



УДК 539.3

© 2010

Г. Д. Гавриленко, В. И. Мацнер

Устойчивость подкрепленных оболочек при совместном действии осевого сжатия и внутреннего (внешнего) давления

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины И. С. Чернышенко)

Запропоновано новий підхід до проблеми стійкості ребристих циліндричних оболонок при дії поздовжньої сили і тиску. Наведено результати розрахунків для оболонок, підсилених ребрами в двох напрямках, та залежність осевих сил від величини внутрішнього або зовнішнього тиску.

Методика расчета. В отличие от общепринятой методики расчета по конструктивно-ортотропной схеме [1, 2], где рассматривается лишь общий случай потери устойчивости, в нашей работе исследуются различные типы деформирования. Устойчивость подкрепленных стрингерами и шпангоутами цилиндрических оболочек, подверженных действию осевых сжимающих сил, изучена ранее [3]. Здесь в той же постановке рассмотрена устойчивость цилиндрических оболочек, подкрепленных ребрами жесткости в двух направлениях при совместном действии осевых сжимающих сил и внутреннего (внешнего) давления.

Докритическое напряженное состояние оболочки при совместном действии нагрузок характеризуется напряжениями

$$\{N_x^F, N_\theta^F\} = -\sigma h \alpha_1, \quad \mp q r \alpha_2, \quad (1)$$

где σ — докритическое сжимающее нормальное напряжение; q — радиальная нагрузка; знак (+) соответствует внутреннему давлению, знак (–) — внешнему; $\alpha_1 = 1 + F_s/h\ell_s$, $\alpha_2 = 1 + F_r/h\ell_r$, F_s , ℓ_s — площадь поперечного сечения стрингера и расстояние между стрингерами; F_r , ℓ_r — аналогичные величины для шпангоутов, $\ell_s = 2\pi r/k_s$, $\ell_r = \ell/(k_r + 1)$; k_s , k_r — число стрингеров и шпангоутов; h , r , ℓ — толщина, радиус срединной поверхности и длина оболочки.

При выводе расчетных формул использован энергетический метод. Задача решалась в перемещениях при их одночленной аппроксимации.

Потенциальная энергия системы определяется выражениями

$$\begin{aligned}
V_2 = & \frac{K}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\ell \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{r\partial\theta} - \frac{w}{r} \right)^2 - 2(1-\mu) \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{r\partial\theta} - \frac{w}{r} \right) + \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial u}{r\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \right. \\
& + \alpha_s \left(\frac{\partial u}{\partial x} - z_s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{\alpha_r}{r^2} \left[\frac{\partial v}{\partial\theta} - w - \frac{z_r}{r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} + \frac{\partial v}{\partial\theta} \right) \right]^2 \left. \right\} r dx d\theta + \\
& + \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\ell \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial\theta^2} + \frac{\partial v}{r^2 \partial\theta} \right)^2 - \right. \\
& - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} + \frac{\partial v}{\partial\theta} \right) - \left(\frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial\theta} + \frac{\partial v}{r \partial x} \right)^2 \right] + \beta_s \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \\
& \left. + \beta_r \left(\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial\theta^2} + \frac{\partial v}{r^2 \partial\theta} \right)^2 + \beta_{x\theta s} \left(\frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial\theta} \right)^2 + \beta_{x\theta r} \left(\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial x \partial\theta} + \frac{\partial u}{r \partial\theta} \right)^2 \right\} r dx d\theta. \quad (2)
\end{aligned}$$

Работу внешних сил запишем в виде

$$A_2 = -\frac{K(1-\mu^2)}{2E} \int_0^{2\pi} \int_0^\ell \left[\sigma \alpha_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \pm q \frac{r}{h} \alpha_2 \left(\frac{\partial w}{r \partial\theta} \right)^2 \right] r dx d\theta. \quad (3)$$

Перемещения оболочки при потере устойчивости задаем в виде

$$\begin{aligned}
u &= (u_{1ij} \cos i_1\theta + u_{2ij} \sin i_2\theta) \cos \frac{\lambda x}{r}, \\
v &= (v_{1ij} \sin i_1\theta + v_{2ij} \cos i_2\theta) \sin \frac{\lambda x}{r}, \\
w &= (w_{1ij} \sin i_1\theta + w_{2ij} \cos i_2\theta) \sin \frac{\lambda x}{r},
\end{aligned} \quad (4)$$

где $u_{1ij}, v_{1ij}, w_{1ij}, u_{2ij}, v_{2ij}, w_{2ij}$ — произвольные постоянные; $\lambda = j\pi r/\ell$; j — число полу-волн по длине; i_1 и i_2 — числа окружных волн. Функции $u_{1ij}, v_{1ij}, w_{1ij}$ описывают изгиб ребер, $u_{2ij}, v_{2ij}, w_{2ij}$ — их кручение, причем используются они отдельно, а не вместе. В последующих формулах индексы 1 и 2 опускаются.

