УДК 621

О.М. Корнєєв

ПРО ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО МЕТОДУ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ СПАДКОВОЇ В'ЯЗКОПРУЖНОСТІ

Вступ. Основою машинного розв'язування інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь типу Вольтерра є відповідні чисельні та аналітичні методи. У зв'язку з цим постає питання: яким методом бажано користуватись, якщо має місце вибір математичної моделі. У якості критеріїв оптимальності природно взяти точність, універсальність, економічність з точки зору витрати машинного часу та простоти реалізації алгоритмів розв'язування на комп'ютері. Стаття присвячена викладенню ефективного підходу до чисельного розв'язування систем лінійних та нелінійних слабо сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь успадкованої теорії в'язкопружності. Цей підхід засновано на спільному раціональному використанні аналітичних перетворень, які дозволяють звести вихідні системи до системи інтегральних рівнянь з регулярними ядрами та стійкого чисельного алгоритму розв'язування з отриманням розв'язку задачі з необхідною точністю.

Спосіб інтегрування для зведення інтегро-диференціального рівняння до інтегрального. Якщо виходити з нелінійних залежностей між напруженнями та деформаціями [1, 2], тоді методом викладеним у [3], динамічні задачі в'язкопружності можуть бути приведені до системи інтегро-диференціальних рівнянь вигляду [4].

$$\ddot{U}_i(t)+\omega_i^2 U_i(t)=\mathrm{X}_i\left\{t,U_1(t),\dots,U_n(t),\int_0^t \phi_i\big(t,\tau,U_1(\tau),\dots,U_n(\tau)\big)d\tau\right\}, \qquad (1)$$

$$U_i(0)=U_{0i},\ \dot{U}_i(0)=\bar{U}_{oi}, \qquad (2)$$

де $\omega_i - const,\ i=\overline{1,n};\ U_i(t)$ - невідомі функції від t ; $\mathrm{X}_i,\ \phi_i$ - задані функції.

Безпосередньо шляхом подвійного інтегрування системи (1) по t з врахуванням початкових умов (2) отримаємо

$$\begin{gathered}U_i(t)=U_{0i}+\bar{U}_{0i}t-\omega_i^2\int_0^t (t-\tau)U_i(\tau)d\tau+\\ +\int_0^t (t-\tau)\mathrm{X}_i\left\{\tau,U_1(\tau),\dots,U_n(\tau),\int_0^\tau \phi_i\big(\tau,s,U_1(s),\dots,U_n(s)\big)d\tau\right\}.\end{gathered} \qquad (3)$$

Для чисельного розв'язування системи (3) використовуємо метод прямої заміни інтегралів, які входять у систему, кінцевою сумою за якою-небудь квадратурною формулою. Тоді наближені розв'язки системи (3) у вузлах

$t_m = (m-1)\Delta t, m = 1, 2, 3\ldots$ (Δt - крок інтегрування) послідовно визначаються із системи

$$U_{mi} = U_{0i} + \bar{U}_{0i} t_m - \omega_i^2 \sum_{j=1}^{m-1} \mathrm{A}_j \left(t_m - t_j\right) U_{ji} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{m-1} \mathrm{B}_j^{(i)} \left(t_m - t_j\right) \mathrm{X}_i \left\{ t_i, U_{j1}, \ldots, U_{jn}, \sum_{k=1}^{j} C_k^{(i)} \phi_i \left(t_j, t_k, U_{k1}, \ldots U_{kn}\right) \right\}. \quad (4)$$

де $\mathrm{A}_j, \mathrm{B}_j^{(i)}, C_k^{(i)}$ не залежать від вибору функцій X_i та $\phi_i, i = \overline{1,n}$. В залежності від використаних квадратурних формул ці коефіцієнти будуть мати різні значення.

Таким чином, завдяки подвійному інтегруванню вихідної системи по t та використанню квадратурної формули отримана проста рекурентна залежність (4) для знаходження чисельних значень функції $U_i(t)$.

Для системи інтегро-диференціальних рівнянь (1) нижче запропоновано ще один видозмінений спосіб чисельного розв'язування, який також заснований на використанні квадратурних формул.

