УДК 539.12:537.8

В. М. Симулик, І. Ю. Кривський

Про розширену дійсну алгебру Кліффорда–Дірака та нові фізично важливі симетрії рівняння Дірака з ненульовою масою

(Представлено академіком НАН України С. В. Пелетмінським)

Введено в розгляд 64-вимірну розширену дійсну алгебру Кліффорда–Дірака (РДКД). На її основі одержано нові чисто матричні симетрії (як підалгебри РДКД алгебри) рівняння Дірака у представленні Фолді–Вотхойзена, а саме, максимальну алгебру інваріантності цього рівняння в класі чисто матричних операторів $\mathrm{A}_{32} = \mathrm{SO}(6) \oplus \hat{\varepsilon} \cdot \mathrm{SO}(6) \oplus \hat{\varepsilon}$, *а також дві різні реалізації зображення* $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ *алгебри* $\mathrm{SO}(1,3)$ *та звідну тензорно-скалярну* $(1,0) \oplus (0,0)$ *і незвідну векторну* $(1/2, 1/2)$ *бозонні* $\mathrm{SO}(1,3)$*-симетрії цього рівняння. Знайдено Пуанкаре симетрії спіну 1, відносно яких інваріантне як рівняння Фолді–Вотхойзена, так і стандартне рівняння Дірака з ненульовою масою.*

1. В наших роботах [1–5] доведено, що рівняння Дірака з масою $m = 0$ інваріантне відносно зображень спіну 1 (векторного $(1/2, 1/2)$ та тензорно-скалярного $(1,0) \otimes (0,0)$) групи $\mathcal{L}$ та породжуваних ними зображень групи $\mathcal{P}$, де $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ — універсальна накриваюча власної ортохронної групи Пуанкаре $\mathrm{P}_+^\uparrow = \mathrm{T}(4) \times) \mathrm{L}_+^\uparrow$ (групи Лоренца $\mathrm{L}_+^\uparrow$)). Тут ми (на основі введення в розгляд узагальненої алгебри Кліффорда–Дірака (КД) та використання канонічного зображення Фолді–Вотхойзена (ФВ) [6] як первісного для аналізу спінорного поля) встановлюємо аналогічні симетрії рівняння Дірака

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0, \qquad \mu = \overline{0,3} = 0,1,2,3, \qquad \psi \in \mathrm{S}^{3,4}, \tag{1}$$

з ненульовою масою, що є нетривіальним новим кроком порівняно з результатами [1–5]. Одержані наукові результати коротко викладені нижче у п. 3–9.

2. Використовувані позначення та означення. Матриці Дірака γ^μ, які задовольняють комутаційні співвідношення алгебри КД

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \qquad g = (g^\mu_\nu) = \mathrm{diag}\, g(+ - - -), \tag{2}$$

для визначеності і подальших потреб фіксуємо у зображенні Паулі–Дірака

$$\begin{gathered}\gamma^0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \qquad \gamma^k = \begin{vmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{vmatrix}; \\ \sigma^1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \sigma^2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}, \qquad \sigma^3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}; \qquad k = 1,2,3.\end{gathered} \tag{3}$$

Рівняння Дірака у канонічному зображенні ФВ [6] має вигляд

$$(i\partial_0 - \gamma_0 \hat{\omega})\phi(x) = 0, \qquad \phi \in \mathrm{S}^{3,4}, \tag{4}$$

(пояснення позначень та змісту припущень ψ, $\phi \in \mathrm{S}^{3,4}$ див нижче у п. 10). Перетворення ФВ [6], яке пов'язує рівняння (1) і (4), має вигляд

$$\psi(x) \to \phi(x) = V\psi(x), \qquad V \equiv \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{p} + \hat{\omega} + m}{\sqrt{2\hat{\omega}(\hat{\omega} + m)}}, \qquad V^{-1} \equiv \frac{-\vec{\gamma} \cdot \vec{p} + \hat{\omega} + m}{\sqrt{2\hat{\omega}(\hat{\omega} + m)}}, \tag{5}$$

де

$$\hat{\omega} \equiv \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2} = \sqrt{-\Delta + m^2}, \qquad \vec{p} = -i\nabla, \tag{6}$$

$\triangle$ — оператор Лапласа, а рівності $VV^{-1} = V^{-1}V = 1$ є наслідками алгебри КД (2). Детальніше про канонічне зображення ФВ та нелокальні оператори типу $\hat{\omega}$ (6) див., наприклад, у [7–9].

