilde{c}_2^\infty(x, j) \cos(x_m x) dx, \quad (13a)$$

$$\tilde{c}_2^\infty(x, j) = \frac{2}{x_0} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{c}_2^\infty(m, j) \cos(x_m x) dx, \quad (13b)$$

де  $x_m = (2m-1)\pi/2x_0$ . Тоді з (9)-(11) отримаємо такі алгебраїчні рівняння

$$\begin{aligned} -D_1(x_n^2 + y_k^2) \bar{c}_1^\infty + D_1 x_n a_k c_0^{(1)} + (-1)^k \bar{g}_n^\infty &= 0, \\ -D_2 a_j \left\{ J_0^{(2)} + (-1)^m x_m c_*^{(2)} \right\} - D_2 x_m^2 \tilde{c}_2^\infty - D_2 y_j^2 \bar{c}_2^\infty - \bar{g}_m^\infty &= 0. \end{aligned}$$

Звідси знаходимо

$$\begin{aligned}\bar{c}_1^\infty &= \frac{1}{v_D^2 + x_n^2 + y_k^2} \left[ D_1 x_n a_k c_0^{(1)} + (-1)^k \bar{g}_n^\infty \right], \\ \bar{c}_2^\infty(m, j) &= \frac{1}{D_2(x_m^2 + y_j^2)} \left[ -D_2 a_j \left\{ J_0^{(2)} + (-1)^m x_m c_*^{(2)} \right\} - \bar{g}_m^\infty \right],\end{aligned}\quad (14)$$

де  $v_D = v/2D_1$ .

Після застосування відповідних обернених перетворень за змінною  $y$  одержимо

$$c_1^\infty(x, y) = \frac{2}{x_0} e^{v_D x} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(x_n x) \left[ \frac{c_0^{(1)} x_n}{\psi_n^2} + \frac{\bar{g}_n^\infty}{D_1} \tilde{R}_n(y) \right], \quad (15)$$

$$\begin{aligned}c_2^\infty(x, y) &= -\frac{2}{D_2 l x_0} \sum_{m=1}^{\infty} \cos(x_m x) \left[ \frac{D_2 l}{x_m^2} \left\{ J_0^{(2)} + (-1)^m x_m C_*^{(2)} \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \bar{g}_m^\infty \left( \frac{2}{x_m^2} + \frac{l}{x_m} \frac{\text{ch}[x_m(L+l-y)]}{\text{sh}(x_m L)} \right) \right],\end{aligned}\quad (16)$$

де  $\tilde{R}_n(y) = \frac{\text{ch}(\psi_n y)}{\text{sh}(\psi_n L)} / \psi_n + \left(1 - \frac{1}{L}\right) / \psi_n^2$ ,  $\psi_n = \sqrt{v_D^2 + x_n^2}$ ,

$$\bar{g}_n^\infty = \int_0^{x_0} g^\infty(x) e^{-v_D x} \sin(x_n x) dx, \quad \bar{g}_m^\infty = \int_0^{x_0} g^\infty(x) \cos(x_m x) dx. \quad (17)$$

У виразах (15), (16) залишаються невідомими функції  $\bar{g}_n^\infty$  і  $\bar{g}_m^\infty$ . Шукатимемо їх з першої контактної умови (6) стрибка функції концентрації на границі розділу областей  $\Omega_1$  та  $\Omega_2$ . Підставляємо вирази (15), (16) у умову (6) і одержуємо таке рівняння

$$\begin{aligned}\eta_1 e^{v_D x} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(x_n x) \left\{ \frac{c_0^{(1)} x_n}{\psi_n^2} + \frac{\bar{g}_n^\infty}{D_1} \left( \frac{\text{cth}(\psi_n L)}{\psi_n} + \left(1 - \frac{1}{L}\right) \frac{1}{\psi_n^2} \right) \right\} = \\ = -\frac{\eta_2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \cos(x_m x) \left\{ \frac{l}{x_m^2} \left\{ J_0^{(2)} + (-1)^m x_m c_*^{(2)} \right\} + \frac{2\bar{g}_m^\infty}{D_2 x_m^2} + \frac{\bar{g}_m^\infty l}{D_2 x_m} \text{cth}(x_m l) \right\}.\end{aligned}\quad (18)$$