Видозмінений метод зведення інтегро-диференціального рівняння до інтегрального рівняння. Використовуючи метод варіації, довільну постійну систему (1) можна привести до вигляду

$$U_i(t) = U_{0i} \cos \omega_i t + \frac{\overline{U_{0i}}}{\omega_i} \sin \omega_i t +$$
$$+ \frac{1}{\omega_i} \int_0^t X_i \left\{ \tau, U_1(\tau), \ldots, U_n(\tau), \right. \quad (5)$$
$$\left. \int_0^\tau \phi_i \left(\tau, s, U_1(s), \ldots U_n(s)\right) ds \right\} \sin \omega_i (t - \tau) d\tau.$$

Замінимо у цій системі інтеграли на кінцеву суму за відомою квадратурною формулою. У цьому випадку наближене значення $U_{mi} = U_i(t_m), m = 2, 3, \ldots$, як розв'язок системи (5) у точках $t_m = (m-1)\Delta t$, поступово шукається за формулою

$$U_{mi} = U_{0i} \cos \omega_i t_m + \frac{\bar{U}_{0i}}{\omega_i} \sin \omega_i t_m + \frac{1}{\omega_i} \sum_{j=1}^{m-1} \mathrm{A}_j \mathrm{X}_i$$
$$\left\{ t_j, U_{j1}, \ldots U_{jn}, \sum_{k=1}^{j} \mathrm{B}_k^{(i)} \phi_i \left(t_j, t_k, U_{k1}, \ldots U_{kn}\right) \sin \omega_i \left(t_m - \tau_j\right) \right\}, \quad (6)$$

$i = \overline{1, n}; \quad m = 2, 3, \ldots$

Формула (6) також має рекурентний характер та ефективно реалізується на комп'ютері.

Приклад. Розглянемо вертикальні коливання трьох мас (рис. 1) з масами m_1, m_2, m_3, що з'єднані нелінійними в'язкопружними пружинами.

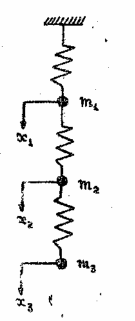

Рис.1. Система трьох мас

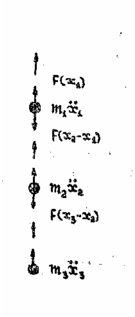

Рис.2. Силова схема

Позначимо зміщення мас m_1, m_2, m_3, від положення статичної рівноваги через x_1, x_2, x_3, а силу дії пружини на масу через $F(z)$. Використовуючи принцип Даламбера та розглядаючи фіктивний (уявний) стан рівноваги (рис. 2) мас, до яких прикладені сили інерції та сила відновлення, отримаємо [5, 6]

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + F(x_1) - F(x_2 - x_1) = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + F(x_2 - x_1) - F(x_3 - x_2) = 0 \\ m_3\ddot{x}_3 + F(x_3 - x_2) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Для функції $F(z)$ візьмемо вираз [7], [8]

$$F(z) = k\left\{z\left(1+\beta z^2\right) - \int_0^t R(t,\tau)z(\tau)\left[1+\beta z^2(\tau)d\tau\right]\right\}, \tag{8}$$

де k - жорсткість пружини;

β - коефіцієнт не лінійності, який залежить від фізичних властивостей матеріалу пружини;

$R(t,\tau)$ - ядро релаксації.

Якщо k_1, k_2, k_3 - відповідно жорсткість першої, другої та третьої пружин, то з урахуванням (8) система (7) буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = \omega_{21}^2(x_2 - x_1)\left[1+\beta_2(x_2-x_1)^2\right] - \\ &-\omega_1^2\beta_1 x_1^3 + \omega_1^2\int_0^t R_1(t,\tau)x_1(\tau)\left[1+\beta_1 x_1^2(\tau)\right]d\tau - \\ &-\omega_{21}^2\int_0^t R_2(t,\tau)\left[\overset{\circ}{x}_2(\tau) - x_1(\tau)\right]\left\{1+\beta_2\left[x_2(\tau)-x_1(\tau)\right]^2\right\}d\tau, \end{aligned} \tag{9}$$

