УДК 519.64

В.А.Федорчук, к.т.н, В.А.Тихоход, к.т.н., ІПМЕ ім. Г.Є.Пухова НАН України, м.Київ

АДАПТИВНІ АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

The algorithm of the decision of systems of the linear integrated equations by a method of collocations with use of an adaptive choice of a step of integration is considered.

Вступ. До числа важливих практичних задач моделювання відносяться задачі дослідження багатозв'язних динамічних систем, для опису яких використовуються непараметричні динамічні моделі (перехідні, імпульсні, передатні функції, частотні характеристики). Ефективним математичним апаратом для опису даних систем є інтегральні рівняння типу Вольтерри та їхні системи. Зокрема, опис багатозв'язних динамічних систем на основі інтегральних рівнянь знайшов застосування при аналізі, дослідженні й проектуванні систем керування, елементами яких є ланки з розподіленими параметрами. Однак сучасні серійні програмні пакети, які призначені для моделювання динамічних систем, не охоплюють своїми засобами даний клас об'єктів моделювання. Наявність програмних засобів, що забезпечують розв'язування задач комп'ютерного дослідження багатозв'язних динамічних систем на основі розв'язування систем інтегральних рівнянь, дозволяє значно розширити клас задач динаміки, що розв'язуються комп'ютерними засобами.

Актуальність проблеми. Створення програмних засобів комп'ютерного дослідження багатозв'язних динамічних систем на основі інтегральних моделей являє собою досить складну задачу у зв'язку з необхідністю систематизації видів систем інтегральних рівнянь із метою охоплення різних класів динамічних об'єктів, розробки ефективних алгоритмів, проблемно-орієнтованих на розв'язування систем інтегральних рівнянь, і способів організації відповідного комплексу програм. Таким чином, проблема створення програмних засобів дослідження багатозв'язних динамічних систем на основі інтегральних рівнянь є актуальною й вимагає проведення ряду наукових і практичних розробок.

Постановка задачі. Вимоги щодо збільшення точності при отриманні розв'язків систем інтегральних рівнянь привели до необхідності розробки адаптивних алгоритмів. Якщо розв'язок системи інтегральних рівнянь швидко змінюється на інтервалі інтегрування, тоді для їхнього розв'язування доцільно застосовувати адаптивні алгоритми, які оптимізують сітку апроксимації відповідно до поведінки розв'язків.

Оскільки алгоритми розв’язання систем інтегральних рівнянь містять в собі операції обчислення визначеного інтеграла, розглянемо підходи до побудови адаптивних алгоритмів обчислення визначеного інтеграла.

Автоматичний квадратурний алгоритм стосовно до обчислення визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ призначений для автоматичного підбору кроку інтегрування h на основі вхідної інформації – функції f, відрізка $[a, b]$ і необхідної точності ε [1]. Алгоритм дозволяє обчислити інтегральну суму Q і похибку E, які задовольняють нерівностям

$$\left|Q - I\right| < E < \varepsilon ,$$

де I – точне значення інтеграла.

Про функцію f не робиться ніяких припущень, крім одного: за допомогою зовнішньої підпрограми можна обчислювати значення $f(x)$ для будь-яких заданих x.

Застосування автоматичних квадратурних алгоритмів завжди вимагає більших витрат у порівнянні з тими, які необхідні при ручному підборі алгоритму на основі врахування специфіки конкретної задачі. Часто додаткові витрати становлять до декількох сотень, а іноді й тисяч відсотків. Однак автоматичні квадратурні алгоритми для багатьох задач виявляються ефективними, оскільки загальний комп'ютерний час, при теперішньому зростанні обчислювальних потужностей, часто виявляється незначним. Така ситуація, зокрема, має місце на початковій стадії обчислювального експерименту. Потім на більш пізніх стадіях експерименту виникає потреба оцінки вигоди від проведення додаткового аналізу задачі та ручної корекції алгоритму, що приведе до збільшення людських затрат, але, можливо, зменшення машинного часу.

Якщо змінити значення підінтегральної функції в кінцевому числі точок, то величина інтегралу не зміниться. Проте результат, отриманий за допомогою автоматичного квадратурного алгоритму, повністю визначається деяким кінцевим набором значень підінтегральної функції. Тому серед автоматичних квадратурних програм немає таких, які дійсно гарантували б, що наближене значення інтеграла або оцінка похибки є точними. Так може трапитися, якщо набір значень $f(x_i)$ не відображає специфічних рис підінтегральної функції.

