УДК 519.6

Академік НАН України **І. В. Сергієнко, О. М. Литвин,**
О. В. Ткаченко, В. О. Пасічник, О. О. Черняк

Математична модель плоскої кривої у неявній формі на основі інтерлінації функцій

Запропоновано новий метод побудови рівнянь плоских кривих у неявній формі $\Gamma\colon \omega(x,y)=0$. *В основі методу — оператори інтерлінації* $O_D f(x,y)\in C^r(R^2)$, $r\geqslant 1$, *невідомої функції* $f(x,y)$ *на системі взаємно перпендикулярних прямих, яка задовольняє рівняння* $\Gamma\colon f(x,y)=0$. *Невідомі сліди функції* $f(x,y)$, *які входять в оператор інтерлінації* $O_D f(x,y)$, *знаходяться з умови найкращого середньоквадратичного наближення* $O_D f(x,y)$ *до* $f(x,y)$, *побудованої за допомогою* R*-функцій.*

Задача побудови математичної моделі плоскої кривої складеної форми (яка є об'єднанням частин відомих кривих) широко застосовується на практиці. Досить відзначити необхідність її розв'язання при описі рівнянь границь плоских областей складеної форми (обмежених дугами відомих кривих) у варіаційних методах розв'язання крайових задач. Інший приклад — необхідність побудови кривої у явній або неявній формі на основі точок на ній, отриманих експериментальним шляхом.

Актуальність теми. Одним з найскладніших етапів при побудові математичних моделей кривих у неявній формі є задовільнення технологічних обмежень диференціального типу (неперервність похідних порядків r, $r\geqslant 1$ у всіх точках площини, включаючи кутові точки). Тому актуальною є задача побудови і дослідження математичних моделей ліній у неявній формі, які допускають оптимальне наближення до реальної кривої (у тому або іншому сенсі) при задовільненні технологічних обмежень.

Аналіз літературних джерел, присвячених поставленій задачі. Для опису ліній використовуються:

явна форма задання лінії у вигляді $y=f(x)$, $x\in D_x$ або $x=f(y)$, $y\in D_y$;

неявна форма задання лінії у вигляді $F(x,y)=0$, $(x,y)\in D_{xy}$;

задання лінії у вигляді набору точок $M_k(x_k,y_k)$, $k=\overline{1,N}$;

параметричне задання лінії у вигляді $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in D_t$, частинним випадком якого є задання кривої у полярній системі координат $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $0\leqslant r<\infty$, $0\leqslant\varphi<2\pi$. В цих формулах вважається, що на лінії $r=r(\varphi)$. На практиці використовуються також інші системи координат.

Теорія інтерлінації, інтерфлетації та мішаної апроксимації функцій [1–5] знаходить застосування у різних галузях науки і техніки. Зокрема, її використання дозволяє розв'язати поставлену задачу. Серед аналітичних методів опису ліній у неявній формі, що є об'єднанням частин відомих ліній, слід відзначити метод R-функцій [6]. Він дозволяє за допомогою відомих рівнянь $w_i(x,y)=0$, $i=\overline{1,N}$, вказаних частин ліній та логічної функції

$$F(u_1,u_2,\ldots,u_N,\wedge,\vee,\neg),$$

що описує область, обмежену даною кривою за допомогою логічних операцій кон'юнкції, диз'юнкції, заперечення $\wedge$, $\vee$, $\neg$ та R-функцій

$$u \wedge_0 v = \frac{u + v - \sqrt{u^2 + v^2}}{2}, \qquad u \vee_0 v = \frac{u + v + \sqrt{u^2 + v^2}}{2}, -u,$$

отримувати потрібне рівняння лінії у вигляді

$$F(w_1, w_2, \ldots, w_N, \wedge_0, \vee_0, -) = 0.$$

Недолік цього методу полягає у тому, що одержана таким чином функція $F(w_1, w_2, \ldots, w_N, \wedge_0, \vee_0, -) = F(x, y)$ у кутових точках є недиференційовною. Тому в задачах, де істотною є вимога, щоб наближуюча функція $F(x, y)$ мала неперервні похідні високих порядків r, $r \geqslant 1$, цей підхід потребує додаткових досліджень.

