УДК 539.12

А. Ю. Нурмагамбетов

Структура суперконформной алгебры теории струн в тензорном суперпространстве

(Представлено академиком НАН Украины Н. Ф. Шульгой)

Аналізується структура суперконформної алгебри теорії струн в $N = 1$, $D = 4$ тензорному суперпросторі з координатами тензорного типу. Показано, що включення додаткових координат істотно знижує критичну розмірність суперструни до реалістичної розмірності $D = 4$. Іншим наслідком введення додаткових тензорних координат є введення диференціалів нового типу, що дає можливість побудувати локальну теорію екзотичного неабелевого антисиметричного тензорного поля.

1. Вопрос об интерпретации дополнительных измерений, возникающих при построении квантово-согласованной теории струн и суперструн, является одним из ключевых моментов развития теории, претендующей на роль единого описания всех фундаментальных взаимодействий. Напомним, что количество дополнительных (к наблюдаемым четырем пространственно-временным координатам) пространственно-подобных измерений — 22 для бозонной струны, и 6 в случае суперструн — определяется структурой квантовой (супер)конформной алгебры, так называемой (супер)алгебры Вирасоро. Строго говоря, алгебра Вирасоро определяет центральный элемент алгебры, или аномальный член, а требование отсутствия аномалий в квантовой теории струны, эквивалентное обращению аномального члена в ноль, однозначно фиксирует критическую размерность. Наличие дополнительных измерений, воспринятое весьма скептически на ранних этапах развития теории, эффективно используется в построении Единой квантовой теории гравитации и полей Стандартной Модели, однако данная программа все еще далека от своего завершения.

Одним из позитивных факторов, стимулирующих развитие исследований в объединенных моделях физики элементарных частиц, является существенный прогресс в экспериментальной астрофизике, который ставит все новые вопросы по интерпретации экспериментальных данных астрофизических наблюдений в рамках традиционной теории суперструн. Трудности в струнной Космологии, а также нерешенные проблемы компактификации дополнительных измерений прямо или косвенно свидетельствуют о необходимости пересмотра некоторых основных положений теории струн, среди которых вопрос о существовании дополнительных измерений становится как никогда актуальным. Следует отметить, что поиск следствий существования дополнительных измерений только включен в программу экспериментов на большом адронном коллайдере, и на данный момент не существует никаких экспериментально обоснованных фактов, говорящих в пользу их реального существования. Поэтому в контексте затронутых выше проблем новую остроту приобретает вопрос о возможности построения последовательной модели суперструны, критическая размерность которой совпадала бы с наблюдаемой размерностью пространства-времени. Данная работа посвящена анализу одной из таких моделей и некоторым следствиям ее рассмотрения.

2. Дополнительные пространственно-подобные измерения возникают в процессе квантования теории свободной бозонной струны, результатом которого является операторная бесконечномерная алгебра Вирасоро [1]

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + A^{\text{total}}(m)\delta_{m+n}. \tag{1}$$

Суммарный центральный элемент алгебры $A^{\text{total}}(m)$

$$A^{\text{total}}(m) = \frac{1}{12}D(m^3-m) + \frac{1}{6}(m-13m^3) + 2a_{\text{open}}m \tag{2}$$

содержит вклад бозонных координат, параметризующих вложение двумерного мирового листа струны в пространство-время D измерений, вклад фермионной системы дух — антидух, возникающей после закрепления конформной калибровки на метрический тензор мирового листа, а также вклад так называемого струнного интерсепта. Несмотря на то что приведенная алгебра следует из процедуры квантования открытой бозонной струны, ее общая структура остается неизменной и для замкнутых струн. Требование отсутствия конформной аномалии в квантовой теории струны, т. е. $A^{\text{total}}(m) = 0$, однозначно фиксирует размерность пространства-времени, в которой теория является квантово-согласованной. Для алгебры (1) $D = 26$.

Введение в теорию фермионов — суперпартнеров бозонных координат — дополняет структуру алгебры (1) до соответствующей градуированной супералгебры, что приводит к возникновению пары центральных элементов, имеющих в случае (открытой) суперструны Невье–Шварца–Рамона следующий вид:

$$\begin{cases} A^{\text{total}}(m) = \dfrac{1}{12}\left(D+\dfrac{D}{2}\right)m^3 + \dfrac{1}{6}(m-13m^3) + \dfrac{1}{12}(11m^3-2m) + 2a^R_{\text{open}}m, \\ B^{\text{total}}(m) = \dfrac{D}{2}m^2 - 5m^2 + 2a^R_{\text{open}}. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь требование отсутствия суперконформной аномалии в квантовой теории суперструны фиксирует критическую размерность $D = 10$. Таким образом, в стандартной теории (супер)струн появление дополнительных измерений диктуется требованиями квантовой согласованности теории.