Из условий минимума полной энергии системы $\partial V/\partial u_{ij} = 0$, $\partial V/\partial v_{ij} = 0$, $\partial V/\partial w_{ij} = 0$ можно определить критические значений продольных сжимающих нагрузок

$$\left(\frac{\sigma}{E} \right)_{cr} = \left[\bar{A}_{33} + \frac{2A_{12}A_{13}A_{23} - A_{11}A_{23}^2 - A_{22}A_{13}^2}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \right] \frac{1}{A_{33}''}, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned}
V &= V_2 + A_2, \quad \bar{A}_{33} = A_{33} \pm \frac{q}{E} \frac{r}{h} (1-\mu^2) \alpha_2 i^2; \quad A_{11} = \alpha_x \lambda^2 + \frac{1-\mu}{2} i^2 \left(1 + \frac{\beta_{x\theta r}}{a} \right); \\
A_{12} &= -i\lambda \frac{1+\mu}{2}; \quad A_{13} = \lambda(\mu - \alpha_s z_{sr} \lambda^2) + i^2 \frac{\lambda \beta_{x\theta r}}{a};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{22} &= \frac{1-\mu}{2}\lambda^2 + c_\theta i^2 + \frac{1}{a}[i^2\beta_\theta + 2(1-\mu)\lambda^2]; \\
A_{23} &= -i - i\alpha_r(1-z_{rr})(1-i^2z_{rr}) - \frac{i}{a}(\beta_\theta i^2 + (2-\mu)\lambda^2); \\
A_{33} &= 1 + \alpha_s z_{sr}^2 \lambda^4 + \alpha_r(1-z_{rr}i^2)^2 + \frac{(\lambda^2 + i^2)^2 + \beta_s \lambda^4 + \beta_r i^4 + \beta_{s\theta} i^2 \lambda^2}{a}; \\
A''_{33} &= (1-\mu^2)\alpha_1 \lambda^2; \quad z_{sr} = \frac{z_s}{r}, \quad z_{rr} = \frac{z_r}{r}, \quad c_\theta = 1 + \alpha_r(1-z_{rr})^2; \\
\alpha_x &= 1 + \alpha_s, \quad \alpha_s = \frac{E_s F_s}{K l_s}, \quad \alpha_\theta = 1 + \alpha_r, \quad \alpha_r = \frac{E_r F_r}{K l_r}; \\
\beta_x &= 1 + \beta_s, \quad \beta_s = \frac{E_s I_s}{D l_s}, \quad \beta_\theta = 1 + \beta_r, \quad \beta_r = \frac{E_r I_r}{D l_r}; \\
\beta_{x\theta} &= \beta_{x\theta s} + \beta_{x\theta r}, \quad \beta_{x\theta s} = \frac{G_s I_{kps}}{D l_s}, \quad \beta_{x\theta r} = \frac{G_r I_{kpr}}{D l_r}; \\
c_\theta &= 1 + \alpha_r(1-z_{rr})^2, \quad z_{sr} = \frac{z_s}{r}, \quad z_{rr} = \frac{z_r}{r}, \quad a = \frac{12r^2}{h}.
\end{aligned} \tag{6}$$

С учетом наличия ребер при определении критических нагрузок, кроме общего случая деформирования оболочки, рассматриваются и частные случаи, при реализации которых на деформации подкрепляющих ребер наложены ограничения [3]. Случаи деформаций и условия для числа волн и полуволн приведены в табл. 1. Кроме того, рассматриваются различные варианты учета или неучета жесткостных характеристик ребер (они обозначены цифрами от 0 до 5).