3. Стандартна алгебра Кліфорда–Дірака. Як 16 незалежних (ind) елементів стандартної алгебри КД $\equiv$ (CD–Clifford–Dirac) виберемо матриці

$$\{\text{indCD}\} \equiv \{\mathrm{I}, s_{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \hat{\mu}, \hat{\nu} = \overline{0,5}\} = \left\{\mathrm{I}, s_{\breve{\mu}\breve{\nu}} \equiv \frac{1}{4}[\gamma_{\breve{\mu}}, \gamma_{\breve{\nu}}], \breve{\mu}, \breve{\nu} = \overline{0,4}, s_{\breve{\mu}5} = -s_{5\breve{\mu}} = \frac{1}{2}\gamma_{\breve{\mu}}\right\}, \tag{7}$$

де $\gamma_4 \equiv \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = i\gamma_5^{\text{станд}}$, а матриці $s_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ в (7) є первісні генератори групи SO(1,5) $\supset$ $\supset$ SO(1,3)$\cong \mathcal{L}$ поворотів у просторі Мінковського M(1,5), асоційовані з дійсними параметрами $\omega^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = -\omega^{\hat{\nu}\hat{\mu}}$, тому вони задовольняють комутаційні співвідношення

$$[s_{\hat{\mu}\hat{\nu}}, s_{\hat{\rho}\hat{\sigma}}] = -g_{\hat{\mu}\hat{\rho}}s_{\hat{\nu}\hat{\sigma}} - g_{\hat{\rho}\hat{\nu}}s_{\hat{\sigma}\hat{\mu}} - g_{\hat{\nu}\hat{\sigma}}s_{\hat{\mu}\hat{\rho}} - g_{\hat{\sigma}\hat{\mu}}s_{\hat{\rho}\hat{\nu}}. \tag{8}$$

4. Розширена дійсна алгебра Кліфорда–Дірака. Стартуючи з алгебри КД, породжуваної генераторами (7), введемо в розгляд розширену дійсну алгебру Кліфорда–Дірака (РДКД $\equiv$ ERCD — extended real Clifford–Dirac), 64 незалежні, чисто матричні, елементи якої мають вигляд

$$\{\text{ERCD}\} = \{\text{indCD}, i \cdot \text{indCD}, \hat{C} \cdot \text{indCD}, i\hat{C} \cdot \text{indCD}\}, \tag{9}$$

де $\hat{C}$ — оператор комплексного спряження у множині $\{\phi\} \in \mathrm{S}^{3,4}$ розв'язків рівняння ФВ (4), а 16 indCD задані у (7). Таким чином, алгебра РДКД як дійсна алгебра у просторі $\mathrm{S}^{3,4}$ включає лінійні суперпозиції всіх можливих композицій γ-матриць, оператора $\hat{C}$ комплексного спряження та уявної одиниці i, тобто є повним набором операторів, частина яких використовувалась у алгебрі Паулі–Гюрші–Ібрагімова (про 8-вимірну, коли $m = 0$, та 4-вимірну, коли маса ненульова, алгебру Паулі–Гюрші–Ібрагімова інваріантності рівняння Дірака див., наприклад, у [1] та в оригінальних роботах [10, 11] названих авторів). Характерною особливістю алгебри РДКД є те, що її генератори (як і генератори стандартної алгебри КД) комутують або антикомутують між собою. Серед незалежних генераторів алгебри РДКД є 36 ермітових і 28 антиермітових операторів, останні породжують алгебру SO (8) (підалгебру РДКД).