Прежде чем приступить к обсуждению возможных путей понижения критической размерности, проанализируем структуру центрального элемента $A^{\text{total}}(m)$ из (3). Очевидно, что он содержит вклад бозонных координат, конформных (анти)духов и струнного интерсепта из (2) (после “сдвига” интерсепта a^R_{open} на $D/16$), и, кроме того, соответствующие вклады фермионных суперпартнеров бозонных координат вместе с вкладом суперконформных духов. Общее правило, по которому может быть рассчитана критическая размерность произвольной модели суперструны, формулируется следующим образом [1]. D бозонов дают вклад D в полную аномалию, вклад их суперпартнеров в два раза меньше, т. е. $D/2$. Вклады (супер)конформных (анти)духов определяются следующим общим выражением:

$$|1-3(2J-1)^2|,$$

в котором J является конформной размерностью (анти)духов, $J = 2$ для конформного духа и $J = 3/2$ для суперконформного духа, а выбор знака определяется квантовой статистикой духовых переменных: "$+$" для фермионных духов, "$-$" для бозонных. С точки зрения теории поля на мировом листе суперструны, вклад конформных и суперконформных духов остается неизменным и не зависит от размерности пространства-времени D. Он равен -26 для конформного духа, возникающего при фиксации конформной калибровки метрики мирового листа струны, и $+11$ для суперконформного духа при фиксировании суперконформной калибровки листового поля "Рариты–Швингера". Разница в -15 должна быть скомпенсирована за счет вклада в центральный элемент супералгебры дополнительных (бозонных и/или фермионных) полей, одной из возможных реализаций которых являются бозонные координаты X^m, параметризующие D-мерное пространство-время и определяющие вложение в него мирового листа струны, а также их фермионные суперпартнеры ψ^m.

3. Теперь зафиксируем желаемую критическую размерность струны $D = 4$. Положительность энергии мод колебаний струны гарантировано в суперсимметричной теории, поэтому в дальнейшем остановимся на модели суперструны. Вклад бозонных координат и их суперпартнеров равен $+6$, следовательно, необходимо добавить дополнительные степени свободы, вклад которых скомпенсировал бы оставшиеся $-15 + 6 = -9$. Этими степенями свободы могут быть либо "внутренние" координаты векторного типа y^i и их суперпартнеры ξ^i $(i = 1, \ldots, 6)$, однако такой выбор может быть в конечном итоге сведен к $4 + 6 = 10$ стандартному набору координат, и, следовательно, не дает ничего нового по сравнению со стандартной теорией суперструны Невье–Шварца–Рамона. Другим выбором дополнительных переменных является набор координат тензорного типа, $Z^{mn} = -Z^{nm}$, число которых в $D = 4$ равно 6. Если мы постулируем скалярный характер преобразований новых координат относительно диффеоморфизмов мирового листа, то их фермионные "суперпартнеры" Ψ^{mn} дополняют необходимые для полной компенсации аномалии степени свободы. Поэтому формулировка суперструны Невье-Шварца-Рамона в расширенном координатами тензорного типа пространстве-времени действительно обладает критической размерностью $D = 4$.

4. Возникает вполне естественный вопрос о причине возникновения дополнительных координат тензорного типа. Ответ на него содержится в структуре максимальной $N = 1$, $D = 4$ алгебры суперсимметрии, которая включает, в частности, следующий антикоммутатор суперзарядов [2]:

$$\{Q, Q\} = \gamma^m P_m + \gamma^{mn} \mathcal{P}_{mn}. \tag{4}$$

Необходимо отметить, что входящие в правую часть этого соотношения "импульсы" имеют принципиально различную природу. Динамическим импульсом, связанным со структурной группой пространства-времени (группой Пуанкаре), является P_m, в то время как топологическим зарядом, связанным с присутствием в $N = 1$, $D = 4$ суперпространстве протяженного объекта — супермембраны, является "обобщенный импульс" $\mathcal{P}_{mn}$. Канонически сопряженными динамическому импульсу переменными являются стандартные координаты векторного типа X^m, тогда как топологические заряды вообще не имеют канонически сопряженных переменных. Но принципиально иной трактовкой структуры максимально расширенных алгебр суперсимметрии с топологическими центральными зарядами является идея Картрайта [3], высказанная в контексте супералгебры М-теории (М-алгебры), о демократии между динамическими и топологическими "импульсами". Следуя этой идее, каждому топологическому "импульсу" необходимо сопоставить канонически сопряженную ему координату и рассматривать, вместо обычного суперпространства, обобщенное суперпространство, расширенное координатами тензорного типа. Поэтому возникновение дополнительных координат Z^{mn} как сопряженных "обобщенным импульсам" $\mathcal{P}_{mn}$ переменных вполне естественно в рамках расширенного $N = 1$, $D = 4$ тензорного суперпространства.