Здесь приняты такие обозначения: 1 — ребра работают на растяжение — сжатие, изгиб, кручение; 2 — ребра работают на растяжение — сжатие, изгиб; 3 — ребра работают на изгиб

Таблица 1. Случаи деформации и жесткостные характеристики ребер

Случай деформации	Условия для чисел волн и полуволн	Учет жесткостных характеристик ребер	
		Стрингеры	Шпангоуты
Общий	$j = t_1(k_r + 1); 2i = tk_s$	1	1
Первый частный подслучай	$j \neq t_1(k_r + 1); 2i = tk_s$	2	1
		4	3
Второй частный подслучай	$j \neq t_1(k_r + 1); 2i = tk_s$	5	1
		5	3
Третий частный подслучай	$j = t_1(k_r + 1); 2i \neq tk_s$	1	2
		3	4
Четвертый частный подслучай	$j = t_1(k_r + 1); 2i \neq tk_s$	1	5
		3	5
Пятый частный подслучай	$j = t_1(n_r + 1); 2i = tn_s$	2	5
		4	5
Шестой частный подслучай	$j \neq t_1(k_r + 1); 2i = tk_s$	5	2
		5	4
Седьмой частный подслучай	$j \neq t_1(k_r + 1); 2i = tk_s$	2	2
		4	4
Восьмой частный подслучай	$j = t_1(k_r + 1); 2i = tk_s$	5	5
		0	0

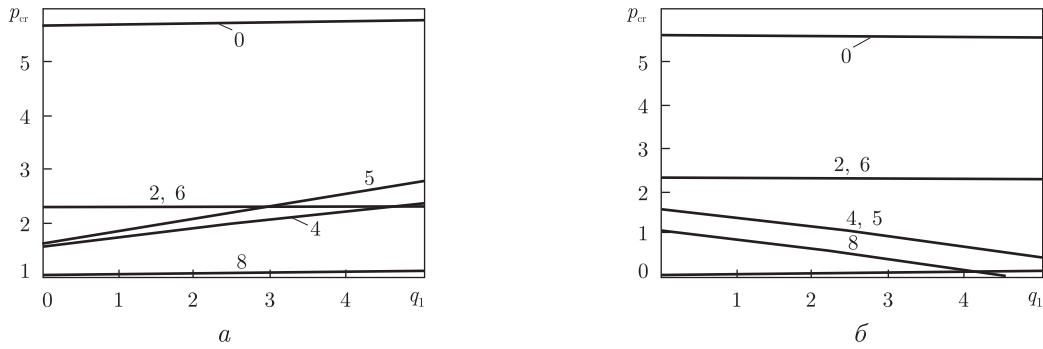


Рис. 1. Зависимость критической нагрузки от давления

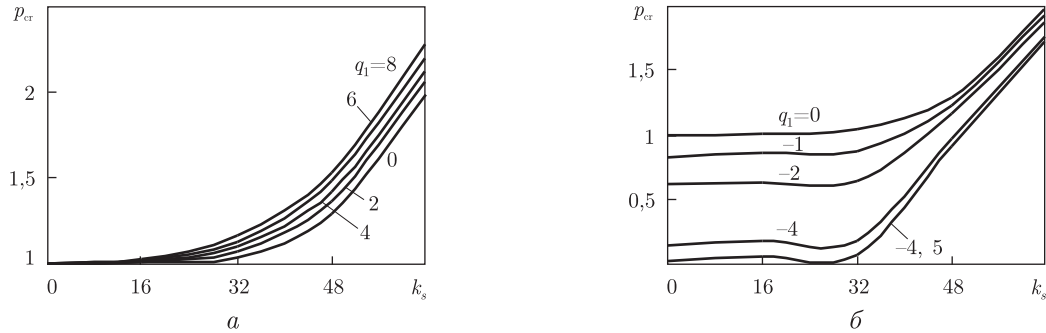


Рис. 2. Зависимость критической нагрузки от числа стрингеров

и кручение; 4 — ребра работают только на изгиб; 5 — ребра работают только на кручение; 0 — жесткости ребер не учитываются; $t = 0, 1, 2, \dots$; $t_1 = 1, 2, \dots$

Как пример рассмотрена ребристая оболочка [3], подкреплённая 32 стрингерами и 4 шпангоутами с параметрами $\ell/r = 2,25$, $r/h = 400$. Подкрепляющие ребра уголкового поперечного сечения имели такие размеры: стрингеры — $4 \times 3,5 \times 0,5$ мм; шпангоуты — $4 \times 8 \times 0,5$ мм. Стрингеры крепились широкой полкой с внешней стороны оболочки, шпангоуты — узкой полкой с внутренней стороны.