На основі 64 генераторів матричної алгебри РДКД (9) легко встановити широкі та фізично важливі симетрії спочатку рівняння ФВ (4), а потім (здійснивши відповідний перехід за допомогою оператора ФВ V (5)) — і стандартного рівняння Дірака (1). Такі алгебри симетрії будуть підалгебрами загальної алгебри РДКД (9).

5. Максимальна чисто матрична алгебра інваріантності рівняння Фолді–Вотхойзена. Максимальною чисто матричною алгеброю інваріантності рівняння Дірака у зображенні ФВ (4) є 32-вимірна алгебра $\mathrm{A}_{32} = \mathrm{SO}(6) \oplus \hat{\varepsilon} \cdot \mathrm{SO}(6) \oplus \hat{\varepsilon}$, для якої 16 антиермітових генераторів s_{AB}, $\hat{\varepsilon}$ мають вигляд

$$s_{AB} = \frac{1}{4}[\gamma_A, \gamma_B] = -s_{BA}, \qquad A, B = \overline{1,6}, \qquad \gamma_5 \equiv \gamma_1\gamma_3\widehat{C}, \qquad \gamma_6 \equiv i\gamma_1\gamma_3\widehat{C} \tag{10}$$

(наша $\gamma_5 \neq \gamma_5^{\text{станд}}$) і задовольняють стандартні комутаційні співвідношення для первісних (антиермітових) генераторів алгебри SO (6):

$$\begin{aligned} &[s_{AB}, s_{CD}] = \delta_{AC}s_{BD} + \delta_{CB}s_{DA} + \delta_{BD}s_{AC} + \delta_{DA}s_{CB}, \\ &[s_{AB}, \hat{\varepsilon}] = 0; \quad A, B, C, D = \overline{1,6}, \end{aligned} \tag{11}$$

а 16 ермітових генераторів $\tilde{s}_{AB}$ мають вигляд

$$\tilde{s}_{AB} = i\gamma_0 s_{AB} \tag{12}$$

і задовольняють такі SO (6) комутаційні співвідношення:

$$[\tilde{s}_{AB}, \tilde{s}_{CD}] = i\gamma_0(\delta_{AC}\tilde{s}_{BD} + \delta_{CB}\tilde{s}_{DA} + \delta_{BD}\tilde{s}_{AC} + \delta_{DA}\tilde{s}_{CB}), \tag{13}$$

де $\hat{\varepsilon} \equiv i\gamma_0$ є оператором Казіміра алгебри A_{32} інваріантності рівняння (4).

Алгебра $\mathrm{A}_{32} = \mathrm{SO}(6) \oplus \hat{\varepsilon} \cdot \mathrm{SO}(6) \oplus \hat{\varepsilon}$ (підалгебра РДКД (9)) є максимальною чисто матричною симетрією рівняння Дірака у зображенні ФВ (4), частина генераторів якої має вигляд операторів Паулі–Гюрші–Ібрагімова [10, 11].

Доведення наведених вище тверджень проводиться безпосереднім обчисленням комутаційних співвідношень (11), (13) для конструкцій (10), (12), а також перевіркою комутування операторів (10), (12) з оператором рівняння (4).

6. Алгебра $\mathbf{A_{32} = SO(6) \oplus \hat{\varepsilon} \cdot SO(6) \oplus \hat{\varepsilon}}$ як симетрія рівняння Дірака. Образами елементів A_{32} у зображенні Паулі–Дірака (ПД), тобто симетріями стандартного рівняння Дірака (1) з ненульовою масою, будуть оператори $V^{-1}(s_{AB}, \hat{\varepsilon}, \tilde{s}_{AB})V$ (де V, V^{-1} задані у (5)). Певна частина елементів A_{32} у ПД-зображенні вже не є чисто матричними, а є деякими нелокальними (псевдодиференціальними) операторами.