$$
\begin{gathered}
\ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = \omega_2^2 x_1 \left[1 + \beta_2 \left(x_2 - x_1 \right)^2 \right] - \\
\omega_{32}^2 \left(x_3 - x_2 \right) \left[1 + \beta_3 \left(x_3 - x_2 \right)^2 \right] - \omega_2^2 \beta_2 x_2 \left(x_2 - x_1 \right)^2 + \\
+ \omega_2^2 \int_0^t R_2 \left(t, \tau \right) \left[x_2 \left(\tau \right) - x_1 \left(\tau \right) \right] \left\{ 1 + \beta_2 \left[x_2 \left(\tau \right) - x_1 \left(\tau \right) \right]^2 \right\} d\tau - \\
- \omega_{31}^2 \int_0^t R_3 \left(t, \tau \right) \left[x_3 \left(\tau \right) - x_2 \left(\tau \right) \right] \left\{ 1 + \beta_3 \left[x_3 \left(\tau \right) - x_2 \left(\tau \right) \right]^2 \right\} d\tau, \\
\ddot{x}_3 + \omega_3^2 x_3 = \omega_3^2 x_2 \left[1 + \beta_3 \left(x_3 - x_2 \right)^2 \right] - \omega_3^2 \beta_3 x_3 \left(x_3 - x_2 \right)^2 + \\
+ \omega_3^2 \int_0^t R_3 \left(t, \tau \right) \left[x_3 \left(\tau \right) - x_2 \left(\tau \right) \right] \left\{ 1 + \beta_3 \left[x_3 \left(\tau \right) - x_2 \left(\tau \right) \right]^2 \right\} d\tau,
\end{gathered}
\tag{10}
$$

де $\dfrac{k_i}{m_i} = \omega_i^2, \quad i = 1, 2, 3; \quad \dfrac{k_2}{m_1} = \omega_{21}^2, \quad \dfrac{k_3}{m_2} = \omega_{32}^2$.

Нехай надані початкові значення зміщень та швидкостей, тобто

$$x_i \left(0 \right) = x_{0i}, \quad \dot{x}_i \left(0 \right) = V_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Систему (9) запишемо у формі (5). Вважаючи, що у отриманій системі $t = t_m = mh, m = 1, 2, \ldots,$ для обчислення наближених значень функцій $x_i \left(t \right), \left(i = 1, 2, 3 \right)$ у точках $t_m, m = 1, 2, \ldots$, аналогічно (6) отримаємо

$$x_{m1} = x_{01}\cos\omega_1 t_m + \frac{V_1}{\omega_1}\sin\omega_1 t_m +$$
$$+\frac{1}{\omega_1}\sum_{j=0}^{m-1} \mathrm{A}_j^{(1)}\Big\{\omega_{21}^2\left(x_{j2}-x_{j1}\right)\left[1+\beta_2\left(x_{j2}-x_{j1}\right)^2\right]-$$
$$-\omega_1^2\beta_1 x_{j1}^3 + \omega_1^2\sum_{k=0}^{j} \mathrm{B}_k^{(1)} R_1\left(t_j,t_k\right)x_{k1}\left(1+\beta_1 x_{k1}^2\right)-$$
$$-\omega_{21}^2\sum_{k=0}^{j} C_k^{(1)} R_2\left(t_j,t_k\right)\left(x_{k2}-x_{k1}\right)\left[1+\beta_2\left(x_{k2}-x_{k1}\right)^2\right]\Big\}\times$$
$$\times\sin\omega_1\left(t_m-t_j\right),$$
$$x_{m2} = x_{02}\cos\omega_2 t_m + \frac{V_2}{\omega_2}\sin\omega_2 t_m +$$
$$+\frac{1}{\omega_2}\sum_{j=0}^{m-1} \mathrm{A}_j^{(2)}\Big\{\omega_2^2 x_{j1}\left[1+\beta_2\left(x_{j2}-x_{j1}\right)^2\right]+$$
$$+\omega_{32}^2\left(x_{j3}-x_{j2}\right)\left[1+\beta_3\left(x_{j3}-x_{j2}\right)^2\right]-\omega_2^2\beta_2 x_{j2}\left(x_{j2}-x_{j1}\right)^2$$
$$+\omega_2^2\sum_{k=0}^{j} \mathrm{B}_k^{(2)} R_2\left(t_j,t_k\right)\left(x_{k2}-x_{k1}\right)\left[1+\beta_2\left(x_{k2}-x_{k1}\right)^2\right]-$$
$$-\omega_{32}^2\sum_{k=0}^{j} C_k^{(2)} R_3\left(t_j,t_k\right)\left(x_{k3}-x_{k2}\right)\left[1+\beta_3\left(x_{k3}-x_{k2}\right)^2\right]\Big\}\times$$
$$\times\sin\omega_2\left(t_m-t_j\right),$$
$$x_{m3} = x_{03}\cos\omega_3 t_m + \frac{V_3}{\omega_3}\sin\omega_3 t_m +$$
$$+\frac{1}{\omega_3}\sum_{j=0}^{m-1} \mathrm{A}_j^{(3)}\Big\{\omega_3^2 x_{j2}\left[1+\beta_3\left(x_{j3}-x_{j2}\right)^2\right]-$$
$$-\omega_3^2\beta_3 x_{j3}\left(x_{j3}-x_{j2}\right)^2- \tag{11}$$
$$-\omega_3^2\sum_{k=0}^{j} \mathrm{B}_k^{(3)} R_3\left(t_j,t_k\right)\left(x_{k3}-x_{k2}\right)\left[1+\beta_3\left(x_{k3}-x_{k2}\right)^2\right]\Big\}\times$$
$$\times\sin\omega_1\left(t_m-t_j\right),$$
$$m = 1,\,2,\,3.$$