У роботі [3] запропонований метод точного задовільнення граничних умов (взагалі кажучи, неоднорідних) на границях областей D, обмежених дугами відомих кривих. Цей підхід істотно використовує сплайн-інтерлінацію функцій двох змінних. Він лежить в основі запропонованого у даній роботі методу побудови неявних рівнянь плоских кривих. Метою даної роботи є побудова математичної моделі кривої Γ: $f(x, y) = 0$ у неявній формі $F_{ap}(x, y)$ на основі використання інтерлінації функцій двох змінних. При цьому функція $F_{ap}(x, y) = 0$ має найменше середньоквадратичне відхилення від нормальної функції $F_n(x, y) = \min\limits_{(\xi,\eta)\in\Gamma} \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$ кривої Γ та належить до заданого класу $C^r(D)$, $r = 0, 1, \ldots$. Критерій вибору параметрів, що входять у $F_{ap}(x, y)$, може бути іншим, наприклад, можна мінімізувати середньоквадратичне відхилення $F_{ap}(x, y)$ від функції $F(x, y)$, побудованої за допомогою R-функцій.

Допоміжні твердження. При побудові формул сплайн-інтерлінації використовуються базисні ермітові інтерполяційні поліноми $h_{k,s}(x, x_1, x_2)$, $k = 1, 2$; $s = 0, \ldots, n$ з властивостями $h_{k,s}^{(p)}(x_\ell, x_1, x_2) = \delta_{k,\ell}\delta_{p,s}$, $k, \ell = 1, 2$; $0 \leqslant p, s \leqslant n$ та базисні B-сплайни $S_n(x) := S_n(x, X, Y) \in C^{n-1}(R)$ степеня n, $n \geqslant 2$ дефекту 1 на нерівномірній (взагалі кажучи) сітці вузлів $X = (X_0, X_1, \ldots, X_n, X_{n+1})$, $y = (y_0, y_1, \ldots, y_n, y_{n+1})$, $\operatorname{sup} p(S_n(x)) = (X_0, X_{n+1})$ [6]. $S_n(x)$ є сплайном n-го степеня з вузлами X_k, $k = \overline{0, n+1}$ та невідомими $y_1, \ldots, y_n$, що знаходяться з умов $y_0 = y_{n+1} = 0$,

$$S_n^{(n-p)}(x) = \int\limits_{X_0}^{x} S_n^{(n-p+1)}(t)\, dt, \qquad p = 2, \ldots, n,$$

$$S_n^{(n-1)}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant X_0, \\ g_{n-1,k}(x, y) = y_{k-1}\dfrac{x - X_k}{X_{k-1} - X_k} + y_k\dfrac{x - X_{k-1}}{X_k - X_{k-1}}, & X_{k-1} < x \leqslant X_k, \\ \qquad k = \overline{1, n+1}, & \\ 0, & x \geqslant X_{n+1}. \end{cases}$$

Тобто, знаходження невідомих $y_1, \ldots, y_n$ зводиться до розв'язання системи $S_n^{(n-p)}(X_{n+1}) = 0$, $p = 2, \ldots, n$ (необхідні умови) та $\int\limits_{X_0}^{X_{n+1}} S_n(t)\, dt = 1$. Останню умову можна замінити іншою умовою нормування.

Основні твердження.Нижче будемо вважати, що $D \subset R^2$ — область на площині, границя якої Γ є об'єднанням дуг відомих кривих. Для спрощення викладу матеріалу припустимо, що область D повністю розміщена в прямокутнику $[a,b] \times [c,d]$. Розіб'ємо D на підобласті прямими

$$x = x_k, \qquad k = \overline{0, M_1}, \qquad y = y_\ell, \qquad \ell = \overline{0, M_2},$$
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{M_1} = b; \qquad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{M_2} = d.$$

В результаті D розіб'ється на прямокутники

$$R_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \subset D$$

або чотирикутники

$$R_{i,j}^{(1)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}(x)] \subset G,$$
$$R_{i,j}^{(2)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j(x), y_{j+1}] \subset D,$$
$$R_{i,j}^{(3)} = [x_i(y), x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \subset D,$$
$$R_{i,j}^{(4)} = [x_i, x_{i+1}(y)] \times [y_j, y_{j+1}] \subset D,$$

в яких три прямі паралельні осям координат, а одна — криволінійна (взагалі кажучи) сторона є частиною границі Γ області D. Крім того, підобласті, на які розбивається область D, можуть бути трикутниками

$$T_{i,j}^{(1)} = (x,y) \mid x \geqslant x_i,\ y \geqslant y_i,\ y \leqslant \eta_{j+1}(x),\ \frac{d\eta_{j+1}(x)}{dx} < 0,\ x_i < x < x_{i+1},$$
$$T_{i,j}^{(2)} = (x,y) \mid x \geqslant x_i,\ y \leqslant y_i,\ y \geqslant \eta_{j-1}(x),\ \frac{d\eta_{j-1}(x)}{dx} > 0,\ x_i < x < x_{i+1},$$
$$T_{i,j}^{(3)} = (x,y) \mid x \leqslant x_i,\ y \geqslant y_i,\ y \leqslant \eta_{j+1}(x),\ \frac{d\eta_{j+1}(x)}{dx} > 0,\ x_{i-1} < x < x_i,$$
$$T_{i,j}^{(4)} = (x,y) \mid x \leqslant x_i,\ y \leqslant y_i,\ y \geqslant \eta_{j-1}(x),\ \frac{d\eta_{j-1}(x)}{dx} > 0,\ x_{i-1} < x < x_i,$$

