УДК 518.5+531.2

Член-кореспондент НАН України **В. В. Скопецький,**
П. С. Малачівський

Чебишовське наближення сумою многочлена й нелінійного виразу з ермітовим інтерполюванням у крайніх точках відрізка

Встановлено достатні умови існування чебишовського (рівномірного, мінімаксного) наближення функції сумою поліному й нелінійного виразу з найменшою абсолютною похибкою й інтерполюванням функції та її похідної в крайніх точках відрізка. Подано приклади функцій, для яких таке наближення існує. Описано загальну схему визначення параметрів такого наближення.

Чебишовське наближення з точним відтворенням значень функції та її похідної в заданих точках застосовується для побудови неперервного й гладкого мінімаксного сплайн-наближення, а також апроксимації розв'язків диференціальних рівнянь [1–3]. Вивченню властивостей таких чебишовських наближень поліномом і раціональним виразом присвячено роботи [4–6]. Чебишовське наближення нелінійними виразами не завжди існує, а в разі його існування обчислення значень параметрів, що входять у вираз нелінійно, здебільшого потребує окремого дослідження [1, 2].

Умови існування чебишовського наближення з інтерполюванням у крайніх точках відрізка сумою поліному й нелінійного виразу $\varphi(p;x)$ з параметром p

$$V_n(a;x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + A\varphi(p;x), \qquad A \neq 0, \qquad p_1 < p < p_2 \tag{1}$$

визначено в роботі [7]. У даній роботі встановлено властивості чебишовського наближення виразом (1) з точним відтворенням значень функції та її похідної в крайніх точках відрізка.

Нехай функція $\varphi(p;x)$ у виразі (1) має такі властивості:

1) $\varphi(p;x)$ — неперервно диференційована до $(n+1)$-го порядку на відрізку $[\alpha,\beta]$ ($\varphi(p;x) \in C^{n+1}[\alpha,\beta]$);

2) похідні $\varphi^{(i)}(p;x)$, $i=\overline{1,n}$, є строго монотонними функціями від x на відрізку $[\alpha,\beta]$ для будь-яких $p \in (p_1,p_2)$;

3) відношення $(n+1)$-х похідних $\varphi(p;x)$ за x

$$\frac{\varphi^{(n+1)}(p;\chi_2)}{\varphi^{(n+1)}(p;\chi_1)}$$

є строго монотонною функцією від p для $p \in (p_1,p_2)$ та будь-яких різних χ_1, χ_2 ($\chi_1,\chi_2 \in [\alpha,\beta]$).

Розглянемо неперервно диференційовні на відрізку $[\alpha,\beta]$ функції $f(x)$, які справджують нерівності

$$0 < W_1^{(n)} < W^{(n)} < W_2^{(n)}, \tag{2}$$

де

$$W^{(n)} = \frac{D_{n+1}(f; z_2, z_3, \ldots, z_{n+4})}{D_{n+1}(f; z_1, z_2, \ldots, z_{n+3})}; \tag{3}$$

$$D_k(U; z_j, z_{j+1}, \ldots, z_{j+k+1}) = \frac{D_{k-1}(U; z_{j+1}, z_{j+2}, \ldots, z_{j+k+1})}{D_{k-1}(s_{k-1}; z_{j+1}, z_{j+2}, \ldots, z_{j+k+1})} -$$

$$-\frac{D_{k-1}(U; z_j, z_{j+1}, \ldots, z_{j+k})}{D_{k-1}(s_{k-1}; z_j, z_{j+1}, \ldots, z_{j+k})}, \qquad k = \overline{3, n+1}, \qquad j = \overline{1, n-k+3}; \tag{4}$$

$$D_2(U; z_j, z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j+3}) = \begin{cases} \dfrac{D_1(U; z_2, z_4)}{D_1(s_1; z_2, z_4)} - U'(z_1), \quad \text{якщо} \quad j = 1; \\ \dfrac{D_1(U; z_{j+1}, z_{j+3})}{D_1(s_1; z_{j+1}, z_{j+3})} - \dfrac{D_1(U; z_j, z_{j+2})}{D_1(s_1; z_j, z_{j+2})}, \\ \qquad \text{якщо} \quad 1 < j < n+1; \\ U'(z_{n+4}) - \dfrac{D_1(U; z_{n+1}, z_{n+3})}{D_1(s_1; z_{n+1}, z_{n+3})}, \quad \text{якщо} \quad j = n+1; \end{cases} \tag{5}$$