Адаптивний автоматичний квадратурний алгоритм – це особливий вид автоматичного квадратурного алгоритму, який намагається пристосувати вибір вузлів квадратурної формули до кожної конкретної підінтегральної функції. Двома важливими компонентами такого алгоритму є локальний квадратурний модуль і загальна стратегія.

Локальний квадратурний модуль являє собою процедуру, на вхід якої подаються підінтегральна функція f та межі інтегрування α, β, а на виході – $Q_{[\alpha, \beta]}$ і $E_{[\alpha, \beta]}$, які, відповідно, будемо називати локальною квадратурою і локальною оцінкою похибки.

Така стратегія припускає, що на відрізках досить малої довжини підінтегральна функція має гарну поведінку і тому локальний квадратурний модуль забезпечує досить точну локальну квадратуру й малу локальну похибку. Якщо поводження функції *f*(*x*) у точці x_0 таке, що апроксимація функції на сусідніх відрізках сітки інтегрування виявиться не достатньо точною, то ця точка за стратегією адаптивного алгоритму буде входити в підвідрізки все меншої і меншої довжини. В кінцевому результаті малою стане і локальна квадратура, пропорційна довжині підвідрізка.

Можна виділити два способи підбору припустимого значення кроку при обчисленні інтегральної суми:

1. *За залишковим членом.* Використовуючи формулу відповідного залишкового члена $R(x)$, вибираємо h таким, щоб виконувалася нерівність $|R(x)|<\varepsilon/2$. Далі з отриманим кроком обчислюємо інтеграл за квадратурною формулою. Обчислення доцільно здійснювати з таким числом цифр, щоб помилка округлення не перевищувала ε.

2. *З послідовним подвоєнням числа кроків.* Обчислюючи інтеграл J за обраною квадратурною формулою двічі: спочатку з деяким кроком h, потім із кроком $h/2$, тобто подвоюють кількість n. Якщо $\theta\,|J_h-J_{h/2}|<\varepsilon$, то приймають $J_h \approx J_{h/2}$. Коли виявиться, що ця умова не виконується, то обчислення повторюють із кроком $h/4$.

Для систем інтегральних рівнянь, у яких є велика кількість інтегральних операторів, комп'ютерний час на розв’язання задачі різко зростає, що висуває особливі вимоги щодо організації обчислювального процесу. При побудові алгоритмів розв’язування систем інтегральних рівнянь доцільно використовувати другий підхід. При цьому ділення кроку необхідно здійснювати тільки на останньому відрізку $[x_i, x_{i+1}]$, оскільки щоразу на перерахування всієї системи з початку відрізка на інтегрування зі зменшеним удвічі кроком витратиться багато часу, і загальний час на розв’язування системи виявляється значним. Також вибір другого підходу обумовлюється ще і складністю, а часто й неможливістю знаходження залишкового члена квадратурної формули.

Багато програм, що використовують адаптивні алгоритми працюють із відносною точністю

$$\left|Q-I\right| < E\cdot\left|I\right| < \varepsilon\cdot\left|I\right|.$$

У практичному алгоритмі необхідно організувати перевірки для запобігання зайвого здрібнювання підвідрізків: за допомогою обмеження числа половинних ділень, за допомогою встановлення мінімально припустимого значення довжини підвідрізка, або за допомогою іншої стратегії. Також необхідно враховувати вплив помилок округлення при обчисленні значень підінтегральної функції, що може виявитися істотним навіть і на більших підвідрізках. Для цієї мети використовуються різноманітні способи, які міняються від програми до програми.

Адаптивний алгоритм розв'язування систем інтегральних рівнянь Вольтерри ІІ роду. Візьмемо за основу чисельного розв'язування зазначених систем метод коллокацій на основі кусково-гладких поліномів. Метод заснований на заміні функцій кусково-гладкими поліномами $\widetilde{y}_i(x) = P_i(x), i = \overline{1,n}$, складеними на ділянках проміжку з поліномів виду

$$P_{i,k+1}(x) = P_{i,k}(x_{k,0}) + \sum_{j=1}^{l} \frac{C_{i,k,j}}{j!}(x - x_{k,0})^j, \; k = 0,1,\ldots,M-1,$$

де $x_{k,\nu} = (kl + \nu)h + a$, $\nu = \overline{0,l}$, $k = \overline{0,M-1}$ — фіксовані вузли проміжку інтегрування [a, b] (індекс k відповідає (k+1)-й ділянці відрізка $x_k \le x \le x_{k+1}$, а індекс j — підвідрізку $x_{k,j} \le x \le x_{k,j+1}$ усередині ділянки; $l \geq 1$ — кількість підвідрізків; при цьому $x_{k,l} = x_{k+1,0}$; $x_{0,0} = a$).