в яких одна зі сторін є криволінійною (взагалі кажучи) частиною границі Γ.

Викладемо загальний алгоритм побудови оператора $O_D f(x,y)$, який інтерлінує функцію $f(x,y)$ на лініях $x = x_k$, $k = \overline{1, M}$, та $y = y_\ell$, $\ell = \overline{1, N}$ та на границі Γ області D дорівнює нулю $O_D f(x,y) = 0$, $(x,y) \in \Gamma$. Вважаємо, що нам задані рівняння частин ліній, з яких складається лінія Γ. Сформулюємо алгоритм побудови оператора $O_D f(x,y)$ за кроками.

К р о к 1 . Задаємо розбиття $x = x_k$, $k = \overline{1, M}$, та $y = y_\ell$, $\ell = \overline{1, N}$, області D на підобласті. Для побудови $O_D f(x,y)$ використовуємо оператори сплайн-інтерлінації $O_D f(x,y) \in C^r(R^2)$, $r \geqslant 1$, з невідомими слідами функції $O_D f(x,y)$ та її немішаних похідних $\varphi_{k,s}(y)$, $\psi_{j,p}(x)$ на вказаних лініях інтерлінації $x = x_k$, $k = \overline{1, M}$, та $y = y_\ell$, $\ell = \overline{1, N}$.

К р о к 2 . Підставляємо у формулу $O_D f(x,y)$ нулі замість слідів функції $f(x,y)$ в точках границі $(x,y) \in \Gamma$. Вважаємо, що функції однієї змінної $\psi_{k,s}(y)$, $\varphi_{j,p}(x)$ є слідами (невідомими, взагалі кажучи) функції $f(x,y)$ та її частинних похідних на лініях $x = x_k$, $k = \overline{1, M}$, та $y = y_\ell$, $\ell = \overline{1,N}$, відповідно, і входять в оператори інтерлінації $OR_{i,j}f(x,y)$ для функції $f(x,y)$ на прямокутниках та в оператори інтерлінації $OT_{i,j}f(x,y)$ для функції $f(x,y)$ на трикутниках. В результаті отримаємо функцію $O_Df(x,y)$, яка точно дорівнюватиме нулю на границі Γ області D. Сліди невідомої функції $O_Df(x,y)$ та її похідних $\varphi_{k,s}(y)$, $\psi_{j,p}(x)$ у вузлових точках задовольняють умови

$$\exists f_{k,\ell,s,p} \in R\colon \quad \varphi_{k,s}^{(p)}(y_\ell) = \psi_{\ell,p}^{(s)}(x_k) = f_{k,\ell,s,p}, \quad k = \overline{1,M}, \quad \ell = \overline{1,N}; \quad s,p = \overline{0,n}, \tag{1}$$

$$\varphi_{k,s}(y) = \frac{\partial^s O_D f}{\partial x^s}(x_k, y), \quad k = \overline{1,M}, \quad \psi_{\ell,p}(x) = \frac{\partial^p O_D f}{\partial x^s}(x, y_\ell), \quad \ell = \overline{1,N}; \quad s,p = \overline{0,n}. \tag{2}$$

Крок 3. Покладемо

$$O_Df(x,y) = \begin{cases} OR_{i,j}f(x,y), & (x,y) \in \Pi_{i,j}, \\ OT_{i,j}f(x,y), & (x,y) \in T_{i,j}, \\ 0, & (x,y) \in \Gamma. \end{cases}$$

Крок 4. Невідомі функції $\varphi_{k,s}(y)$, $\psi_{j,p}(x)$ замінюємо інтерполяційними поліномами або сплайнами $s2_{k,s}(y)$, $s1_{\ell,p}(x)$, $k = \overline{1,M}$, $\ell = \overline{1,N}$, $0 \leqslant s$, $p \leqslant n$ відповідного степеня із забезпеченням виконання умов (1), умови

$$O_Df(x,y;\{f_{k,\ell,s,p}\}) = O_Df(x,y) \in C^r(D), \qquad r \geqslant 1 \tag{3}$$

та умови

$$O_Df(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in \Gamma \tag{4}$$

і вибираємо невідомі сталі $f_{k,\ell,s,p}$ з умови мінімуму функціонала

$$J(f) = \iint\limits_D (\omega_\Gamma(x,y) - O_D(x,y;f_{k,\ell}))^2 dxdy \to \min_{f_{k,\ell,s,p}},$$

де $\omega_\Gamma(x,y) = 0$ — нормальне рівняння кривої Γ, або рівняння Γ, побудоване за допомогою R-функцій.