$$D_1(U; z_j, z_{j+2}) = \begin{cases} U'(z_1), \quad \text{якщо} \quad j = 1; \\ U(z_4) + U(z_3) - 2U(z_2), \quad \text{якщо} \quad j = 2; \\ U(z_{j+2}) - U(z_j), \quad \text{якщо} \quad 2 < j \leqslant n; \\ 2U(z_{n+3}) - U(z_{n+2}) - U(z_{n+1}), \quad \text{якщо} \quad j = n+1; \\ U'(z_{n+4}), \quad \text{якщо} \quad j = n+2; \end{cases} \tag{6}$$

$$s_k(x) = x^k; \tag{7}$$

$$W_1^{(n)} = \min(r_1^{(n)}, r_2^{(n)}); \qquad W_2^{(n)} = \max(r_1^{(n)}, r_2^{(n)}); \tag{8}$$

$$r_i^{(n)} = \lim_{p \to p_i} \frac{D_{n+1}(\varphi; z_2, z_3, \ldots, z_{n+4})}{D_{n+1}(\varphi; z_1, z_2, \ldots, z_{n+3})}, \qquad i = 1, 2; \tag{9}$$

$U'(x)$ — похідна функції $U(x)$; z_j ($j = \overline{3, n+2}$) — будь-які, впорядковані за зростанням $z_j < z_{j+1}$ числа з інтервалу (α, β), $z_1 = z_2 = \alpha$, а $z_{n+3} = z_{n+4} = \beta$.

1. Чебишовське наближення сумою многочлена й нелінійного виразу (1) із найменшою абсолютною похибкою і точним відтворенням значень функції та її похідної в крайніх точках відрізка. Достатню умову існування такого наближення з точним відтворенням значень функції та її похідної в обох крайніх точках відрізка сформульовано у вигляді теореми.

Теорема. *Нехай функція $f(x)$ неперервно диференційовна на відрізку $[\alpha, \beta]$, а функція $\varphi(p; x)$ задовольняє вимоги 1, 2 і 3, тоді:*

а) достатньою умовою існування чебишовського наближення функції $f(x)$ сумою многочлена степеня n ($n > 1$) і нелінійного виразу $\varphi(p; x)$ (1) із найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ і точним відтворенням значень функції та її похідної у крайніх точках відрізка α та β є справдження нерівностей (2);

б) у випадку виконання умов пункту а існує єдине чебишовське наближення функції $f(x)$ сумою многочлена степеня n ($n \geqslant 1$) і нелінійного виразу $\varphi(p; x)$ з параметром p (1) із найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ і точним відтворенням значення функції та її похідної в обох крайніх точках відрізка, а його параметри задовольняють *систему рівнянь*

$$\begin{cases} f(\alpha) - \sum\limits_{i=0}^{n} a_i\alpha^i - A\varphi(p;\alpha) = 0; \qquad f'(\alpha) - \sum\limits_{i=1}^{n} ia_i\alpha^{i-1} - A\varphi'(p;\alpha) = 0; \\ f(z_j) - \sum\limits_{i=0}^{n} a_i z_j^i - A\varphi(p;z_j) = (-1)^j\mu, \qquad j = \overline{3, n+2}; \\ f(\beta) - \sum\limits_{i=0}^{n} a_i\beta^i - A\varphi(p;\beta) = 0; \qquad f'(\beta) - \sum\limits_{i=1}^{n} ia_i\beta^{i-1} - A\varphi'(p;\beta) = 0, \end{cases} \tag{10}$$

в якій

$$|\mu| = \max_{x\in[\alpha,\beta]} \left| f(x) - \sum_{i=0}^{n} a_i x^i - A\varphi(p;x)\right|; \tag{11}$$

z_j ($j = \overline{3, n+2}$) — *впорядковані за зростанням точки альтернансу з інтервалу* (α, β).

Відповідно до теореми щодо існування та єдиності чебишовського наближення функції $f(x)$ нелінійним виразом з ермітовим інтерполюванням [3] параметри такого чебишовського наближення виразом (1) функції $f(x)$, якщо воно існує, можна визначити за схемою Ремеза. Таке чебишовське наближення має n точок альтернансу.