Фізично важливими наслідками застосування РДКД до аналізу симетрій рівнянь Дірака та ФВ є одержані нами бозонні зображення спіну 1 груп Лоренца та Пуанкаре (а також багато інших симетрій), відносно яких інваріантне рівняння Дірака (1) з ненульовою масою.

7. Ферміонні Лоренц-симетрії рівнянь Фолді–Вотхойзена та Дірака. Розглянемо фізично важливі підалгебри A_{32}. Як на перші фізично важливі нові симетрії рівняння ФВ (4) вкажемо на дві різні реалізації зображення $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ алгебри SO(1,3) групи Лоренца L, відносно яких інваріантне рівняння Дірака у зображенні ФВ (4). Відповідні генератори мають вигляд:

$$s^I_{\mu\nu} = \left\{ s^I_{0k} = \frac{i}{2}\gamma_k\gamma_4,\ s^I_{mk} = \frac{1}{4}[\gamma_m, \gamma_k] \right\}, \qquad \gamma_4 \equiv \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \qquad (k, m = \overline{1,3}), \tag{14}$$

$$s^{II}_{\mu\nu} = \left\{ s^{II}_{01} = \frac{i}{2}\gamma_2\widehat{C}, s^{II}_{02} = -\frac{1}{2}\gamma_2\widehat{C}, s^{II}_{03} = -\frac{1}{2}\gamma_0, s^{II}_{12} = \frac{i}{2}, s^{II}_{31} = \frac{i}{2}\gamma_0\gamma_2\widehat{C}, s^{II}_{23} = \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_2\widehat{C} \right\}, \tag{15}$$

де $i\gamma_0$ — спільний для обох наборів генераторів оператор Казіміра. Легко встановити, що генератори кожного з наборів, як (14), так і (15), задовольняють комутаційні співвідношення (8). У ПД зображенні (для рівняння Дірака (1)) одержуємо $V^{-1}s^{I}_{\mu\nu}V$, $V^{-1}s^{II}_{\mu\nu}V$. Важливо, що кожен із елементів (14) комутує з довільним елементом із (15), що дозволяє зробити таке твердження.

8. Бозонні Лоренц-симетрії рівнянь Фолді–Вотхойзена та Дірака. Рівняння Дірака у зображенні ФВ (4) також є інваріантним відносно двох різних бозонних зображень групи Лоренца $\mathcal{L}$: тензорно-скалярного $(1,0)\otimes(0,0)$ та незвідного векторного $(1/2,1/2)$ групи SO(1,3), генератори яких будуються з операторів (14), (15) таким чином:

$$
\begin{aligned}
&s^{TS}_{\mu\nu} = \left\{s^{TS}_{0k} = s^{I}_{0k} + s^{II}_{0k},\ s^{TS}_{mn} = s^{I}_{mn} + s^{II}_{mn}\right\},\\
&s^{V}_{\mu\nu} = \left\{s^{V}_{0k} = -s^{I}_{0k} + s^{II}_{0k},\ s^{V}_{mn} = s^{TS}_{mn}\right\},
\end{aligned}
\tag{16}
$$

де індексами TS та V позначено генератори тензорно-скалярного та векторного зображень, відповідно.

Справедливість даного твердження є очевидною у бозонному зображенні γ-матриць (3), в якому ці матриці явно залежать від оператора $\widehat{C}$ комплексного спряження, але оператори (16) набувають максимально простого, добре відомого (див., наприклад, формули (32), (33) в [1]) стандартного для зображень $(1,0)\otimes(0,0)$ та $(1/2,1/2)$ групи SO(1,3) явного вигляду. Перехід $s^{\text{Бозе}}_{\mu\nu} = W s^{V,TS}_{\mu\nu} W^{-1}$ до такого бозонного зображення здійснюється за допомогою оператора