Для знаходження зв'язку між функціями  $\bar{g}_n^\infty$  і  $\bar{g}_m^\infty$  розглянемо співвідношення, обернене до першого співвідношення (17), тобто

$$g^\infty(x) = \frac{2}{x_0} e^{v_D x} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{g}_n^\infty \sin(x_n x). \quad (19)$$

Домножимо обидві частини цієї рівності на  $\sin(x_m x)$  і проінтегруємо по  $x$  від 0 до  $x_0$ , тобто застосуємо скінченне інтегральне перетворення Фур'є (12a) за змінною  $x$ . Маємо

$$\int_0^{x_0} g^\infty(x) \sin(x_m x) dx = \int_0^{x_0} \frac{2}{x_0} e^{v_D x} \sin(x_m x) \sum_{n=1}^{\infty} \bar{g}_n^\infty \sin(x_n x) dx.$$

Ліва частина цієї рівності є  $\bar{g}_m^\infty$ . Тоді після інтегрування отримаємо

$$\bar{g}_m^\infty = \frac{1}{x_0} \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,m} \bar{g}_n^\infty, \quad (20)$$

де коефіцієнти  $A_{n,m}$  визначаються наступним чином

$$A_{n,m} = \frac{x_n - x_m + (-1)^{n-m} v_D e^{v_D x_0}}{v_D^2 + (x_n - x_m)^2} + \frac{x_n + x_m - (-1)^{n+m} e^{v_D x_0}}{v_D^2 + (x_n + x_m)^2}. \quad (21)$$

З іншого боку, якщо розглянемо рівність

$$g^\infty(x) = \frac{2}{x_0} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{g}_m^\infty \cos(x_m x),$$

і застосуємо до неї скінченне інтегральне  $\sin$ -перетворення (12a), то отримаємо

$$\int_0^{x_0} g^\infty(x) \sin(x_n x) dx = \frac{2}{x_0} \int_0^{x_0} e^{-v_D x} \cos(x_m x) \sin(x_n x) \sum_{m=1}^{\infty} \bar{g}_m^\infty dx.$$

Після інтегрування одержимо

$$\bar{g}_n^\infty = \frac{1}{x_0} \sum_{m=1}^{\infty} B_{n,m} \bar{g}_m^\infty, \quad (22)$$

де 
$$B_{n,m} = \frac{x_n - x_m - (-1)^{n-m} v_D e^{-v_D x_0}}{v_D^2 + (x_n - x_m)^2} + \frac{x_n + x_m + (-1)^{n+m} v_D e^{-v_D x_0}}{v_D^2 + (x_n + x_m)^2}.$$

Праву частину рівняння (18) подаємо у вигляді розвинення по  $\sin(x_n x)$  з множником  $e^{v_D x}$ , тобто використаємо інтегральне перетворення (12b). Розв'язуючи отримане рівняння з урахуванням співвідношень (12a), (20), (22) знаходимо  $\bar{g}_n^\infty$ :

$$\bar{g}_n^\infty = \frac{1}{x_0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_{n,m} - a_m B_{n,m}}{b_n - S_m}, \quad (23)$$

де 
$$r_{n,m} = -\frac{2l}{x_m^2} \left\{ J_0^{(2)} + (-1)^m x_m C_*^{(2)} \right\} B_{n,m}, \quad a_m = \frac{1}{x_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n A_{n,m},$$

$$b_n = \frac{\eta_1}{\eta_2 D_1} \left[ \frac{\text{cth}(\psi_n L)}{\psi_n} + \left(1 - \frac{1}{L}\right) \frac{1}{\psi_n^2} \right], \quad S_m = -\frac{2}{D_2 x_m} \left[ \frac{2}{x_m} + l \text{cth}(x_m l) \right].$$

Зауважимо, що, зважаючи на співвідношення (21) і (23), для знаходження розв'язку задачі необхідно визначити лише одну з функцій  $\bar{g}_n^\infty$  і  $\bar{g}_m^\infty$ .