Вважаючи, що $P_i(x) \in C[a,b]$, одержимо:

$$P_{i,k}(x_{k,0}) = P_{i,k-1}(x_{k-1,l}).$$

Значення $P_{i,0}(x_{0,0}) = y_{i,0}$ ($y_{i,0} = y_i(a)$), i=1, 2, …, n вважають відомими.

При розв'язуванні систем лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри ІІ роду методом коллокацій використовують рівняння:

$$P_{i,k}(x_{x,v}) - \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{k,0}}^{x_{k,v}} K_{ij}[x_{k,v}, s] P_{j,k}(s) = f_i(x_{k,v}) + \psi_{i,k}(x_{x,v}),$$

де

$$\psi_{i,k}(x_{k,v}) = \sum_{j=1}^{n} \int_{a}^{x_{1,0}} K_{ij}(x_{x,v}, s) P_{j,0}(s) ds + \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{1,0}}^{x_{2,0}} K_{ij}(x_{x,v}, s) P_{j,1}(s) ds +$$

$$+ \ldots + \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{k-1,0}}^{x_{k,0}} K_{ij}(x_{x,v}, s) P_{j,k-1}(s) ds, k = \overline{1, M-1}, v = \overline{1,l},$$

які дозволяють знаходити значення $C_{i,k,1}, C_{i,k,2}, \ldots, C_{i,k,m},\; k = \overline{1, M-1}$.

Адаптивний алгоритм розв'язування систем лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри ІІ роду з ядрами загального виду на основі методу коллокацій представлений на рис. 1.

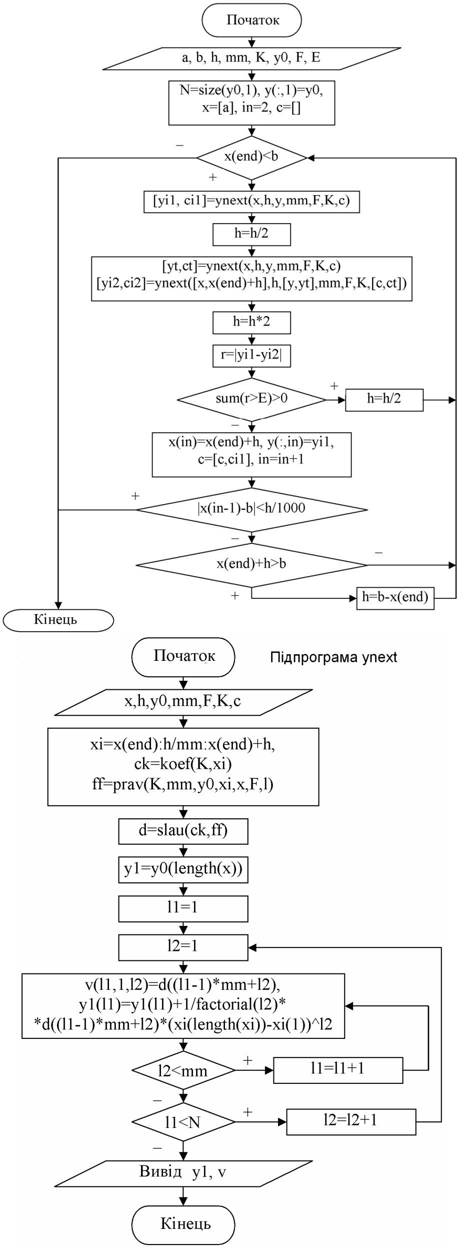

Рис. 1. Алгоритм розв’язування систем лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду з ядрами загального виду методом коллокацій з адаптивним вибором кроку інтегрування