Следует подчеркнуть, что вышеизложенная интерпретация дополнительных координат тензорного типа апеллирует к пространственно-временной суперсимметрии, тогда как до этого все внимание было сосредоточено на моделях суперструн, обладающих суперсимметрией мирового листа. Такой переход не является случайным, так как с точки зрения теории на мировом листе струны не существует никакой разницы между стандартными пространственно-временными координатами X^m и дополнительными координатами тензорного типа Z^{mn}. Все они являются скалярами по отношению к преобразованиям группы симметрии мирового листа струны. Разделение координат по их свойствам в пространстве вложения мирового листа струны может быть осуществлено только с привлечением пространственно-временной группы Лоренца, суперсимметричным расширением которой является супергруппа, представленная, к примеру, алгеброй (4). Поэтому связь между двумя различными формулировками суперсимметричных струн, описывающих один и тот же спектр частиц — формулировкой Невье–Шварца–Рамона с суперсимметрией мирового листа и формулировкой Грина-Шварца с пространственно-временной суперсимметрией — обнаруживает независимую трактовку, в которой свойства пространственно-временной суперсимметрии, явной в формулировке Грина–Шварца, диктуют выбор типа пространственно-временных координат для описания струны Невье–Шварца–Рамона.

5. Обратимся теперь к более широкой трактовке пространственно-временных координат и зададимся вопросом: возможна ли параметризация пространства-времени только координатами тензорного типа и каковы последствия такого шага? Для этого заметим, что набор бозонных координат (X^m, Z^{mn}), параметризующих $N = 1$, $D = 4$ расширенное суперпространство, может быть вложен в набор исключительно тензорных координат $\widehat{Z}^{\widehat{m}\widehat{n}}$ $N = 1$, $D = 5$ тензорного суперпространства. При этом число фермионных степеней свободы в $D = 4$ и в $D = 5$ пространственно-временных измерениях остается неизменным. Пользуясь стандартными методами вычисления супералгебры Вирасоро [1, 4], можно показать, что для суперструны типа Невье–Шварца–Рамона, вложенной в такое $N = 1$, $D = 5$ тензорное суперпространство, структура супералгебры остается такой же, как и для стандартной формулировки суперструны Невье–Шварца–Рамона, а пара аномальных членов, соответствующих (3), модифицируется к соотношениям

$$\begin{cases} A^{\text{total}}(m) = \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{D(D-1)}{2} + \dfrac{D(D-1)}{4}\right)m^3 + \dfrac{1}{6}(m - 13m^3) + \dfrac{1}{12}(11m^3 - 2m) + \\ \qquad + 2a^R_{\text{open}} m, \\ B^{\text{total}}(m) = \dfrac{D(D-1)}{4}m^2 - 5m^2 + 2a^R_{\text{open}}. \end{cases} \tag{5}$$

Несложно убедиться, что критической размерностью для такой тензорной суперструны является размерность $D = 5$.

При вычислении супералгебры Вирасоро суперструны в тензорном суперпространстве используется следующее каноническое соотношение между тензорными координатами $\widehat{Z}^{\widehat{m}\widehat{n}}$ и сопряженными к ним обобщенными импульсами:

$$\{\mathcal{P}^{\widehat{m}\widehat{n}}(\sigma), \widehat{Z}^{\widehat{k}\widehat{l}}(\sigma')\}_{PB} = \frac{1}{2}T^{-1}(\eta^{\widehat{m}\widehat{k}}\eta^{\widehat{n}\widehat{l}} - \eta^{\widehat{m}\widehat{l}}\eta^{\widehat{n}\widehat{k}})\delta(\sigma - \sigma'), \tag{6}$$

где T является параметром натяжения струны; $\eta^{\widehat{m}\widehat{n}}$ — метрика пятимерного пространства Минковского, а σ — пространственно-подобная координата, параметризующая мировой лист струны. При переходе к операторным величинам аналогом оператора импульса в тензорном пространстве является оператор вида $\widehat{\mathcal{P}}_{\widehat{m}\widehat{n}} = -i\partial_{\widehat{m}\widehat{n}}$, действие которого на обобщенные координаты сводится к выражению $\partial_{\widehat{m}\widehat{n}} Z^{\widehat{m}\widehat{n}} = D(D-1)/2$.