**Числовий аналіз потоку маси через внутрішню поверхню контакту.**

На рис.2-6 наведені характерні розподіли функції  $g(\xi)$ , яка описує потік маси через внутрішню поверхню контакту з протилежним знаком (в протилежному напрямку). Розрахунки  $g(\xi)$  проводились за формулою (19) з урахуванням співвідношень (21), (23). При цьому введені безрозмірні змінні [8, 9]  $\xi = (k/D_1)^{1/2} x$ ,  $\zeta = (k/D_1)^{1/2} y$ , де  $k$  - коефіцієнт, який має розмірність  $[c^{-1}]$ . Обчислення виконувались з точністю  $\varepsilon = 10^{-9}$ . За базові прийнято такі значення параметрів задачі:  $\xi_0 = (k/D_1)^{1/2} x_0 = 10$ ,  $\Lambda = (k/D_1)^{1/2} L = 0.1$ ,  $\lambda = (k/D_1)^{1/2} l = 0.9$ ,  $d = D_2/D_1 = 0.01$ ,  $\eta_1/\eta_2 = 10$ ,  $J_0^{(2)}/c_0^{(1)} = 0.5$ ,  $c_*^{(2)}/c_0^{(1)} = 0.1$ .

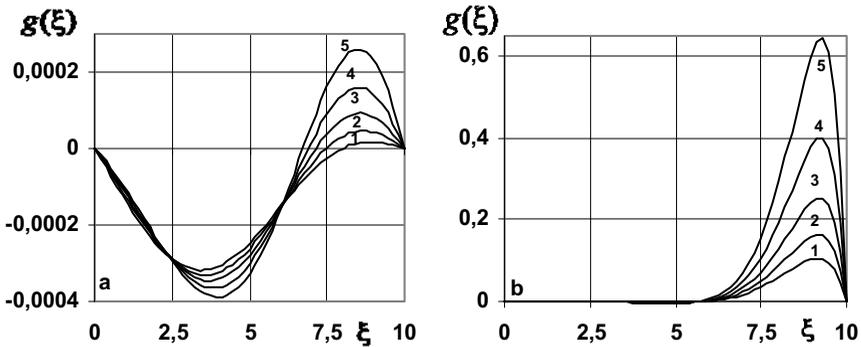


Рис.2. Розподіли функції  $g(\xi)$  для малих (рис.а) і великих (рис.б) значень швидкості конвективного перенесення в області  $\Omega_1$ . Криві 1-5 відповідають  $\hat{v} = 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5$  на рис.а і  $\hat{v} = 2; 2.1; 2.2; 2.3; 2.4$  на рис.б

Зазначимо, що наявність в одній з областей конвективного механізму перенесення домішкових частинок суттєво впливає на поведінку і значення функції потоку через міжфазну границю. При цьому збільшення значення швидкості конвективного перенесення приводить до значного зменшення потоку маси через поверхню контакту на більшій частині цієї межі (для  $\xi \in [0; 6]$  функція  $g(\xi)$  приймає значення в межах похибки (рис.2б), суттєво зростаючи біля нижньої границі шару  $\xi = \xi_0$ ). При малих значеннях параметра  $\hat{v} = (k_2 D_1)^{-1/2} v$  функція  $g(\xi)$  на інтервалі  $[0; \xi_0]$  змінює знак, тобто

змінює напрям результуюча потоку частинок через границю контакту. При цьому мінімальні і максимальні значення  $g(\xi)$  є одного порядку (рис.2а).

Зауважимо також, що такі параметри задачі як відношення коефіцієнтів концентраційної залежності хімічних потенціалів  $\eta_1/\eta_2$ , які визначають стрибок концентрації на міжфазній границі, і відношення  $d = D_2/D_1$  коефіцієнтів дифузії в контактуючих областях суттєво впливають на значення функції  $g(\xi)$ , не змінюючи при цьому її поведінки (рис.3, 4). Зазначимо, що зі зростанням відношень як  $\eta_1/\eta_2$  (рис.3), так і  $D_2/D_1$  (рис.4) зростають абсолютні значення функції  $g(\xi)$  на всьому проміжку.

При зсуві межі контакту від вертикальної границі виділеного елемента  $\zeta = 0$  до поверхні  $\zeta = L + l$  абсолютні значення функції  $g(\xi)$  зростають на порядок для малих  $\hat{v}$  (рис.5а) і в рази – для великих  $\hat{v}$  (рис.5б).