На рис. 1 приведены значения параметра критических сжимающих нагрузок в зависимости от величины внутреннего (a) и внешнего (b) давления. Здесь $p_{cr} = \sigma_{cr}/\sigma_{cl}$, $q_1 = q/q_{cl}$, где $\sigma_{cl} = 0,605Eh/r$, $q_{cl} = 0,92/\ell_1/\sqrt{r/h}$ — минимальное значение внешнего давления для гладкой цилиндрической оболочки при $j = 1$ [4], $\ell_1 = \ell/r$. (Для оболочки, подкреплённой шпангоутами, принято $\ell_1 = \ell/r/(k_r + 1)$, т. е. рассматривается гладкая оболочка с длиной, равной длине отсека между шпангоутами.) Цифрами на рисунках обозначены случаи деформирования. На рис. 1, b точки пересечения с осями соответствуют нагрузкам осевого сжатия p_{cr} и внешнего давления q_1 , приложенных отдельно друг от друга. При увеличении внутреннего давления критическая нагрузка возрастает, а при возрастании внешнего — падает.

На рис. 2 и 3 представлены зависимости минимальных нагрузок осевого сжатия от числа стрингеров (k_s) и шпангоутов (k_r) в зависимости от величины внутреннего (a) и внешнего (b) давления. При этом оболочка нагружалась заданным внутренним ($q_1 = 0; 2; 4; 6; 8$) или внешним ($q_1 = 0; -1; -2; -3; -4; -4,5$) давлением, а затем осевой сжимающей силой.

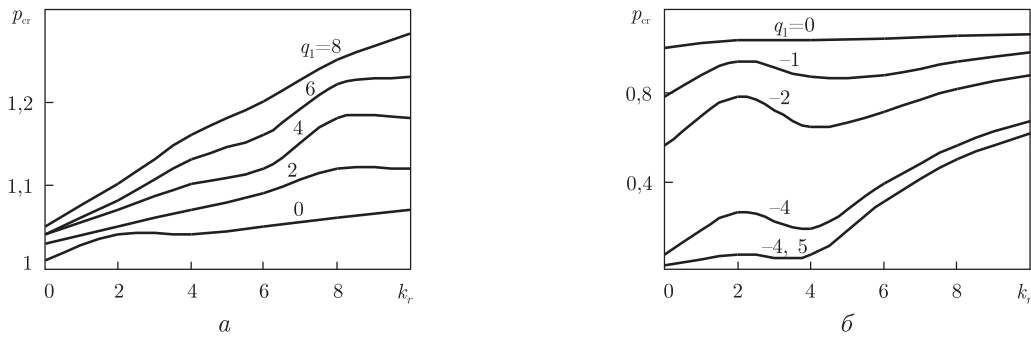


Рис. 3. Зависимость критической нагрузки от числа шпангоутов

Минимальные значения критических нагрузок определяются восьмым частным случаем. Как видно из рис. 2, при числе стрингеров меньше 32 критическая нагрузка почти не зависит от величины внутреннего давления. При $k_s > 32$ значения сжимающих нагрузок увеличиваются. Для оболочек, нагруженных внешним давлением, сжимающие нагрузки при $k_s > 48$ слабо зависят от величины внешнего давления и понижаются при $k_s < 48$. Малое число шпангоутов слабо влияет на минимальные значения критических нагрузок для оболочек, подверженных действию осевых сжимающих сил и внутреннего давления (рис. 3, а), и приводит к их ощутимому росту при действии осевых сжимающих сил и внешнего давления (рис. 3, б).

Из анализа рис. 1–3 следует, что минимальные параметры p_{cr} при заданном q_1 определяются восьмым случаем деформации. Учет тех или иных жесткостных характеристик ребер повышает параметр минимальной критической нагрузки (см. рис. 1). Величины критических параметров нагрузки, соответствующие общему случаю потери устойчивости, существенно выше остальных. Поэтому оценка критических параметров нагрузки на основании данных для общего случая потери устойчивости неоправданно завышена, а по восьмому случаю — сильно занижена.

1. Александровский С. В. Об устойчивости цилиндрических оболочек при больших прогибах // Расчет пространственных конструкций, **3**. – Москва: Стройиздат, 1955. – С. 453–492.
2. Van der Neut A. The general instability of stiffened cylindrical shells under axial compression. – Amsterdam: National Aeronautical Research Institute, 1947. – Rept. S314.
3. Гавриленко Г. Д., Матснер В. И. Аналитический метод определения верхних и нижних критических нагрузок для упругих подкрепленных оболочек. – Днепропетровск: Барвикс, 2007. – 187 с.
4. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. – Москва: Наука, 1967. – 984 с.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 19.08.2009

G. D. Gavrilenko, V. I. Matsner

Stability of stiffened shells under the joint action of axial compression and internal (external) pressure

A new approach to the problem of stability of ribbed cylindrical shells under the action of axial load and pressure is given. The results of solutions for shells having ribs in two directions are presented. Minimum parameters of the critical load are estimated. The dependence of an axial load on the pressure is determined.