Встановлено також достатні умови існування й характеристичні властивості чебишовського наближення виразом (1) із найменшою абсолютною похибкою й точним відтворенням значення функції та її похідної в одній із крайніх точок відрізка. Достатньою умовою існування чебишовського наближення неперервно диференційовної функції $f(x)$ виразом (1) із найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ і точним відтворенням значення функції та її похідної у точці α є справдження нерівностей (2), в яких

$$D_2(U; z_j, z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j+3}) = \begin{cases} \dfrac{D_1(U; z_2, z_4)}{D_1(s_1; z_2, z_4)} - U'(z_1), \qquad \text{якщо} \qquad j = 1; \\ \dfrac{D_1(U; z_{j+1}, z_{j+3})}{D_1(s_1; z_{j+1}, z_{j+3})} - \dfrac{D_1(U; z_j, z_{j+2})}{D_1(s_1; z_j, z_{j+2})}, \\ \qquad \text{якщо} \quad 1 < j \leqslant n+1; \end{cases} \tag{12}$$

$$D_1(U; z_j, z_{j+2}) = \begin{cases} U'(z_1), \qquad \text{якщо} \qquad j = 1; \\ U(z_4) + U(z_3) - 2U(z_2), \qquad \text{якщо} \qquad j = 2; \\ U(z_{j+2}) - U(z_j), \qquad \text{якщо} \qquad 2 < j \leqslant n+2; \end{cases} \tag{13}$$

$U'(x)$ — похідна функції $U(x)$; z_i ($i = \overline{3, n+4}$) — будь-які, впорядковані за зростанням $z_j < z_{j+1}$ числа з $(\alpha, \beta]$, а $z_1 = z_2 = \alpha$. Параметри такого наближення задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} f(\alpha) - \sum\limits_{i=0}^{n} a_i\alpha^i - A\varphi(p;\alpha) = 0; \qquad f'(\alpha) - \sum\limits_{i=1}^{n} ia_i\alpha^{i-1} - A\varphi'(p;\alpha) = 0; \\ f(z_j) - \sum\limits_{i=0}^{n} a_i z_j^i - A\varphi(p;z_j) = (-1)^j\mu, \qquad j = \overline{3, n+4}, \end{cases} \tag{14}$$

в якій μ визначається за формулою (11), а z_j $(j = \overline{3, n+4})$ — впорядковані за зростанням точки альтернансу з $(\alpha, \beta]$.

Достатньою умовою існування чебишовського наближення неперервно диференційовної функції $f(x)$ виразом (1) із найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ і точним відтворенням значення функції та її похідної у точці β є справдження нерівностей (2), в яких

$$D_2(U; z_j, z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j+3}) = \begin{cases} \dfrac{D_1(U; z_{j+1}, z_{j+3})}{D_1(s_1; z_{j+1}, z_{j+3})} - \dfrac{D_1(U; z_j, z_{j+2})}{D_1(s_1; z_j, z_{j+2})}, \\ \qquad \text{якщо} \quad 1 \leqslant j < n+1; \\ U'(z_{n+4}) - \dfrac{D_1(U; z_{n+1}, z_{n+3})}{D_1(s_1; z_{n+1}, z_{n+3})}, \quad \text{якщо} \quad j = n+1; \end{cases} \tag{15}$$

$$D_1(U; z_j, z_{j+2}) = \begin{cases} U(z_{j+2}) - U(z_j), \qquad \text{якщо} \qquad 1 \leqslant j \leqslant n; \\ 2U(z_{n+3}) - U(z_{n+2}) - U(z_{n+1}), \qquad \text{якщо} \qquad j = n+1; \\ U'(z_{n+4}), \qquad \text{якщо} \qquad j = n+2; \end{cases} \tag{16}$$

$U'(x)$ — похідна функції $U(x)$; z_i $(i = \overline{1, n+2})$ — будь-які, впорядковані за зростанням $z_j < z_{j+1}$ числа з $[\alpha, \beta)$, а $z_{n+3} = z_{n+4} = \beta$. Параметри такого наближення задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} f(z_j) - \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i z_j^i - A\varphi(p; z_j) = (-1)^j \mu, \qquad j = \overline{1, n+2}; \\ f(\beta) - \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i \beta^i - A\varphi(p; \beta) = 0; \qquad f'(\beta) - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i a_i \beta^{i-1} - A\varphi'(p; \beta) = 0, \end{cases} \tag{17}$$

в якій μ визначається за формулою (11), а z_j $(j = \overline{1, n+2})$ — впорядковані за зростанням точки альтернансу з $[\alpha, \beta)$.