Модельний приклад. Розглянемо систему лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду виду:

$$\begin{cases} y_1(x) - \int\limits_0^x (x-s) y_1(s) ds - \int\limits_0^x (x+s) y_2(s) ds = 2(1-x)\sin x - \cos x - x + 1; \\ y_2(x) - \int\limits_0^x (x-2s) y_1(s) ds - \int\limits_0^x (2x-s) y_2(s) ds = (2-x)\sin x + (2-x)\cos x - x - 1; \end{cases} \qquad (1)$$

з точним розв'язком

$y_1^T(x) = \sin x, \quad y_2^T(x) = \cos x.$ Розв'яжемо систему (1) методом коллокацій з адаптивним вибором кроку на інтервалі [0, 4] з початковим кроком h=0.2. У процесі розв'язування були отримані наступні значення мінімального й максимального кроку: h_{min}=0.025, h_{max}=0.1; середнє значення кроку склало h_{cp}= 0.0571. Точні та наближені розв'язки системи для функцій y_1 та y_2 представлені, відповідно, на рис. 2, 3; абсолютні похибки показані на рис. 4, 5.

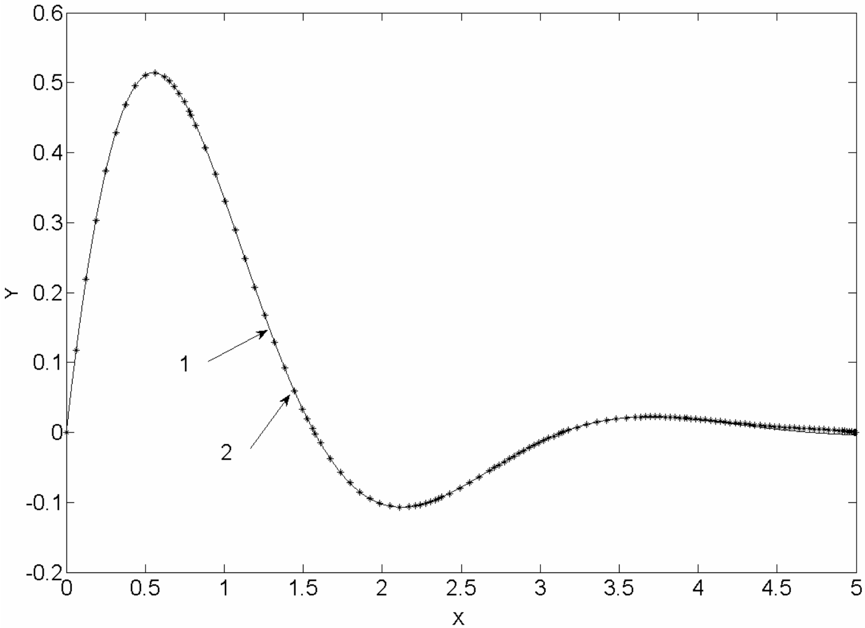

Рис. 2. Розв'язок системи інтегральних рівнянь (1) (для функції y_1):
1 — точний розв'язок, 2 — наближений розв'язок

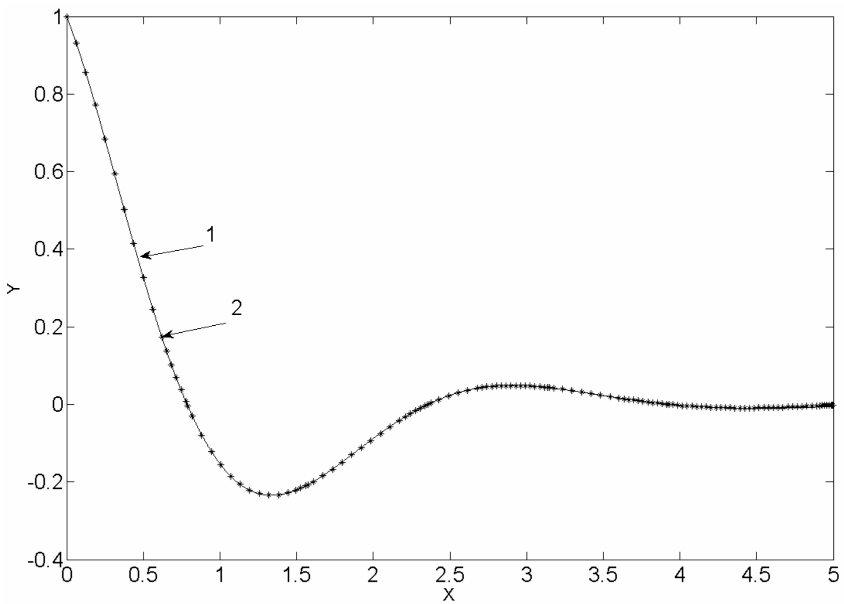

Рис. 3. Розв'язок системи інтегральних рівнянь (1) (для функції y_2):
1 – точний розв'язок, 2 – наближений розв'язок