$$
\begin{aligned}
&W = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \widehat{C} \\ 0 & i & 0 & i\widehat{C} \\ -1 & 0 & \widehat{C} & 0 \\ -1 & 0 & -\widehat{C} & 0 \end{vmatrix}, \qquad W^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{C} & -\widehat{C} \\ \widehat{C} & i\widehat{C} & 0 & 0 \end{vmatrix},\\
&WW^{-1} = W^{-1}W = 1.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Для рівняння Дірака (1) генераторами відповідних симетрій будуть образи $V^{-1}s^{TS}_{\mu\nu}V$, $V^{-1}s^{V}_{\mu\nu}V$ операторів (16), одержані на основі перетворення ФВ (5). Тим самим оператор W (17) задає перетворення суперсиметрії рівняння Фолді–Вотхойзена (4).

9. Бозонні Пуанкаре-симетрії рівнянь Фолді–Вотхойзена та Дірака. Як нову фізично важливу симетрію рівняння ФВ (4) наводимо зображення спіну 1 групи Пуанкаре $P \supset L$ канонічного типу, тобто унітарне в оснащеному гільбертовому просторі (див. нижче формулу (21)) зображення, а саме:

$$
\begin{aligned}
&p_0 = -i\gamma_0\hat{\omega}, \qquad \hat{p}_n = \partial_n, \qquad j_{ln} = x_l\partial_n - x_n\partial_l + s^{I}_{ln} + s^{II}_{ln},\\
&j_{0k} = x_0\partial_k + i\gamma_0\left\{x_k\hat{\omega} + \frac{\partial_k}{2\hat{\omega}} + \frac{[(\vec{s}^{I} + \vec{s}^{II})\times\vec{\partial}]_k}{\hat{\omega}+m}\right\},
\end{aligned}
\tag{18}
$$

де $\hat{\omega}$ — заданий у (6) нелокальний оператор, s^{I}_{ln} і s^{II}_{ln} задані в (14) і (15), відповідно, а $\vec{s}^{I,II} = (s_{23}, s_{31}, s_{12})^{I,II}$. Безпосередніми обчисленнями відповідних комутаторів та виразів для операторів Казіміра групи Пуанкаре $\mathcal{P}\supset\mathcal{L}$ переконуємось, що генератори (18) комутують з оператором рівняння (4), задовольняють таблицю комутаційних співвідношень для генераторів групи Пуанкаре і реалізують Бозе-зображення спіну 1 цієї групи, тобто задають симетрію спіну 1 рівняння ФВ (4). Генератори групи Пуанкаре тут вибрано антиермітовими (тобто асоційованими з дійсними параметрами $a = (a^{\mu})$, $\omega = (\omega^{\mu\nu})$ трансляцій і поворотів у просторі-часі Мінковського M(1,3)) для забезпечення комутування їх диференціальних частин з операторами s^{II}_{ln} із (15), які містять оператор $\hat{C}$ комплексного спряження. Зображення (18) є зображенням групи Пуанкаре $\mathcal{P} \supset \mathcal{L}$ для тензорно-скалярного поля, тобто для польового SU (2)-спінового дублету спінів $s = 1{,}0$.

Для рівняння Дірака (1) відповідне до (18) (одержане з (18) за допомогою перетворення ФВ (5)) бозонне зображення групи Пуанкаре $\mathcal{P} \supset \mathcal{L}$, відносно якого інваріантне рівняння (1) задається такими генераторами:

$$\begin{aligned} &\hat{p}_0 = -i\gamma_0(\vec{\gamma}\vec{p} + m) = -iH_D, \qquad \hat{p}_k = \partial_k, \\ &j_{kl} = x_k\partial_l - x_l\partial_k + s_{kl} + \hat{s}_{kl}, \qquad j_{0k} = x_0\partial_k - x_k\hat{p}_0 + s_{0k} + \frac{\hat{s}_{0l}\partial_n\varepsilon_{kln}}{\hat{\omega} + m}, \end{aligned} \tag{19}$$