Зауважимо, що величина потоку маси, яка підтримується на верхній границі області  $\Omega_2$ , значно впливає не тільки на кількісний, але і на якісний характер функції  $g(\xi)$  (рис.6). Так, наприклад, для малих швидкостей конвективного перенесення при малих  $J_0^{(2)}$  функція  $g(\xi)$  зростає від поверхні  $\xi = 0$  і приймає тільки додатні значення (крива 1, рис.6а). Зі збільшенням  $J_0^{(2)}$  на порядок функція  $g(\xi)$  спочатку спадає, досягаючи свого мінімуму при  $\xi \approx 2.5$ , а потім зростає, змінюючи свій знак в околі середини шару  $\xi \approx \xi_0/2$  і досягаючи свого максимуму при  $\xi \approx 7.5$  (крива 5, рис.6а). Із зростанням величини  $J_0^{(2)}$  максимум функції  $g(\xi)$  зменшується і зсувається до нижньої границі шару  $\xi = \xi_0$  (рис.6а).

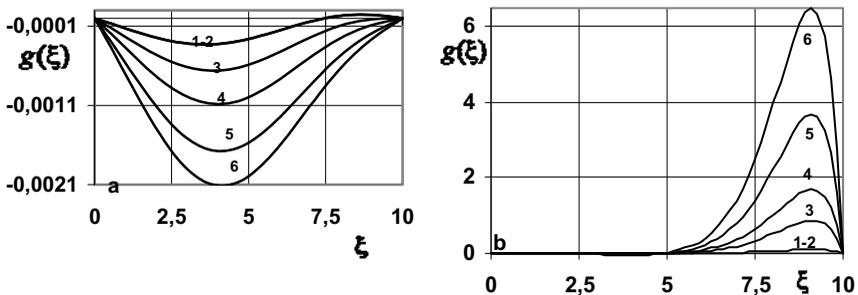


Рис.3. Залежність функції  $g(\xi)$  від відношення  $\eta_1/\eta_2$  коефіцієнтів концентраційної залежності хімічних потенціалів. Криві 1-6 відповідають  $\eta_1/\eta_2 = 0.1; 1; 1.5; 2; 2.3$  для  $\hat{v} = 0.2$  на рис.а і  $\eta_1/\eta_2 = 0.1; 0.7; 1; 1.5; 2$  для  $\hat{v} = 2$  на рис.б

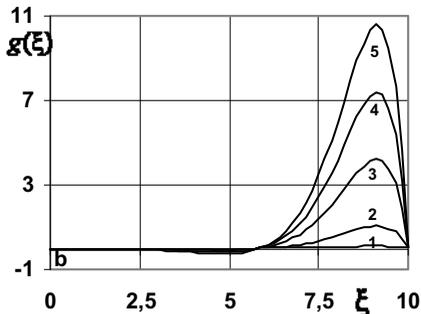
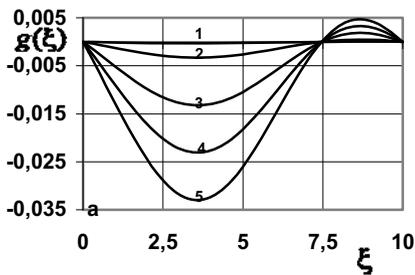


Рис.4. Залежність функції  $g(\xi)$  від коефіцієнта дифузії  $d = D_2/D_1$ .

Криві 1-5 відповідають значенням  $d = 0.01; 0.1; 0.4; 0.7; 1$   
для  $\hat{\nu} = 0.2$  (рис.а) і для  $\hat{\nu} = 2$  (рис.б)

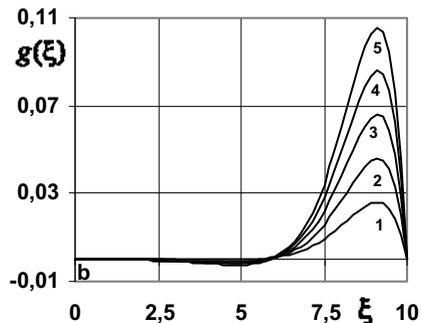
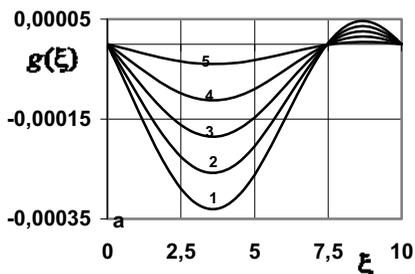