Умови (2) не є необхідними для існування чебишовського наближення функції $f(x)$ виразом (1) із найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ й ермітовим інтерполюванням у крайніх точках відрізка. Їхнє виконання необхідне лише в точках чебишовського альтернансу. У разі використання алгоритму Ремеза для знаходження параметрів апроксимації функції $f(x)$ виразом (1) виконання умов (2) необхідне в усіх точках проміжних наближень до точок альтернансу.

Вираз (1) задовольняє вимоги *1*, *2* і *3*, наприклад, з такими функціями $\varphi(p; x)$:

1) $\varphi(p; x) = e^{px}$ на всій числовій осі $(-\infty, \infty)$ (для $x \in (-\infty, \infty)$) і відмінних від нуля значеннях параметра p $(p \in (-\infty, 0) \bigcup (0, \infty))$;

2) $\varphi(p; x) = x^p$ на $[0, \infty)$ і значеннях параметра p, відмінних від $j (p \neq j)$ для $j = \overline{0, n}$;

3) $\varphi(p; x) = \ln(x + p)$ на $[\alpha, \infty)$ для $\alpha > -p$;

4) $\varphi(p; x) = xe^{px}$ на відрізку $[\alpha, \beta]$, якщо аргумент x і параметр p справджують співвідношення $px + n + 1 > 0$ і $p \neq 0$ для $n > 0$;

5) $\varphi(p; x) = \operatorname{erf}(px)$ і $\varphi(p; x) = \operatorname{erfc}(px)$ на $[0, \infty)$ і відмінних від нуля значеннях параметра p $(p \in (-\infty, 0) \bigcup (0, \infty))$ для $n = 1, 2$;

6) $\varphi(p; x) = x^{px}$ на інтервалі (e^{-1}, ∞) з відмінним від нуля значенням параметра p $(p \in (-\infty, 0) \bigcup (0, \infty))$ для $n = 1, 2$.

Подані приклади функцій $\varphi(p;x)$ задовольняють вимоги *1*, *2* і *3*, тому що всі похідні цих функцій для вказаних обмежень строго монотонні за x, а їхнє відношення строго монотонне за p.

2. Визначення параметрів чебишовського наближення виразом (1) із найменшою абсолютною похибкою й точним відтворенням значень функції та її похідної у крайніх точках відрізка. Відповідно до умов існування чебишовського наближення функції $f(x)$ нелінійним виразом з точним відтворенням значень функції та її похідної у зовнішніх точках [3], параметри такого чебишовського наближення неперервно диференційовної функції $f(x)$ виразом (1), якщо воно існує, можна визначити за схемою Ремеза. Чебишовське наближення функції $f(x)$ сумою многочлена й нелінійної функції $\varphi(p;x)$ з параметром p (1) із найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha,\beta]$ і точним відтворенням значень функції та її похідної у обох крайніх точках відрізка α і β має n точок альтернансу, а в разі ермітового інтерполювання лише в одній із крайніх точок — $(n+2)$-ті точки альтернансу.

Нехай z_j $(j=\overline{3,n+2})$ — точки альтернансу у випадку наближення з ермітовим інтерполюванням у обох крайніх точках відрізка, z_j $(j=\overline{3,n+4})$ — точки альтернансу в разі наближення з ермітовим інтерполюванням лише у точці α, а z_j $(j=\overline{1,n+2})$ — відповідно в точці β. Тоді, якщо функція $f(x)$ задовольняє умови існування і точки альтернансу відомі, то параметри $a_i(i=\overline{0,n})$ і A чебишовського наближення функції $f(x)$ виразом (1) з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha,\beta]$ і точним відтворенням значення функції та її похідної у обох крайніх точках відрізка α і β, або одній із них визначаються за формулами

$$A=D_{n+1}(f;z_1,z_2,\ldots,z_{n+3})/D_{n+1}(\varphi;z_1,z_2,\ldots,z_{n+3}); \tag{18}$$

$$a_k=\frac{D_k(f;z_1,\ldots,z_{k+2})-\sum\limits_{i=k+1}^{n}a_iD_k(s_i;z_1,\ldots,z_{k+2})-AD_k(\varphi;z_1,\ldots,z_{k+2})}{D_k(s_k;z_1,z_2,\ldots,z_{k+2})},\quad k=\overline{1,n}; \tag{19}$$

$$a_0=\frac{1}{2}\left(f(z_3)+f(z_4)-\sum_{i=1}^{n}a_i(z_3^i+z_4^i)-A(\varphi(p;z_3)+\varphi(p;z_4))\right), \tag{20}$$

де вирази $D_k(U;z_i,z_{i+1},\ldots,z_{i+k+1})$ для $k=\overline{3,n+1}$, $j=\overline{1,n-k+3}$ визначаються за формулою (4), а $D_2(U;z_i,z_{i+1},z_{i+2},z_{i+3})$ і $D_1(U;z_i,z_{i+2})$ залежно від точок інтерполювання — за відповідними формулами (5) та (6), (12) і (13) або (15) та (16).