Наличие нового типа дифференциала дает возможность строить инвариантные лагранжианы для экзотических полей тензорного типа, включающие, к примеру, неабелевы калибровочные тензорные поля. Действительно, наличие дифференциала стандартного типа $\partial_a = \partial/\partial x^a$ ограничивает класс неабелевых полей калибровочными полями векторного типа, полями Янга–Миллса. В тензорном пространстве аналогом 1-формы поля Янга–Миллса является 1-форма $B = \mathcal{A}_{mn} dZ^{mn}$. Калибровочно инвариантной напряженностью поля для такой 1-формы является 2-форма $\mathcal{F}_{mn,kl} = \partial_{mn}\mathcal{A}_{kl} - \partial_{kl}\mathcal{A}_{mn} + i[\mathcal{A}_{mn}, \mathcal{A}_{kl}]$, а инвариантный относительно преобразований неабелевой группы внутренней симметрии лагранжиан входит в функционал действия

$$S = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\int d^D\omega \mathcal{F}_{mn,kl}\mathcal{F}^{mn,kl}, \tag{7}$$

в котором след берется по индексам внутренней группы симметрии, а $d^D\omega$ обозначает инвариантную форму объема. Подчеркнем, что рассматриваемая нами конструкция является скорее экзотикой, чем привычным стандартом описания тензорных калибровочных полей, поскольку компоненты тензорного калибровочного поля $\mathcal{A}_{mn}$ являются 1-формой в тензорном пространстве, а не компонентами 2-формы, как это было бы в конвенциональном пространстве-времени. Детализация описания тензорных калибровочных полей в тензорном пространстве выходит за рамки данного сообщения и будет проведена в отдельной работе.

6. Кратко остановимся на обсуждении полученных результатов. В работе рассмотрена структура суперконформной алгебры модели суперструны с дополнительными тензорными степенями свободы. Показано, что такая модель свободна от квантовых аномалий в 4-мерном пространстве-времени, расширенном координатами тензорного типа. Эквивалентным описанием тензорной суперструны является вложение ее бозонных координат в 5-мерное пространство, параметризуемое исключительно координатами тензорного типа. Такая экзотическая параметризация пространства дает возможность локального описания нестандартных тензорных полей янг-миллсовского типа, которые являются составной частью спектра полей первично квантованной тензорной суперструны. Дальнейшим естественным развитием представленных здесь идей является построение спектра мод возбуждений в тензорном суперпространстве, изучение его супергеометрии, а также построение связи между формулировками тензорной суперструны с суперсимметрией мирового листа и явной пространственно-временной суперсимметрией [5, 6].

Автор выражает признательность В. П. Березовому за обсуждения предварительных результатов. Работа выполнена при поддержке Гранта INTAS # 05-08-7928 и Гранта НАНУ-РФФИ # 38/50–2008.

1. *Green M. B., Schwarz J. H., Witten E.* Superstring theory. – Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
2. *Van Holten J. W., van Proeyen A.* $N = 1$ supersymmetry algebras in $d = 2, 3, 4 \bmod 8$ // J. Phys. – 1982. – **A15**. – P. 3763–3783. *Gauntlett J. P., Gibbons G. W., Hull C. M., Townsend P. K.* BPS states of $D = 4$ $N = 1$ supersymmetry // Commun. Math. Phys. – 2001. – **216**. – P. 431–459.
3. *Curtright T.* Are there any superstrings in eleven dimensions? // Phys. Rev. Lett. – 1988. – **60**. – P. 393–396.
4. *Amorim R., Barcelos-Neto J.* Extensions of string theories // Z. Phys. – 1993. – **C58**. – P. 513–518.

5. *Amorim R., Barcelos-Neto J.* Superstrings with tensor degrees of freedom // Ibid. – 1994. – **C64.** – P. 345–347.
6. *Нурмагамбетов А. Ю.* Локальная фермионная симметрия суперструны Грина–Шварца в тензорном суперпространстве // Вестн. ХНУ. – 2009. – **845**, № 1(41). – С. 21–24.

Институт теоретической физики им. А. И. Ахиезера
ННЦ "Харьковский физико-технический институт"

Поступило в редакцию 25.06.2009

A. J. Nurmagambetov

The structure of the superconformal algebra of string theory in a tensorial superspace

We analyze the structure of the superconformal algebra of string theory in the $N = 1$, $D = 4$ tensorial superspace with tensor-type coordinates. It is demonstrated that the inclusion of additional coordinates essentially decreases the superstring critical dimension down to the realistic dimension $D = 4$. Introducing the additional tensorial coordinates leads to a new-type differential entering the action of an exotic non-Abelian antisymmetric tensor field.