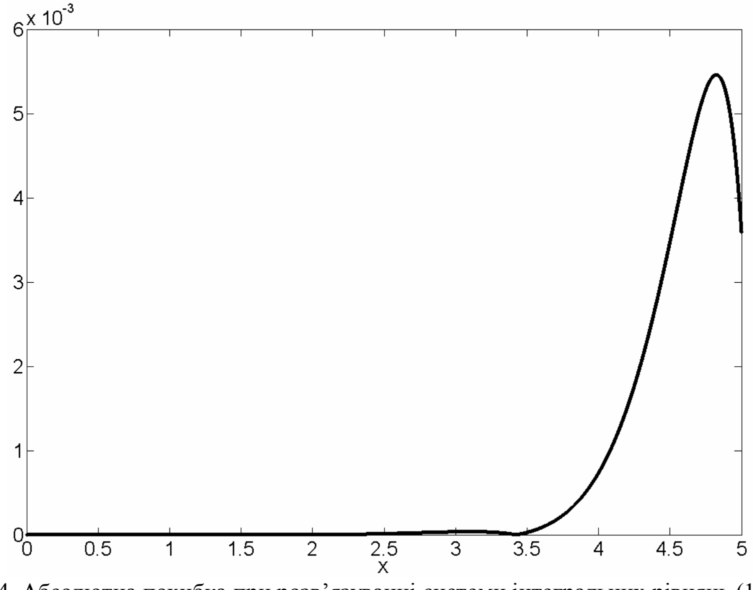

Рис. 4. Абсолютна похибка при розв'язуванні системи інтегральних рівнянь (1) (для функції y_1)

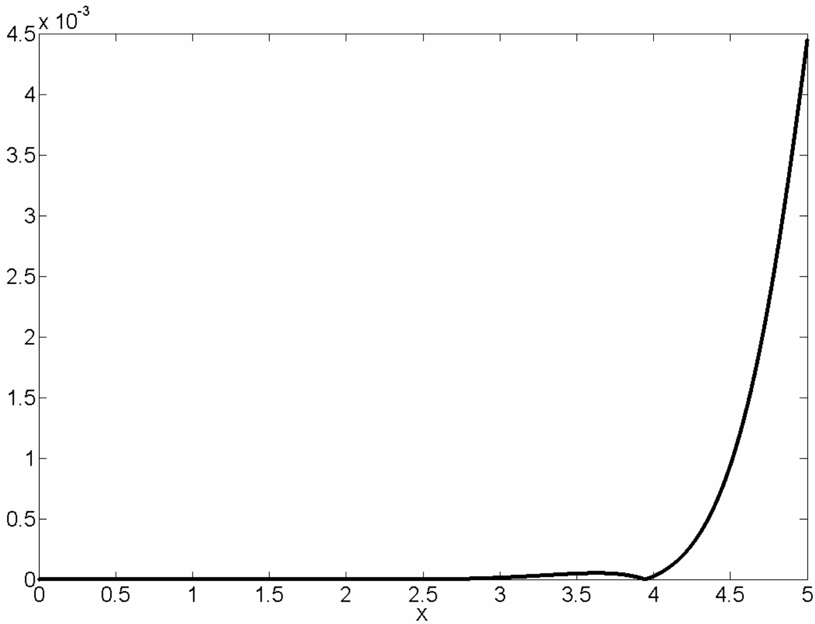

Рис. 5. Абсолютна похибка при розв'язуванні системи інтегральних рівнянь (1) (для функції y_2)

Висновки. Таким чином запропонований підхід використання адаптивних алгоритмів при розв'язуванні систем інтегральних рівнянь Вольтерри II роду дозволяє підвищувати точність отриманих розв'язків на основі автоматичного підбору сітки апроксимації.

1. *Каханер Д.* Численные методы и математическое обеспечение / Д. Каханер, К. Моулер, С. Нэш; пер с англ. под ред. Х.Д. Икрамова. – М.: Мир, 1998. – 575 с.