де ε_{kln} — тензор Леві-Чівітта, а оператори $s_{\mu\nu}$ та $\hat{s}_{\mu\nu} = V^{-1}s^{II}_{\mu\nu}V$ — образи генераторів $\hat{s}^{II}_{\mu\nu}$ у ПД-зображенні — мають вигляд

$$\begin{aligned} &s_{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \\ &\hat{s}_{\mu\nu} = \Big\{\hat{s}_{01} = \frac{1}{2}i\gamma_2\hat{C},\ \hat{s}_{02} = -\frac{1}{2}\gamma_2\hat{C},\ \hat{s}_{03} = -\gamma^0\frac{\vec{\gamma}\cdot\vec{p} + m}{2\hat{\omega}} = -\frac{H_D}{2\hat{\omega}},\ \hat{s}_{12} = \frac{i}{2}, \\ &\qquad \hat{s}_{31} = \frac{iH_D}{2\hat{\omega}}\gamma_2\hat{C},\ \hat{s}_{23} = \frac{H_D}{2\hat{\omega}}\gamma_2\hat{C}\Big\}, \end{aligned} \tag{20}$$

тобто, на відміну від ФВ-зображення, частина з них не є чисто матричними, оскільки містить псевдодиференціальний оператор $\hat{\omega} \equiv \sqrt{-\Delta + m^2})^{-1}$, коректно визначений у просторі $\mathrm{S}^{3,4}$. Очевидно, як наслідок перетворення ФВ, що оператори (20) комутують з дiракіаном (1) та задовольняють комутаційні співвідношення алгебри Пуанкаре (в цьому неважко переконатись і безпосередньо). Таким чином, бозонну (спіна 1) Пуанкаре-симетрію рівняння Дірака (1) з ненульовою масою доведено.

Відзначимо, що генератори (18) без доданків s^{II}_{ln} та $\vec{s}^{II} = (s_{23}, s_{31}, s_{12})^{II}$ точно збігаються з формулами для генераторів стандартних Фермі (спіна 1/2) $\mathcal{P}$-симетрій рівняння ФВ, наведених у роботі [6] (аналогічно, вирази в (19) без доданків $\hat{s}_{\mu\nu}$ збігаються з формулами стандартних Фермі (спіна 1/2) $\mathcal{P}$-симетрій рівняння Дірака (1)). Різниця між відповідними генераторами із [6] і наведеними тут полягає лише у виборі нами первісних, асоційованих з дійсними параметрами, генераторів.

Доведене тут твердження про те, що рівняння Дірака (1) з довільною масою m інваріантне не лише відносно (давно відомого) ферміонного (спіна 1/2), але й відносно бозонного (спіна 1) зображень групи Пуанкаре означає, що рівняння Дірака має властивість Фермі–Бозе дуалізму (може описувати не лише ферміони, але й бозони).

10. Пояснення припущень $\psi, \phi \in \mathrm{S}^{3,4}$ у формулах (1) та (4). У формулах (1), (4) $\mathrm{S}^{3,4} \equiv \mathrm{S}(\mathrm{R}^3) \times \mathrm{C}^4$ — це простір основних 4-компонентних комплекснозначних функцій Шварца, $\mathrm{R}^3 \subset \mathrm{M}(1,3)$, а змінна x^0 у функцій $\psi(x)$ та $\phi(x)$ розглядається як параметр часової еволюції цих функцій у довільно фіксованій інерціальній системі відліку (ІСВ) (причому достатнім є припущення бодай двічі неперервної диференційовності за x^0 об'єктів ψ, ϕ). Нагадаємо, що у стандартних аксіоматичних підходах припускається $\psi \in \mathrm{S}^{4,4*} \equiv (\mathrm{S}(\mathrm{M}(1{,}3)) \times \mathrm{C}^4)^*$