Теорема. *Існують такі функції $\varphi_{k,s}(y)$, $\psi_{\ell,p}(x)$ і сталі $f_{k,\ell,s,p}$, які задовольняють умови* (1), (2) *на лініях інтерлінації та у вузлових точках розбиття, що оператор $O_Df(x,y)$, визначений вище та задовольняючий умови*

$$\left.\frac{\partial^s O_D(x,y)}{\partial x^s}\right|_{x=x_k} = \varphi_{k,s}(y), \qquad k = \overline{1,M}; \qquad s = \overline{0,n},$$

$$\left.\frac{\partial^p O_D(x,y)}{\partial y^p}\right|_{y=y_\ell} = \psi_{\ell,p}(x), \qquad \ell = \overline{1,N}; \qquad p = \overline{0,n},$$

буде задовольняти умови (3), (4), *незалежно від вибору сталих $f_{k,\ell,s,p}$ і функцій $\varphi_{k,s}(y)$, $\psi_{j,p}(x)$ у інших точках.*

Таким чином, запропонований метод побудови рівнянь кривих складеної форми у неявній формі $\Gamma\colon O_D(x,y) = 0$, який використовує інтерлінацію функцій. При цьому $O_D(x,y) > 0$, $(x,y) \in D$; $O_D(x,y) \in C^r(\overline{D})$, $r = 1, 2, \ldots$ і $O_D(x,y)$ є найкращим середньоквадратичним наближенням до функції $\omega(x, y) \in C(\overline{D})$, що входить у нормальне рівняння $\omega(x, y) = 0$ цієї кривої Γ, або у рівняння, побудоване за допомогою R-функцій.

Отже, побудовані $O_D f(x, y)$ можна використовувати для опису рівнянь кривої Γ у тих задачах, у яких істотною є належність $O_D f(x, y)$ до класу диференційовності $C^r(R^2)$, $r \geqslant 1$, при умові $\operatorname{grad} O_D f(x, y) \neq 0$, $(x, y) \in \Gamma$.

1. *Сергиенко И. В., Литвин О. Н.* Методы вычислений, ориентированные на современные компьютерные технологии // Кибернетика и систем. анализ. – 2007. – № 1. – С. 56–72.
2. *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.
3. *Литвин О. М.* Методи обчислень. Додаткові розділи. – Київ: Наук. думка, 2005. – 333 с.
4. *Литвин О. М.* Інтерлінація та інтерфлетація функцій і структурний метод В. Л. Рвачова // Мат. методи та фіз.-мат. поля. – 2007. – **50**, № 4. – С. 25–35.
5. *Литвин О. Н., Пасечник В. А.* Оптимизация математической модели поверхности трехмерного тела // Кибернетика и систем. анализ. – 2006. – № 1. – С. 103–112.
6. *Рвачев В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1986. – 555 с.
7. *Литвин О. М., Ткаченко О. В.* Математичне моделювання процесів інтерполяційними сплайнами на нерегулярній сітці вузлів // Доп. НАН України. – 2010. – № 1. – С. 34–29.

Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Київ
Українська інженерно-педагогічна академія, Харків

Надійшло до редакції 01.10.2009

Academician of the NAS of Ukraine **I. V. Sergienko, O. N. Lytvyn, A. V. Tkachenko, V. A. Pasechnik, O. A. Chernjak**

A mathematical model of a 2D curve in an implicit form on the basis of the interlineation of functions

A new method of construction of the equations of 2D curves in an implicit form $\Gamma\colon \omega(x, y) = 0$ *is offered. The method is based on operators of the interlineation functions* $O_D f(x, y) \in C^r(R^2)$, $r \geqslant 1$ *on a system of mutual-perpendicular straight lines. The unknown function* $f(x, y)$ *satisfies the equation* $\Gamma\colon f(x, y) = 0$. *Unknown traces of* $f(x, y)$ *are determined from the condition of the best mean square approximation* $O_D f(x, y)$ *to* $f(x, y)$ *constructed by means of R-functions.*