Значення параметра p визначається як розв'язок рівняння

$$\omega_n(p)=W^{(n)}, \tag{21}$$

де

$$\omega_n(p)=\frac{D_{n+1}(\varphi;z_2,z_3,\ldots,z_{n+4})}{D_{n+1}(\varphi;z_1,z_2,\ldots,z_{n+3})},$$

а значення $W^{(n)}$ визначається за формулою (3) з урахуванням відповідних точок інтерполювання.

Способи розв'язування цього рівняння залежать від функції $\varphi(p;x)$. Метод визначення параметрів чебишовського наближення сумою многочлена й експоненти з найменшою абсолютною похибкою й відтворенням значень функції та її похідної в крайніх точках відрізка описано в роботі [8].

На закінчення зробимо такі висновки.

Достатньою умовою існування чебишовського наближення сумою поліному й нелінійного виразу (1) функції $f(x)$ із найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ й ермітовим інтерполюванням у крайніх точках відрізка є виконання нерівностей (2), в яких залежно від точок інтерполювання для $k = 1$ і $k = 2$ застосовуються відповідно формули (5) і (6), (12) та (13), або (15) і (16). Параметри a_i $(i = \overline{0, n})$ і A такого чебишовського наближення визначаються за формулами (18)–(20). Значення параметра p є коренем трансцендентного рівняння (21).

Чебишовське наближення виразом (1) з точним відтворенням значення функції та похідної у крайніх точках відрізка використовується для побудови неперервних та гладких мінімаксних сплайн-наближень.

1. *Попов Б. А.* Равномерное приближение сплайнами. – Киев: Наук. думка, 1989. – 272 с.
2. *Dunham C., Zhu C.* Strong uniqueness of nonlinear Chebyshev approximation (with interpolation) // Numerical math. and computing. – Proc. 20th Manitoba Conf., Winnipeg Can. 1990 // Congr. Numerantium. – 1991. – **80**. – P. 161–169.
3. *Малачівський П. С.* Рівномірне наближення нелінійним виразом із точним відтворенням значень функції та її похідної в зовнішніх точках // Волин. мат. вісн. – 2007. – Вип. 4 (13). – С. 109–118.
4. *Малачівський П. С.* Рівномірне наближення з точним відтворенням значень функції та похідної в заданих точках // Доп. НАН України. – 2006. – № 9. – С. 80–85.
5. *Малачівський П.* Рівномірне наближення з точним відтворенням значень функції та її похідних у заданих точках // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. – 2007. – Вип. 5. – С. 119–126.
6. *Малачівський П.* Чебишовське наближення раціональним виразом з ермітовою інтерполяцією // Комп'ютерні технології друкарства. – 2008. – № 19. – С. 95–103.
7. *Скопецкий В. В., Малачивский П. С.* Чебышевское приближение функций суммой многочлена и выражения с нелинейным параметром и интерполированием в крайних точках отрезка // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – **45**, № 1. – С. 64–75.
8. *Малачівський П.* Рівномірне наближення сумою многочлена й експоненти з точним відтворенням значення функції та її похідної у крайніх точках відрізка // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. – 2008. – Вип. 7. – С. 112–124.

Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова
НАН України, Київ
Центр математичного моделювання
Інституту прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Надійшло до редакції 02.09.2009

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **V. V. Skopetskyy, P. S. Malachivskyy**

Chebyshev approximation by the sum of a polynomial and a nonlinear expression with Hermite interpolation at the end points of an interval

We have established the sufficient conditions of existence of a Chebyshev (uniform, minimax) function approximation by the sum of a polynomial and a nonlinear expression with the least absolute error and with interpolation of a function and its derivative at the end points of an interval. The examples of functions, for which such an approximation exists, are given. The algorithm of determining the parameters of such an approximation is constructed.