(де $(\mathrm{S}(\mathrm{M}(1{,}3)) \times \mathrm{C}^4)^*$ — простір відповідних узагальнених функцій Шварца). Однак, завдяки наслідку $(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\psi(x) = 0$ з (1), спінор виявляється звичайною функцією змінної x^0. Далі, простір основних функцій Шварца $\mathrm{S}^{3,4}$ є щільним як у просторі $\mathrm{S}^{3,4*}$, так і у оснащеному гільбертовому просторі

$$\mathrm{S}^{3,4} \subset \mathrm{L}_2(\mathrm{R}^3) \times \mathrm{C}^4 \subset \mathrm{S}^{3,4^*}, \qquad \mathrm{R}^3 \subset \mathrm{M}(1,3). \tag{21}$$

Причому простір $\mathrm{S}^{3,4}$ можна і доцільно обрати за спільну область визначення (і значень) всіх використовуваних тут операторів спостережуваних величин як відповідних функцій від антиермітових у просторі (21) операторів $-i\vec{x}$, $\hat{p}_k = \partial_k$ та від різних конструкцій спінових операторів. Тому всі необхідні обчислення операторних рівностей в області $S^{3,4}$ виявляються математично коректними. Далі, збіжні в $S^{3,4}$ експоненціальні операторні ряди

$$U(a,\omega) = \exp\left(a^\rho \hat{p}_\rho + \frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma} j_{\rho\sigma}\right) \tag{22}$$

з генераторами p_ρ, $j_{\rho\sigma}$ з (18) і (19) визначають відповідні унітарні зображення групи Пуанкаре $\mathcal{P}$ і вони забезпечують $\mathcal{P}$-інваріантність розглядуваних моделей теорії поля.

11. Відзначимо, що одержані вище Пуанкаре-симетрії спіну 1 рівняння Дірака з ненульовою масою (і відповідні симетрії рівняння ФВ) розкривають нові можливості цього рівняння, яке виявляється придатним для опису не лише ферміонів спіну $1/2$, але й бозонів спіну 1 з $m \neq 0$. Симетрії, вперше одержані нами в [1–5] для випадку безмасового рівняння Дірака, тепер доведено і для випадку довільної маси. Знайдені для рівняння Дірака симетрії спіну 1 наочно свідчать про наявність Бозе-розв'язків цього рівняння. Тим самим виявлено нові можливості для побудови наведених, наприклад, у [12] супермультиплетів елементарних частинок та підходів до суперсиметричних теорій поля. Доведені тут нові властивості рівняння Дірака запропоновано називати Фермі–Бозе дуалізмом, а відповідний підхід до суперсиметрії (на відміну від стандартного) — природним, натуральним підходом.

Важливим результатом є також введення в розгляд розширеної дійсної алгебри Кліффорда–Дірака (РДКД $\equiv$ ERCD — extended real Clifford–Dirac) (9). Саме завдяки її застосуванню тут одержано нові чисто матричні симетрії рівняння Дірака у зображенні ФВ (4), а саме максимальну алгебру інваріантності цього рівняння в класі чисто матричних операторів $\mathrm{A}_{32} = \mathrm{SO}(6) \oplus \hat{\varepsilon} \cdot \mathrm{SO}(6) \oplus \hat{\varepsilon}$ (10)–(13), та дві різні реалізації (14), (15) зображення $(1/2,0)\oplus(0,1/2)$ алгебри SO(1,3), відносно яких інваріантне рівняння (4), і фізично важливі $(1,0)\otimes(0,0)$ і $(1/2,1/2)$ бозонні SO(1,3)-симетрії цього рівняння. Пуанкаре-симетрії спіну 1 також є наслідком (хоча і непрямим) використання алгебри РДКД.

Зрозуміло, що можливості використання алгебри РДКД значно ширші, аніж декілька найпростіших прикладів, наведених тут. Зокрема, можливо довести симетрії спіну $3/2$ для рівняння Дірака, нові симетрії рівнянь Максвелла та широкі суперсиметрії рівняння Дірака–Кейлера.