Рис.5. Залежність функції  $g(\xi)$  від місця розташування поверхні контакту областей  $\Omega_1$  та  $\Omega_2$  для  $\hat{\nu} = 0.2$  (рис.а) і  $\hat{\nu} = 2$  (рис.б). Криві 1-5 відповідають значенням

$\Lambda = 0.1; 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$  при  $\Lambda + \lambda = 1$

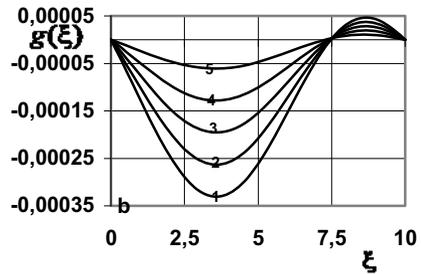
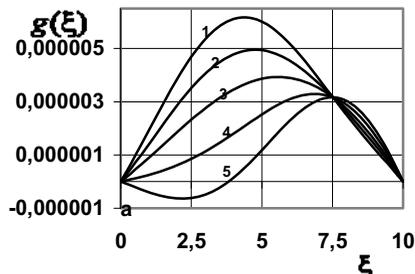


Рис.6. Залежність функції  $g(\xi)$  від різних значень величини потоку на верхній границі області  $\Omega_2$  для  $\hat{\nu} = 0.2$ . Криві 1-5 на рис.а відповідають малим  $J_0^{(2)} = 0.001, 0.003, 0.005, 0.0075, 0.01$ , на рис.б - великим значенням  $J_0^{(2)} = 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.9$

**Висновки.** Для стаціонарного випадку отримано точний аналітичний розв'язок контактної-крайової задачі дифузії домішкової речовини у двофазному тілі регулярної структури з урахуванням конвективної складової в одній з фаз за змішаних граничних умов. Для цього застосовані інтегральні перетворення окремо в контактуючих областях з урахуванням різних видів операторних рівнянь і різних типів граничних умов. Проведений числовий аналіз потоку маси через границю контакту областей, з яких складене тіло, та визначено вплив параметрів задачі на поведінку функції потоку.

Встановлено, що врахування конвективної складової міграції частинок суттєво впливає на поведінку і значення функції потоку через міжфазну границю. Із зростанням значення швидкості конвективного перенесення потік домішки через поверхню контакту різко зменшується. При цьому величина потоку, який підтримується на верхній границі області  $\Omega_2$ , також як і  $\hat{v}$ , впливає і на кількісний і на якісний характер функції  $g(\xi)$ .

Числовий аналіз розподілів концентрації домішкових частинок в контактуючих елементах тіла і потоків маси через нижню границю шару є перспективним для подальших досліджень.

1. Fisher J.S. Calculation of diffusion penetration curves for surface and grain boundary diffusion // J.Appl.Phys. – 1951. – Vol. 22. – P. 74-77.
2. Ху С. Диффузия в кремнии и германии / В кн.: Атомная диффузия в полупроводниках. – Под ред. Шоу Д. – М.: Мир, 1975. – С. 248-405.
3. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К.: Наук. думка, 1991. – 432 с.
4. Чапля С.Я., Чернуха О.Ю. Математичне моделювання дифузійних процесів у випадкових і регулярних структурах. - К.: Наук. думка, 2009. – 302 с.
5. Чапля С.Я., Чернуха О.Ю., Дмитрук В.А. Математичне моделювання стаціонарних процесів дифузії у двофазних тілах регулярної структури з урахуванням конвективного переносу в одній з фаз // Машинознавство. – 2010. – № 5. – С. 10-15.
6. Снеддон И. Преобразования Фурье. – М.: Изд-во иностр. литературы, 1955. – 667 с.
7. Мартыненко Н.А., Пустыльников Л.М. Конечные интегральные преобразования и их применение к исследованию систем с распространенными параметрами. – М.: Наука, 1986. – 304 с.
8. Чапля С.Я., Чернуха О.Ю. Фізико-математичне моделювання гетеродифузного масопереносу. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 128 с.
9. Чернуха О.Ю., Гончарук В.С., Дмитрук В.А. Моделювання граничних випадків контактної-крайової задачі стаціонарної конвективної дифузії в періодичних структурах // Моделювання та інформаційні технології. – 2010. – Вип. 58. - С. 242-253.

Поступила 28.01.2011р.