Обчислення значень x_{mi}, $m = 1, 2, \ldots$ $\left(i = 1, 2, 3\right)$ по формулі (11) проводилось на комп’ютері. При цьому використані наступні вихідні дані:

$$R_i(t,\tau) = \varepsilon_i e^{-\gamma_i(t-\tau)}(t-\tau)^{\alpha_i - 1}; \quad \varepsilon_i = 0,01; \quad \gamma_i = 0,05; \quad \alpha_i = 0,25;$$

$$k = k_i; \quad m = m_i; \quad \frac{k}{m} = 1; \quad x_{01} = x_{0r} = 0; \quad x_{0r} = 1; \quad V_i = 0; \quad i = 1,2,3.$$

З метою перевірки точності методики, яка пропонується, задача що розглядається у пружній постановці була розв'язана відомим методом М.Г. Бондаря [4, 5], та методом Рунге-Кутта [9]. У якості точного розв'язку задачі Коші прийнято розв'язок, отриманий методом Рунге-Кутта. Результати обчислювальних експериментів свідчать, що точність запропонованого методу в більшості випадків значно перевищує точність методу М.Г. Бондаря [4, 5].

Висновок. У статті розглянуто метод, який дозволяє звести розв'язування інтегро-диференціального рівняння до розв'язування інтегрального рівняння за допомогою степеневих рядів. На прикладі комп'ютерного розв'язування задачі про коливання трьох мас доведена працездатність та висока точність відповідних алгоритмів.

1. *Бадалов Ф.Б.* Метод степенных рядов в нелинейной наследственной теории вязкоупругости.–Ташкент: Фан, 1980.– 221 с.

2. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы алгоритмы программы. – Киев: Наукова думка, 1986.– 544 с.

3. *Корнєєв О.М.* Про деякі загальні підходи до моделювання процесів спадкової в'язкопружності // Вісник Черкаського університету, 2008.

4. *Бадалов Ф.Б., Эшматов Х., Юсупов М.* О некоторых методах решения систем интегро-дифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости // ПММ, 1986.

5. *Бондарь Н.Г.* Нелинейные автономные системы строительной механики.– М.: Стройиздат, 1972.–128 с.

6. *Бондарь Н.Г.* Колебания нелинейных консервативных систем с несколькими степенями свободы // Прикладная механика.– 1967.– т. 3, вып. 5.– с. 1–8.

7. *Ильюшин А.А. Огибалов П.М.* Квазилинейная теорія вязкоупругости и метод малого параметра//Механика полимеров, 1962, №2, с.210-221.

8. *Куршин Л.М.* Устойчивость при ползучести // Изв. АН СССР, МТТ, 1978, №3, с. 125–160

9. *Турчак Л.И.* Основы численных методов.– М.: Наука, 1987.– 320 с.