1. *Simulik V. M., Krivsky I. Yu.* Bosonic symmetries of the massless Dirac equation // Adv. Appl. Cliff. Algebras. – 1998. – **8**, No 1. – P. 69–82.
2. *Simulik V. M., Krivsky I. Yu.* Bosonic symmetries of the massless Dirac equations – some consequences // Укр. фіз. журн. – 1998. – **43**, No 7. – C. 857–863.
3. *Simulik V. M. Krivsky I. Yu.* Relationship between the Maxwell and Dirac equations: symmetries, quantization, models of atom // Rep. Math. Phys. – 2002. – **50**, No 3. – P. 315–328.
4. *Simulik V. M., Krivsky I. Yu.* Slightly generalized Maxwell classical electrodynamics can be applied to interatomic phenomena // Annales de la Fondation Louis de Broglie (Special issue: Contemporary Electrodynamics). – 2002. – **27**, No 2. – P. 303–329.

5. *Simulik V. M. Krivsky I. Yu.* Classical electrodynamical aspect of the Dirac equation // Electromagnetic Phenomena. – 2003. – **9**, No 1. – P. 103–114.
6. *Foldy L., Wouthuysen S.* On the Dirac theory of spin 1/2 particles and its non-relativistic limit // Phys. Rev. – 1950. – **78**, No 1. – P. 29–36.
7. *Кривський І. Ю., Симулик В. М.* Про необхідність канонічного представлення Фолді–Вотхойзена для спінорного поля // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. Фізика. – 2008. – Вип. 23. – С. 16–22.
8. *Кривський І. Ю., Симулик В. М.* Про релятивістську квантову механіку частинки довільних маси і спіну у канонічному представленні Фолді–Вотхойзена // Там само. – С. 36–44.
9. *Кривський І. Ю., Симулик В. М., Тимчик Р. В.* Про лагранжевий підхід та динамічні змінні для спінорного поля у канонічному представленні Фолді–Вотхойзена // Там само. – 2009. – Вип. 24. – С. 175–186.
10. *Gursey F.* Relation of charge independence and baryon conservation to Pauli's transformation // Nuovo Cim. – 1958. – **7**, No 5. – P. 411–415.
11. *Ибрагимов Н. Х.* Инвариантные вариационные задачи и законы сохранения (замечания к теореме Нетер) // Теорет. мат. физ. – 1969. – **1**, № 3. – С. 350–359.
12. *Ахиезер А. И., Пелетминский С. В.* Поля и фундаментальные взаимодействия. – Киев: Наук. думка, 1986. – 552 с.

Інститут електронної фізики НАН України, Ужгород
Надійшло до редакції 23.07.2009

V. M. Simulik, I. Yu. Krivsky

On the extended real Clifford–Dirac algebra and new physically meaningful symmetries of the Dirac equation with nonzero mass

A 64-dimensional extended real Clifford–Dirac (ERCD) algebra is introduced. On its basis, new pure matrix symmetries (as subalgebras of the ERCD algebra) of the Dirac equation in the Foldy–Wouthuysen representation are found: (i) the 32-dimensional $\mathrm{A}_{32} = \mathrm{SO}(6) \oplus \hat{\varepsilon} \cdot \mathrm{SO}(6) \oplus \hat{\varepsilon}$ *algebra, which is proved to be the maximal pure matrix symmetry of this equation, (ii) two different realizations of the* $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ *representation of* $\mathrm{SO}(1,3)$ *algebra, (iii) reducible tensor-scalar* $(1,0) \otimes (0,0)$ *and irreducible vector* $(1/2, 1/2)$ *bosonic* $\mathrm{SO}(1,3)$*-symmetries. Finally, spin 1 Poincaré symmetries both for the Foldy–Wouthuysen and standard Dirac equations with nonzero mass are found.*